高等数学（上）

王顺凤 夏大峰 朱凤琴 张天良 编著

清华大学出版社

高等数学

（上）

王顺凤 夏大峰 朱凤琴 张天良 编著

清华大学出版社

北京

内容简介

本书根据编者多年的教学实践与教改经验，结合教育部高教司颁布的本科非数学专业理工类、经济管理类《高等数学课程教学基本要求》编写而成.

全书分上、下册出版. 上册包括函数与极限、导数与微分、中值定理和导数的应用、不定积分、定积分与定积分的应用、常微分方程等7章. 书后还附有数学归纳法、常用中学数学公式、几种常用曲线、积分表及习题参考答案等. 每节都配有A、B两组习题，每章后附有总复习题.

本书注重突出重要概念的实际背景和理论知识的应用. 例题较多且有一定梯度. 全书结构严谨、逻辑清晰、讲解透彻、通俗易懂，便于学生自学. 本书可作为高等院校理、工、经管各类专业高等数学课程的教材使用，也可供工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上/王顺凤等编著. —北京：清华大学出版社，2009.9
ISBN 978-7-302-21022-1

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 王…　Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 152616 号

责任编辑：石　磊
责任校对：王淑云
责任印制：孟凡玉
出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京市清华园胶印厂
装 订 者：三河市溧源装订厂
经　销：全国新华书店
开　本：185×230　**印　张**：23　**字　数**：498千字
版　次：2009年9月第1版　**印　次**：2009年9月第1次印刷
印　数：1～3000
定　价：29.80元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177转3103　　产品编号：031462-01

FOREWORD

前言

本教材是按照教育部提出的高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划的精神，参照教育部制定的全国硕士研究生入学考试理、工、经管类数学考试大纲和南京信息工程大学理、工、经管类高等数学教学大纲，以及2004年教育部高教司颁布的本科非数学专业理工类、经济管理类《高等数学课程教学基本要求》，并汲取近年来南京信息工程大学高等数学课程教学改革实践的经验，借鉴国内外同类院校数学教学改革的成功经验编写而成. 书中内容力求具备以下特点：

1. 突出培养通适型人才的宗旨，注重介绍重要概念的实际背景，强调数学的思想和方法，强化理论知识的应用，力求使学生会用数学知识解决较简单的实际问题.

2. 在保证科学性的前提下，充分考虑高等教育大众化的新形势，构建学生易于接受的微积分系统. 如对较难理解的极限、连续等概念部分，先介绍其描述性定义，在此基础上再介绍数学上的精确定义，这样可使学生易于接受；对微分与积分部分，都以实际问题为背景引入概念，在积分的应用部分，强调应用元素法解决实际问题，这样可使学生对微积分的思想有更全面的认识.

3. 为了便于教师因材施教以及适应分层次教学的需要，书中对有关内容和习题进行了分类处理. 每节的后面都配有A、B两组习题供不同程度的学生选用. A组为基础题，主要训练学生掌握基本概念与基本技能；B组为综合题，主要训练学生综合运用数学知识分析问题、解决问题的能力；每章的最后还配有总复习题，为学生复习与巩固知识提供参考.

4. 充分注意与现阶段中学教材的衔接，在本书的附录中补充介绍了数学归纳法，还包含了一些常用的中学数学公式，供读者查阅.

5. 本教材对例题作了精心选择. 例题内容丰富，既具有代表性又有一定的梯度. 适合各类读者的要求.

本书内容兼顾了理、工、经管各类专业的教学要求，使用时可参照各专业对数学教学的基本要求进行取舍. 如经济管理类的专业，多元函数的积分部分只需选讲二重积分，级数部分的傅里叶级数可不讲；理工类专业可以不讲数学在经济方面的应用等. 教材中标“*”号的内容不作教学要求，可根据各类专业的需要选用.

