经典教材配套丛书

高等数学

全程导学及习题全解

（人大社·吴赣昌·第二版）

张丽蕊　陈海杰　刘明华 ◎主编

上册

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

经典教材配套丛书

高等数学全程导学及习题全解(上册)

(人大社·吴赣昌·第二版)

张丽蕊　陈海杰　刘明华　主编

華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全程导学及习题全解(上册)/张丽蕊，陈海杰，刘明华主编. —上海：华东理工大学出版社，2009.9
(经典教材配套丛书)
ISBN 978-7-5628-2613-2

Ⅰ.高… Ⅱ.①张…②陈…③刘… Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 142526 号

经典教材配套丛书
高等数学全程导学及习题全解(上册)(人大社·吴赣昌·第二版)

主　　编/张丽蕊　陈海杰　刘明华
策划编辑/周永斌
责任编辑/胡　景
责任校对/金慧娟
封面设计/陆丽君
出版发行/华东理工大学出版社
　　　地址：上海市梅陇路 130 号，200237
　　　电话：(021)64250306(营销部)　64252253(编辑部)
　　　传真：(021)64252707
　　　网址：press. ecust. edu. cn
印　　刷/上海展强印刷有限公司
开　　本/787 mm×1092 mm　1/16
印　　张/16.25
字　　数/453 千字
版　　次/2009 年 9 月第 1 版
印　　次/2009 年 9 月第 1 次
印　　数/1-3 000 册
书　　号/ISBN 978-7-5628-2613-2/O·211
定　　价/29.80 元

前　言

在“高等数学”教学过程中，我们发现：出于各种原因，许多学生不会经常找教师答疑，而是更愿意啃书自学．编写本书的目的就是为了方便学生自学，当学生解题遇到困难时，可以及时向书本求解．

我们在多年的教学中积累了大量资料和考题，编写了这本配套吴赣昌主编的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《高等数学(理工类)》(第二版)辅导书．为了与教材保持同步，本书按原书的编排顺序逐章编写，对于书中所有课后题进行详细解答，部分题则给出了多种解法，用于拓展学生的解题思路．该书的每一章、节都以“内容概要”的列表为开头，帮助学生整理所学内容．题解过程包含知识点、解题思路、注释等内容，题前的★号表示难度系数，★号越多，表示难度系数越大，综合性越强．

本书分为上、下两册．上册内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，定积分的应用，空间解析几何与向量代数 7 章．

本书可作为高等院校在校学生及自考学生学习“高等数学”课程的辅导教材、复习参考书以及考研强化指导书，也可作为教师的教学参考用书．

参加编写的人员有：于晓爽(第 1 章)，叶超荣(第 2 章)，宋殿霞(第 3 章)，刘明华(第 4 章)，王兆才(第 5 章)，张丽蕊(第 6～7 章)．

我们真切希望本书能够成为学生们的良师益友，更希望收到读者的反馈，以便改进，使之更贴近读者的想法，满足读者的需要(cbsch@ecust. edu. cn)．

编　者
2009 年 6 月

内容提要

本书是配套《高等数学(理工类)上册》(人大社·吴赣昌·第二版)而编写的学习辅导与习题全解参考书.全书按教材章节进行编写,每章分为内容概要、课后习题全解和总习题精解三部分,并在解题同时标明习题涉及知识点的重要程度.

本书可作为高等院校在校学生及自考学生学习"高等数学"课程的辅导教材、复习参考书以及考研强化指导书,也可作为教师的教学参考用书.

目　　录

第 1 章　函数、极限与连续

内容概要

名　称	主要内容		
1.1　函数	邻域		$U(a,\delta)=\{x \mid \lvert x-a\rvert<\delta\}$ 即 $U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$ $\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<\lvert x-a\rvert<\delta\}$ 即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta,\ x\neq 0\}$
	函数		两个要素：对应法则 f 以及函数的定义域 D ／ 由此，两函数相等⇔两要素相同（与自变量用何字母表示无关）
	函数		解析表示法的函数类型：显函数、隐函数、分段函数
	函数	特性：局部有界性	对集合 $X\subset D$，若存在正数 M，使对所有 $x\in X$，恒有 $\lvert f(x)\rvert<M$，称函数 $f(x)$ 在 X 上有界，或 $f(x)$ 是 X 上的有界函数；反之无界，即任意正数 M（无论 M 多大），总存在（能找到）$x_0\in X$，使得 $\lvert f(x_0)\rvert>M$
	函数	特性：局部单调性	区间 $I\subset D$，对区间上任意两点 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加函数；反之，若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少函数
	函数	特性：奇偶性	设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称；若 $\forall x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数；若 $\forall x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是奇函数
	函数	特性：周期性	若存在非零常数 T，使得对 $\forall x\in D$，有 $(x\pm T)\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期函数
1.2　初等函数	几类基本初等函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数		
	反函数求法和性质，复合函数性质，初等函数		