本书分为上、下两册，共12章. 上册包括第1～7章，下册包括第8～12章. 第1、2、3章

由王顺凤编写，第4、5、6章由朱凤琴编写，第7、9章由张天良编写，第8、12章由薛巧玲编写，第10、11章由朱杏华编写．上册由王顺凤统稿，下册由朱杏华统稿，全书所有编写人员集体认真地讨论了各章的书稿，符美芬、吴亚娟、朱建等许多老师都提出了宝贵的修改意见．全书的框架、定稿由王顺凤、朱杏华、夏大峰承担．

南京信息工程大学数学系主任肖建中教授仔细审阅了全部书稿，提出了宝贵的修改意见，在此表示衷心的感谢．

由于编者水平所限，书中难免有一些缺点和纰漏，敬请各位专家、同行和广大读者批评指正．

编　者

2009年5月于南京信息工程大学

CONTENTS

目录

第 1 章

函数的极限与连续

17 世纪法国数学家笛卡儿(Rene Descartes)把变量引入数学，由此对数学产生了巨大的影响，有了变量，运动进入了数学，辩证法进入了数学，并最终促进了微积分的形成与发展. 微积分是 17～19 世纪人类文明史上重大的成果之一，并在现代科学技术中有广泛而重要的应用. 它以极限为主要工具研究函数的性质. 本章作为微积分的知识准备，主要介绍变量、函数、极限和连续这些重要的基本概念及有关性质，并着重介绍极限与连续的基本思想与基本方法，为学习微积分打好基础.

1.1 函数

1.1.1 变量与常用数集

当观察某个自然现象或变化过程时，会遇到很多数量，这些数量一般可分为两类：一种是在该过程中保持不变的量，称为**常量**；另一种是在该过程中可以取不同的值，或不断变化着的量，称为**变量**. 例如在观察圆的图形变化时，直径与周长都是变量，而圆的周长与直径的比值(圆周率)π 是一个常量；又如在自由落体运动中，物体的下降速度、下降时间及下降距离都是变量，而物体的质量在该过程中可以看作是常量. 一般地，用字母 $a,b,c,\cdots$ 表示常量，用字母 $x,y,z,t,\cdots$ 表示变量. 一个量是变量还是常量，要在具体问题中作具体分析. 例如就小范围的地区来说，重力加速度 g 可以看作是常量，但就广大地区来说，重力加速度 g 则是一个变量.

讨论变量间的数量关系时，必须明确变量的取值范围，单个变量的取值范围常用数集来表示. 本书讨论的变量在没有特别说明的情况下都是指在实数范围内变化的量. 常用的数集除了有自然数集 $\mathbf{N}$、正整数集 $\mathbf{N}^+$、整数集 $\mathbf{Z}$、有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$ 外，还常用区间和邻域来表示.

区间是用得较多的一类数集，设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，则数集

$$\{x \mid a < x < b, x \in \mathbf{R}\}$$

称为**开区间**，记作(a,b)，即

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b, x \in \mathbf{R}\};$$

数集

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\}$$

称为**闭区间**，记作$[a,b]$，即

$$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\};$$

类似地，数集

$$\{x \mid a < x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\} \text{与} \{x \mid a \leqslant x < b, x \in \mathbf{R}\}$$

均称为**半开半闭区间**，分别记作$(a,b]$与$[a,b)$，即

$$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\};$$

$$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b, x \in \mathbf{R}\}.$$

其中 a 与 b 称为这些区间的**端点**，$b-a$ 称为这些区间的**区间长度**. 以上四种区间均为有限区间，区间长度 $b-a$ 是有限的数值. 此外还有下列五种无限区间，引进记号$+\infty$（读作正无穷大）及$-\infty$（读作负无穷大），则有

$$(a,+\infty) = \{x \mid x > a, x \in \mathbf{R}\}; \quad [a,+\infty) = \{x \mid x \geqslant a, x \in \mathbf{R}\};$$

$$(-\infty,b) = \{x \mid x < b, x \in \mathbf{R}\}; \quad (-\infty,b] = \{x \mid x \leqslant b, x \in \mathbf{R}\};$$

$$(-\infty,+\infty) = \mathbf{R}.$$

这些区间的区间长度都为无穷大.

为了讨论函数在一点邻近的某些性态，下面引入邻域的概念.

定义 1.1.1 设 $a,\delta \in \mathbf{R}$，$\delta > 0$，数集$\{x \mid |x-a| < \delta, x \in \mathbf{R}\}$称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$. 其中点 a 与数 δ 分别称为此邻域的中心与半径.