课后习题全解

习题 1－1（函数）

★1. 求下列函数的自然定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；　　(2) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$；　　(3) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}$；

(4) $y=\dfrac{\lg(3-x)}{\sqrt{\lvert x\rvert-1}}$；　　(5) $y=\log_{x-1}(16-x^2)$.

知识点　自然定义域指实数范围内使函数表达式有意义的自变量 x 的取值的集合.

思路　常见的表达式有：① $\log_a\square(\square>0)$；② $\dfrac{N}{\square}(\square\neq 0)$；③ $\sqrt{\square}(\square\geqslant 0)$；④ $\arcsin\square(\square\in[-1,1])$ 等.（□代表函数表达式，如 x^2、$\sin x$）

解　(1) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0\\1-x^2\geqslant 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 0\\-1\leqslant x\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow x\in[-1,0)\cup(0,1]$；

(2) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}\Rightarrow -1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant x\leqslant 3$；

(3) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\dfrac{1}{x}\Rightarrow\begin{cases}3-x\geqslant 0\\x\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\leqslant 3\\x\neq 0\end{cases}\Rightarrow x\in(-\infty,0)\cup(0,3)$；

(4) $y=\dfrac{\lg(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}\Rightarrow\begin{cases}0<3-x\\0<|x|-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<3\\1<x\text{ 或 }x<-1\end{cases}\Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1,3)$；

(5) $y=\log_{x-1}(16-x^2)\Rightarrow\begin{cases}0<x-1\\1\neq x-1\\0<16-x^2\end{cases}\Rightarrow x\in(1,2)\cup(2,4)$.

★2. 下列各题中，函数是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$ 与 $g(x)=2\lg x$；　　(2) $y=2x+1$ 与 $x=2y+1$.

思路　函数的两个要素是 f(作用法则)及定义域 D(作用范围). 当两个函数作用法则 f 相同(化简后代数表达式相同)且定义域相同时，两函数相同.

解　(1) $f(x)=\lg x^2$ 的定义域 $D=\{x\mid x\neq 0,\ x\in\mathbf{R}\}$，$g(x)=2\lg x$ 的定义域 $D=\{x\mid x>0,\ x\in\mathbf{R}\}$，虽然作用法则相同 $\lg x^2=2\lg x$，但显然两者定义域不同，故不是同一函数；

(2) $y=2x+1$，以 x 为自变量，显然定义域为实数 $\mathbf{R}$；

$x=2y+1$，以 x 为自变量，显然定义域也为实数 $\mathbf{R}$；两者作用法则相同，“$2\square+1$”与自变量用何记号表示无关，故两者为同一函数.

★3. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3}\\0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3}\end{cases}$，求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\varphi(-2)$，并作出函数 $y=\varphi(x)$ 的图形.

思路　注意分段函数自变量的不同范围.

解　$\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right|=\dfrac{1}{2}$，$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\varphi(-2)=0$，函数图形如图 1-1 所示.

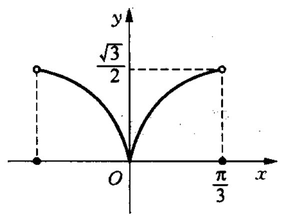

图 1-1

★4. 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}$　$(-\infty,1)$；　　(2) $y=2x+\ln x$　$(0,+\infty)$.

思路　利用单调性的定义即可，注意单调性是局部性质，函数在定义域内不一定有单调性，但是可以考查定义域的某个子区间上函数的单调性的问题.

解　(1) 设 $x_1,x_2\in(-\infty,1)$，当 $x_1<x_2$ 时，

$y_1-y_2=\dfrac{x_1}{1-x_1}-\dfrac{x_2}{1-x_2}=\dfrac{x_1-x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}<0$，由单调性的定义知是单调增加函数；

(2) 设 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，当 $x_1<x_2$ 时，

$$y_1-y_2=(x_1+\ln x_1)-(x_2+\ln x_2)=(x_1-x_2)+\ln\frac{x_1}{x_2}$$

由 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 < x_2$ 知 $\frac{x_1}{x_2} < 1$, 故 $\ln \frac{x_1}{x_2} < 0$ (对数函数的性质), 则有 $y_1 - y_2 < 0$, 所以是单调增加函数.

★5. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 证明: $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

思路　从单调增加的定义出发, 证明过程中利用奇函数的条件.

证明　设 $x_1, x_2 \in (-l, 0)$, $x_1 < x_2$, 则 $-x_1, -x_2 \in (0, l)$, $-x_2 < -x_1$,

由 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 得 $f(-x_2) < f(-x_1)$, 又 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 则 $-f(x_2) < -f(x_1)$, 即 $f(x_2) > f(x_1)$, 结论成立.

★6. 设下面所考虑函数的定义域关于原点对称, 证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的乘积是偶函数, 偶函数与奇函数的乘积是奇函数.

知识点　函数奇偶性定义, 奇偶性是函数的整体性质, 本题可作为结论应用.

证明　设函数 $f(x)$, $g(x)$ 的定义域分别是 D_1, D_2 (D_1, D_2 是关于原点对称的区间).

(1) 设 $F(x) = f(x) + g(x)$, 定义域为 $D_1 \cap D_2$, 显然 $D_1 \cap D_2$ 也关于原点对称.

当 $f(x)$, $g(x)$ 均为偶函数时, $F(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = F(x)$, 得 $F(x)$ 为偶函数;

当 $f(x)$, $g(x)$ 均为奇函数时, $F(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -F(x)$, 得 $F(x)$ 为奇函数.

(2) 令 $G(x) = f(x)g(x)$, 定义域为 $D_1 \cap D_2$, $D_1 \cap D_2$ 关于原点对称.

当 $f(x)$, $g(x)$ 均为奇函数时, $G(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)[-g(x)] = G(x)$, 得 $F(x)$ 为偶函数;

当 $f(x)$, $g(x)$ 均为偶函数时, $G(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = G(x)$, 得 $F(x)$ 为偶函数;

当 $f(x)$, $g(x)$ 为一奇一偶时, $G(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) = -G(x)$, 得 $G(x)$ 为奇函数.

★7. 下列函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数, 哪些既非奇函数又非偶函数?

(1) $y = \tan x - \sec x + 1$;　　(2) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$;

(3) $y = |x\cos x| e^{\cos x}$;　　(4) $y = x(x-2)(x+2)$.

思路　须先判断函数定义域是否关于原点对称, 并利用基本初等函数的性质, 用定义证明.

解　(1) $f(-x) = \tan(-x) - \sec(-x) + 1 = -\tan x - \sec x + 1$, 显然既不等于 $f(x)$, 也不等于 $-f(x)$, 故是非奇非偶函数;

下面 3 个函数的定义域为全体实数 $\mathbf{R}$, 故关于原点对称.

(2) $f(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = f(x)$, 故是偶函数;

(3) $f(-x) = |-x\cos(-x)| e^{\cos(-x)} = f(x)$, 故是偶函数;

(4) $f(-x) = -x(-x-2)(-x+2) = -f(x)$, 故是奇函数.

★8. 下列各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数, 指出其周期:

(1) $y = \cos(x-1)$;　　(2) $y = x\tan x$;　　(3) $y = \sin^2 x$.

思路　利用定义及基本初等函数性质或已知结论, 可按已知结论 $\left(\text{如弦函数 } y = A\cos(wx+\varphi) + C\text{, 则最小正周期 } T = \left|\frac{2\pi}{w}\right|\text{, 切函数也有类似结论}\right)$.

解　(1) 由弦函数周期公式知,最小正周期 $T=2\pi$;

(2) 对正数 T, $f(x+T)=(x+T)\tan(x+T)$, 而切函数周期是 π 的整数倍,故本题函数不是周期函数;

(3) $y=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$,则最小正周期 $T=\left|\dfrac{2\pi}{2}\right|=\pi$.

★★ 9. 证明: $f(x)=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是无界函数.

思路　证明函数在某区间上是无界的,只需证对 $\forall M>0$ (无论 M 有多大), $\exists x_0\in(0,+\infty)$, 使其函数值 $|f(x_0)|>M$ 即可.