几何上，邻域 $U(a,\delta)$表示数轴上与点 a 的距离小于 δ 的点集，因此该点集是以点 a 为中心，δ 为半径的一个开区间（图 1-1(a)），即

$$U(a,\delta) = (a-\delta, a+\delta).$$

当不强调邻域的半径时，用 $U(a)$表示以点 a 为中心的任意开区间. 将邻域 $U(a,\delta)$的中心点 a 去掉后得到的数集$\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$称为**点 a 的去心 δ 邻域**，记作$\mathring{U}(a,\delta)$（图 1-1(b)），即

$$\mathring{U}(a,\delta) = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta).$$

图 1-1

1.1.2　函数的基本概念

为了简便起见，先介绍一些常用的数学符号.

符号“$\forall$”表示“任意（确定）的”或者“每一个”；符号“$\exists$”表示“存在”或者“有”. 例如“$\forall x$”表示“任意（确定）的 x”，而“$\exists x$”表示“存在 x”.

函数研究的就是变量之间的对应关系，在同一自然现象或变化过程中，经常会同时遇到两个或更多个变量，它们互相联系、互相依赖并遵循一定的规律变化着. 例如，在初速度为 0 的自由落体运动中，路程 s 与时间 t 是两个变量，当时间变化时，所经过的路程也随之改变，它们之间有如下关系：

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\quad t\geqslant 0. \tag{1.1.1}$$

又如在电阻两端加直流电压 V，电阻中有电流 I 通过，电压 V 改变时，电流 I 随之改变，其变化规律为

$$I=\frac{V}{R},$$

若电阻 $R=2$，则

$$I=\frac{V}{2}. \tag{1.1.2}$$

(1.1.1)式和(1.1.2)式均表达了两个变量之间相互依赖的关系或规律，依据这些规律，当其中一个变量在某一范围内取定一个数值时，另一变量的值就随之确定，数学上把这种对应关系称为函数关系.

定义 1.1.2　设 x,y 为同一变化过程中的两个实数变量，如果 x 在其变化范围 D 内任意取定一个值，y 按照一定的法则总有确定的值与之相对应，就称 y 是 x 的函数，x 称为自变量，y 称为因变量，记作

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

其中数集 D 称为 $f(x)$ 的定义域.

一般地，在函数 $y=f(x)$ 中，使得式子 $f(x)$ 有意义的 x 的集合可作为该函数的定义域，也称为该函数的**自然定义域**. 但在实际问题中，函数 $y=f(x)$ 的定义域还要根据问题中的实际意义来确定.

由定义 1.1.2 可知，$f(x)$ 也表示与 x 对应的函数值，因此对应于 x_0 的函数值记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 全体函数值构成的集合称为**函数 $y=f(x)$ 的值域**，记作 $f(D)$，即

$$f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

符号 $f(x)$ 中的 f 表示 y 与 x 之间的对应关系，故 f 仅仅是一个函数对应法则的记号，它也可用其他符号如 φ,F 等代替，这时，函数 $y=f(x)$ 就写成 $y=\varphi(x)$ 或 $y=F(x)$. 但一个函数在同一个问题中只能取定一种记法，当同一问题中涉及多个函数时，则应取不同的符号分别表示它们各自的对应法则，以免混淆.

例 1.1.1 求函数 $y=\frac{\lg(1+x)}{x}$ 的定义域.

解 由题意可得不等式组：

$$\begin{cases} 1+x>0, \\ x\neq 0, \end{cases}$$

解得

$$x>-1, \quad 且\ x\neq 0,$$

则该函数的定义域为 $D=\{x\mid x>-1, 且\ x\neq 0\}$.

例 1.1.2 设 $f(x)=x^2+x$，求 $f(a)$，$f(x^2)$，$f(\sin 1)$.

解 将 $f(x)$ 中的变量 x 分别用 a，x^2，$\sin 1$ 代替，得

$$f(a)=a^2+a,$$
$$f(x^2)=x^4+x^2,$$
$$f(\sin 1)=\sin^2 1+\sin 1.$$

由函数的定义可知，若两个函数的定义域相同，对应法则也相同，则这两个函数相同. 因此也称函数的定义域及其对应法则为**函数的二要素**.