证明　对于任意正数 M,要使 $|f(x)|=|x\sin x|>M$,

考虑当 $x=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z}^+)$, $|f(x)|=|x\sin x|=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$,

要使 $2k\pi+\dfrac{\pi}{2}>M$,只要 $k>\dfrac{M-\frac{\pi}{2}}{2\pi}\ \left(M>\dfrac{\pi}{2}\right)$,取 $k_0=\left[\dfrac{M-\frac{\pi}{2}}{2\pi}\right]+1$,

$\forall M>0$ (无论 M 有多大), $\exists x_0=2k_0\pi+\dfrac{\pi}{2}$, 使得 $|f(x_0)|=|x_0\sin x_0|>M$,

所以 $f(x)=x\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是无界函数.

注　k_0 取值只要并且确保 $f\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)>M$ 即可,因此取值不唯一.

★ 10. 火车站行李收费规定如下:当行李不超过 50 kg 时,按 0.15 元每千克收费;当超出 50 kg 时,超重部分按 0.25 元每千克收费. 试建立行李收费 $f(x)$(元)与行李质量 x(kg)之间的函数关系.

思路　认清变量,关键是找出等量关系.

解

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{20}x, & 0\leqslant x\leqslant 50\\ \dfrac{3}{20}\times 50+(x-50)\dfrac{1}{4}, & 50<x\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{20}x, & 0\leqslant x\leqslant 50\\ \dfrac{1}{4}x-5, & 50<x\end{cases}.$$

★ 11. 收音机每台售价为 90 元,成本为 60 元. 厂方为鼓励销售商大量采购,决定凡是订购量超过 100 台的,每多订购 1 台,售价就降低 1 分,但最低价为每台 75 元.

(1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数;

(2) 将厂方所获的利润 L 表示成订购量 x 的函数;

(3) 某一商行订购了 1 000 台,厂方可获利润多少?

知识点　函数关系的建立以及经济函数, $f'(x)=0\Leftrightarrow f(x)=c$.

思路　分清变量及函数关系,经济函数关系(总利润) $L=$(总收入) $R-$(总成本) C.

解　售价恰好降到 75 元时需订购的台数为 $\dfrac{90-75}{0.01}+100=1\,600$, 则

$$(1)\ p=\begin{cases}90, & 0\leqslant x\leqslant 100\\ 90-\dfrac{1}{100}(x-100), & 100<x\leqslant 1\,600;\\ 75, & x>1\,600\end{cases}$$

$$(2)\ L=R-C=px-60x=\begin{cases}90x-60x, & 0\leqslant x\leqslant 100\\ \left[90-(x-100)\dfrac{1}{100}\right]x-60x, & 100<x\leqslant 1\,600\\ 75x-60x, & x>1\,600\end{cases}$$

$$=\begin{cases}30x, & 0\leqslant x\leqslant 100\\ -\dfrac{1}{100}x^2+31x, & 100<x\leqslant 1\,600;\\ 15x, & x>1\,600\end{cases}$$

(3) $L(1\,000)=-\dfrac{1}{100}1\,000^2+31\times 1\,000=21\,000$(元).

习题 1-2 (初等函数)

★1. 求下列函数的反函数:

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$;　　(2) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

思路　解出 x 的过程即为求反函数的过程,直接函数的因变量变为反函数的自变量.

解　(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}\Rightarrow(1+x)y=1-x\Rightarrow x=\dfrac{1-y}{1+y}\Rightarrow y=\dfrac{1-x}{1+x}$ (习惯上自变量用字母 x 表示);

(2) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}\Rightarrow y2^x+y=2^x\Rightarrow 2^x=\dfrac{y}{1-y}\Rightarrow x=\log_2\dfrac{y}{1-y}\Rightarrow y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

★2. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$,求 $f(x-1),f(x^2-1)$.

思路　用 $x-1$ 代替 $f(x)$ 中的 x 求出 $f(x-1)$,用 x^2-1 代替 $f(x)$ 中的 x 求出 $f(x^2-1)$.

解　$f(x-1)=\begin{cases}1, & x-1<0\\ 0, & x-1=0\\ 1, & x-1>0\end{cases}\Rightarrow f(x-1)=\begin{cases}1, & x<1\\ 0, & x=1;\\ 1, & x>1\end{cases}$

$$f(x^2-1)=\begin{cases}1, & x^2-1<0\\ 0, & x^2-1=0\\ 1, & x^2-1>0\end{cases}\Rightarrow f(x^2-1)=\begin{cases}1, & |x|<1\\ 0, & |x|=1.\\ 1, & |x|>1\end{cases}$$

★3. 设函数 $f(x)=x^3-x,\varphi(x)=\sin 2x$, 求 $f\left[\varphi\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right],f\{f[f(1)]\}$.

思路　逐层代入即可.

解　$\varphi\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{1}{2},f\left[\varphi\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\right]=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{8}$;

$f(1)=0,f[f(1)]=f(0)=0^3-0=0,f\{f[f(1)]\}=f(0)=0$.

★★4. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$,求 $f[f(x)]$ 和 $f\{f[f(x)]\}$.

思路　同上题,逐层代入即可.

解　$f[f(x)]=f\left(\dfrac{x}{1-x}\right)=\dfrac{\dfrac{x}{1-x}}{1-\dfrac{x}{1-x}}=\dfrac{x}{1-2x}\quad\left(x\neq 1,x\neq\dfrac{1}{2}\right)$;

$$f\{f[f(x)]\}=f\left(\dfrac{x}{1-2x}\right)=\dfrac{\dfrac{x}{1-2x}}{1-\dfrac{x}{1-2x}}=\dfrac{x}{1-3x},$$

定义域 D: $x \neq 1, \frac{x}{1-x} \neq 1, \frac{x}{1-2x} \neq 1 \Rightarrow D$: $x \neq 1, x \neq \frac{1}{2}, x \neq \frac{1}{3}$.

★5. 已知 $f[\varphi(x)] = 1+\cos x, \varphi(x) = \sin\frac{x}{2}$,求 $f(x)$.

思路 换元法①,令 $\varphi(x) = t \Rightarrow x = \varphi^{-1}(t)$ (此种方法要求 x 易解),x、$\varphi(x)$分别用 $\varphi^{-1}(t)$、t 代换;换元法②,将 $f[\varphi(x)]$的表达式化成用 $\varphi(x)$表达的式子(需要技巧),再令 $\varphi(x) = t$ 代换.

解 $f[\varphi(x)] = f\left(\sin\frac{x}{2}\right) = 1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} = 2-2\sin^2\frac{x}{2}$,

令 $\sin\frac{x}{2} = t \Rightarrow f(t) = 2-2t^2 \xrightarrow{t \leftrightarrow x} f(x) = 2-2x^2$ (自变量与用何字母表示无关).

★6. 设 $f(x)$的定义域是$[0, 1]$,求:

(1) $f(x^2)$; (2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x+a)+f(x-a)$ $(0<a)$; (4) $f(\sqrt{1-x^2})$ 的定义域.

思路 $f(x)$的定义域是$[0, 1]$,表明对于 $f(A)$,必须 $A \in [0, 1]$.

解 (1) $x^2 \in [0, 1] \Rightarrow x \in [-1, 1]$;

(2) $\sin x \in [0, 1] \Rightarrow x \in [0, \pi] \cup \cdots \cup [2k\pi, (2k+1)\pi] \cup \cdots$,即 $x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}[2k\pi, (2k+1)\pi]$;

(3) $\begin{cases} x+a \in [0, 1] \\ x-a \in [0, 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-a, 1-a] \\ x \in [+a, 1+a] \end{cases}$

当 $a<1-a$,即 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$ 时,结果为$[a, 1-a]$;当 $a>\frac{1}{2}$ 时,结果为 $\varnothing$.

(4) $\begin{cases} \sqrt{1-x^2} \in [0, 1] \\ 1-x^2 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [-1, 1]$.

★7. 设 $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x^2}}$,求:(1) $f(x)$的定义域; (2) $\frac{1}{2}\{f[f(x)]\}^2$.

解 (1) 因为 $x+\sqrt{x^2} = x+|x| \geqslant 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbf{R}$, $f(x)$有意义,故定义域为全体实数 $\mathbf{R}$;

(2) $f[f(x)] = f\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2}}\right) = \sqrt{\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2}}\right)+\sqrt{\left(\sqrt{x+\sqrt{x^2}}\right)^2}}$

$$= \sqrt{2\sqrt{x+\sqrt{x^2}}} \Rightarrow \frac{1}{2}\{f[f(x)]\}^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2\sqrt{x+\sqrt{x^2}}}\right)^2 = \sqrt{x+\sqrt{x^2}}.$$

★8. $f(x) = \sin x, f[\varphi(x)] = 1-x^2$,求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解 $f[\varphi(x)] = \sin[\varphi(x)] = 1-x^2 \Rightarrow \varphi(x) = \arcsin(1-x^2)+2k\pi$,

$\varphi(x)$的自然定义域为 $-1 \leqslant 1-x^2 \leqslant 1$,即 $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$.