例如函数 $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$，它们的对应法则相同，但定义域不同，所以它们不是相同的函数. 又如函数 $y=x(x\geqslant 0)$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$，它们的对应法则相同，定义域也相同，因此它们是相同的函数.

一般地，如果函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 在定义域内任取一值时，对应的函数值 y 都是惟一的，则称 y 为 x **的单值函数**. 如果对自变量 x 的某些取值都有两个或两个以上的 y 值与之相对应，则称 y 为 x **的多值函数**. 本书中凡是没有特别说明的函数都是指单值函数. 若遇到多值函数时，我们都把它化作多个同时出现的单值函数来分别对待.

函数的表示方法有多种形式，常见的主要有表格法、图示法和公式法.

表格法就是把自变量 x 与因变量 y 的一些对应值用表格列出，实际应用中常用此法. 例如火车时刻表，就是用列表的方法列出出站和进站对应的车次与时间的函数关系. 其优点是从表上可直接看出 y 随 x 的变化而变化的情况，使用上较方便，缺点是只能表达有限个对应数据.

图示法是把变量 x 与 y 对应的有序数组 (x,y) 看作直角坐标平面内点的坐标，y 与 x 的函数关系就可用坐标面上的曲线来表出. 例如气象站中的温度记录器，记录了空气中温度与时间的函数关系. 这种关系是通过借助仪器自动描绘在纸带上的一条连续不断的曲线来表达的. 其优点是直观性强，缺点是没有给出函数关系的表达式，不便于做理论上的推导与演算.

公式法(分析法)是把两个变量之间的关系直接用数学式子表示，高等数学中所涉及的函数大多用公式法来表示.

例如 n 次多项式函数

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n,$$

这里 $a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$ 均为常数，n 为自然数，x 为自变量，$x\in\mathbf{R}$. 再如有理函数

$$y=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

这里 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 均为多项式函数，它们都是用公式法表示的函数.

有时函数在定义域的不同范围内的 x 所对应的函数关系并不相同，这时就要用几个不同的式子分别来表示一个函数，例如函数(图 1-2(a))

$$y=\begin{cases}x+2, & x\leqslant 0,\\ e^x, & x>0\end{cases}$$

与符号函数(图 1-2(b))

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

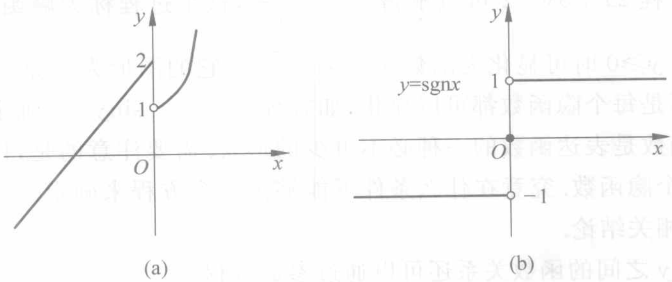

图　1-2

像上面两个函数这样在不同的范围内用不同的式子分段表示的函数称为**分段函数**. 在自然科学与工程技术中经常用到分段函数.

必须指出，分段函数是用不同的式子表示一个(而不是几个)函数. 因此对分段函数求函数值时，不同点的函数值应代入相应范围的公式中去.

例如常用记号$[x]$表示“小于或等于 x 的最大整数”，显然$[x]$是由 x 惟一确定的，如$[-1.5]=-2$,$[1.3]=1$,$[2.43]=2$,$[0]=0$. 称函数 $y=[x]$为**取整函数**. 取整函数 $y=[x]$的定义域是实数集 $\mathbf{R}$，值域是整数集 $\mathbf{Z}$，它表示 y 是不超过 x 的最大的整数. 该函数为分段函数，其图像如图 1-3 所示.

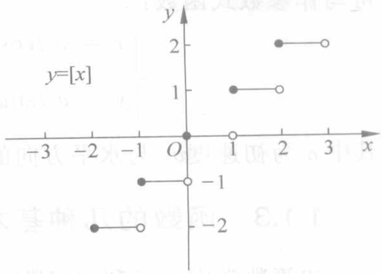

图　1-3

上述用公式法所表示的函数，都是直接用一个或几个关于自变量的式子来表示的，这样的函数也称为**显函数**. 除