内容概要

<table>
<tr><th>名　称</th><th colspan="2">主　要　内　容</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1.3 数列的极限</td><td colspan="2">数列极限的定义(ε-N):任意给定正数 ε(无论多小),总存在正整数 N,使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n,总有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">数列极限的性质</td><td>极限的唯一性,收敛数列必有界,收敛数列的保号性</td></tr>
<tr><td>子数列的收敛性</td></tr>
</table>

续　表

<table>
<tr><th>名　称</th><th colspan="4">主　要　内　容</th></tr>
<tr><td rowspan="6">1.4　函数的极限</td><td rowspan="5">函数极限定义</td><td colspan="2">$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$</td><td>函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某正数时有定义，如果对任意给定的正数 ε（无论多小），总存在正数 X，使对满足 $|x|>X$ 的一切 x，总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$</td><td>函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域有定义，如果对任意给定的正数 ε（无论多小），总存在正数 δ，使对满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x，总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$</td></tr>
<tr><td>单侧极限</td><td>$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$</td><td>$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$</td></tr>
<tr><td>单边极限</td><td>$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$</td><td>$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$</td></tr>
<tr></tr>
<tr><td colspan="4">函数极限的性质：唯一性、有界性、保号性、子序列的收敛性</td></tr>
<tr><td rowspan="7">1.5　无穷小与无穷大（以 $x\to x_0$ 为例）</td><td rowspan="4">无穷小</td><td colspan="3">定义：极限为零的变量（函数）</td></tr>
<tr><td rowspan="3">定理</td><td rowspan="3">函数表示和无穷小的性质</td><td>1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是 $f(x)=A+\alpha$，其中 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小</td></tr>
<tr><td>2. 有限个无穷小的和仍是无穷小</td></tr>
<tr><td>3. 有界函数与无穷小的乘积是无穷小</td></tr>
<tr><td rowspan="3">无穷大</td><td colspan="3">定义：任意给定正数 M（无论多大），当 $x\to x_0$（即存在正数 δ，$0<|x-x_0|<\delta$）时，总有 $|f(x)|>M$</td></tr>
<tr><td colspan="3">正无穷大，负无穷大统称为无穷大</td></tr>
<tr><td colspan="3">无穷大一定是无界变量，但无界不一定是无穷大</td></tr>
</table>

习题 1－3（数列的极限）

★1. 观察一般项 x_n 如下的数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势，写出它们的极限：

(1) $x_n=\dfrac{1}{3^n}$；　　(2) $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{n}$；　　(3) $x_n=2+\dfrac{1}{n^3}$；

(4) $x_n=\dfrac{n-2}{n+2}$；　　(5) $x_n=(-1)^n n$.

思路　写出前几项，观察规律.

解　(1) $\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9},\ \dfrac{1}{27},\ \dfrac{1}{81},\ \cdots\to 0$；

(2) $-1,\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{5},\ \cdots\to 0$；

(3) $2+1,\ 2+\dfrac{1}{8},\ 2+\dfrac{1}{27},\ 2+\dfrac{1}{64},\ 2+\dfrac{1}{125},\ \cdots\to 2$；

(4) $x_n=1-\dfrac{4}{n+2}\Rightarrow 1-\dfrac{4}{3},\ 1-\dfrac{4}{4},\ 1-\dfrac{4}{5},\ \cdots,\ 1-\dfrac{1}{100},\ \cdots\to 1$；

(5) $-1,\ 2,\ -3,\ 4,\ \cdots \to \infty$.

★★ 2. 利用数列极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^k}=0$ （k 为正常数）；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{4n-1}=\dfrac{3}{4}$； （3）$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n^2-2}\sin n=0$.

证明 (1) 对任意给定的正数 ε，要使 $\left|\dfrac{1}{n^k}-0\right|<\varepsilon$，即 $\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{k}}<n$，只要取 $N=\left[\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{k}}\right]$，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，当 $n>N$ 时，就有 $\left|\dfrac{1}{n^k}-0\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^k}=0$；

注 只要保证 N 的取值能够让 N 以后的所有项的值满足 $\left|\dfrac{1}{n^k}-0\right|<\varepsilon$ 即可，因此 N 可取大于或等于 $\left[\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{k}}\right]$.

(2) 对任意给定的正数 ε，要使 $\left|\dfrac{3n+1}{4n-1}-\dfrac{3}{4}\right|=\left|\dfrac{7}{4(4n-1)}\right|<\varepsilon$，

只要 $n>\dfrac{7+4\varepsilon}{16\varepsilon}$，取 $N=\left[\dfrac{7+4\varepsilon}{16\varepsilon}\right]$，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，当 $n>N$ 时，

就有 $\left|\dfrac{3n+1}{4n-1}-\dfrac{3}{4}\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3n}{4n-1}=\dfrac{3}{4}$；

(3) 由于 $\left|\dfrac{n+2}{n^2-2}\sin n-0\right|<\left|\dfrac{n+2}{n^2-4}\right|=\left|\dfrac{1}{n-2}\right|$，

因此对任意给定的正数 ε，要使 $\left|\dfrac{n+2}{n^2-2}\sin n-0\right|<\varepsilon$，只要 $\left|\dfrac{1}{n-2}\right|<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}+2$（计算时为方便，不妨设 $n>2$，因为前面的有限项对极限无影响），取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}+2\right]$，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，当 $n>N$ 时，就有 $\left|\dfrac{n+2}{n^2-2}\sin n-0\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{n^2-2}\sin n=0$.

★ 3. 设数列 $\{x_n\}$ 的一般项 $x_n=\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}$. 问 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=?$ 求出 N，使得当 $n>N$ 时，x_n 与其极限之差的绝对值小于正数 ε. 当 $\varepsilon=0.001$ 时，求出数 N.

思路 按极限定义即可.

解 观察可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}=0$，证明该结果如下.

由于 $\left|\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}-0\right|<\left|\dfrac{1}{n}\right|$，因此对任意给定的正数 ε，要使 $\left|\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}-0\right|<\varepsilon$，只要 $\left|\dfrac{1}{n}\right|<\varepsilon$，即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ $\Big(N$ 取大于或等于 $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ 的整数都可以$\Big)$，则对任意给定的 $\varepsilon>0$，当 $n>N$ 时，就有 $\left|\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}-0\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{n\pi}{2}=0$.

当 $\varepsilon=0.001$ 时，可取 $N=1\,000$.

★ 4. 设 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sin\dfrac{n\pi}{2}$，证明数列 $\{a_n\}$ 没有极限.

思路 若某数列极限为 A，则其任意子列的极限都为 A，因此，若某两个子列极限不同，则说明原数列极限不存在.

证明　令 $n=2k\ (k\in\mathbf{N})$,得子列 $a_{2k}=\left(1+\frac{1}{2k}\right)\sin\frac{2k\pi}{2}$,当 $n\to\infty$ 时,$k\to\infty$,

则 $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{2k}\right)\sin\frac{2k\pi}{2}=0$;

取另一个子列 $n=4k+1\quad(k\in\mathbf{N})$,

得 $a_{4k+1}=\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)\sin\frac{(4k+1)\pi}{2}=\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$,

当 $n\to\infty$ 时,$k\to\infty$,则 $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)\sin\frac{(4k+1)\pi}{2}=\lim\limits_{k\to\infty}1+\frac{1}{4k+1}=1$;

综上所述,原极限不存在.

★5. 设数列 $\{x_n\}$ 有界,又 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

思路　由条件可知 $|x_n|<M$;$|y_n|<\varepsilon_1$,则 $|x_ny_n|<M\varepsilon_1$ 成立,所以只要使 $M\varepsilon_1=\varepsilon$.

证明　① 数列 $\{x_n\}$ 有界,则存在正常数 M,使对任意 n,都有 $|x_n|\leqslant M$,则 $|x_ny_n|\leqslant M|y_n|$;

② $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,则对任意的正数 ε_1,存在 N,当 $n>N$ 时,有 $|y_n|<\varepsilon_1$;

取 $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{M}$,由②可知,存在自然数 N,当 $n>N$ 时,有 $|y_n|\leqslant\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{M}$,从而有 $|x_ny_n|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

★6. 对数列 $\{x_n\}$,若 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=a$,$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

思路　对 $\forall\varepsilon>0$,根据条件,寻找使 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立的 n 的范围.

证明　对于 $\forall\varepsilon>0$,由于 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=a$,则存在 N_1,当 $2k-1>N_1$ 时,$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$;

由于 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$,则存在 N_2,当 $2k>N_2$ 时,$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$;

取 $N=\max\{N_1,\ N_2\}$,当 $n>N$ 时(无论 $n=2k-1$,还是 $n=2k$),

都有 $|x_n-a|<\varepsilon$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

习题 1-4(函数的极限)

★1. 在某极限过程中,若 $f(x)$ 有极限,$g(x)$ 无极限,试判断:$f(x)g(x)$ 是否必无极限.

解　$f(x)g(x)$ 可能有极限,举例如下.

令 $f(x)=x$,$g(x)=\sin\frac{1}{x}$,$\lim\limits_{x\to0}x=0$,$\lim\limits_{x\to0}g(x)$ 不存在,但 $\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

★★2. 用函数极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{3x}=\frac{2}{3}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$;

(3) $\lim\limits_{x\to2}\frac{1}{x-1}=1$;　　(4) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^2-x}=2$.

思路　对于 $\forall\varepsilon>0$,找出符合要求$\left(\text{比如(1)中要求}\left|\frac{2x+3}{3x}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon\right)$的 x 范围,即找到描述自变量范围的 X 或 δ;为了找到 X 或 δ,有时需要对不等式作适当的放缩.

证明　(1) 对于任意的正数 ε,要使 $|f(x)-A|=\left|\frac{2x+3}{3x}-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{|x|}<\varepsilon$,即 $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$,

只要取 $X=\frac{1}{\varepsilon}$，当 $|x|>X$ 时，有 $\left|\frac{2x+3}{3x}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{3x}=\frac{2}{3}$；

(2) 对于任意的正数 ε，因为 $|f(x)-A|=\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}$，

所以当 $\frac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$，即 $x>\frac{1}{\varepsilon^2}$ 时，$\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，

取 $X=\frac{1}{\varepsilon^2}$，当 $x>X$ 时 (因为已知 $x>0$)，有 $\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$；

(3) 由于 $|f(x)-A|=\left|\frac{1}{x-1}-1\right|=\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$ $\Big($为找到 $0<|x-2|<\delta$ 中的 δ，不妨将 x 范围限制在 $|x-2|<\frac{1}{2}$ 内，因为 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限，只和 x_0 附近的 x 所对应的函数值 $f(x)$ 有关$\Big)$，不妨设 $|x-2|<\frac{1}{2}$，则 $\frac{3}{2}<x<\frac{5}{2}$，则 $\left|\frac{x-2}{x-1}\right|<\frac{x-2}{\frac{1}{2}}=2|x-2|$，

对于任意的正数 ε，要使 $2|x-2|<\varepsilon$，只要 $|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}$，

取 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2},\frac{1}{2}\right\}$，当 $0<|x-2|<\delta$ 时，$\left|\frac{x-2}{x-1}\right|<2|x-2|$ 与 $2|x-2|<\varepsilon$ 同时成立，

有 $|f(x)-A|=\left|\frac{x-2}{x-1}\right|<2|x-2|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{x-1}=1$；

(4) $|f(x)-A|=\left|\frac{x^2-1}{x^2-x}-2\right|=\left|\frac{x-1}{x}\right|$，不妨设 $|x-1|<\frac{1}{2}$，则 $\frac{1}{2}<x<\frac{3}{2}$，则

$\left|\frac{x-1}{x}\right|<\frac{|x-1|}{\frac{1}{2}}=2|x-1|$。对于任意的正数 ε，要使 $2|x-1|<\varepsilon$，只要 $|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$，

取 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2},\frac{1}{2}\right\}$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，$|f(x)-A|=\left|\frac{x-1}{x}\right|<2|x-1|<\varepsilon$，

所以 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-x}=2$.

★3. 当 $x\to 2$ 时，$y=x^2\to 4$. 问 δ 等于多少，使得当 $0<|x-2|<\delta$ 时，$|y-4|<0.001$?

思路　由于考查的是 $x\to 2$ 时函数的极限，所以不妨在 $|x-2|<1$(即 $1<x<3$) 范围内讨论，这样的方法在极限证明中经常用到.

解　不妨设 $1<x<3$，则 $|y-4|=|x^2-4|=|x-2|\cdot|x+2|<5|x-2|$，

要使 $5|x-2|<0.001$，只要 $|x-2|<\frac{0.001}{5}$，所以取 $\delta=\frac{0.001}{5}=0.0002$，则当 $0<|x-2|<\delta$ 时，$|y-4|<0.001$.

注　δ 还可选取比 0.0002 小的数，只要保证 $|y-4|<0.001$ 即可.

★4. 求 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{nx}{nx^2+2}$.

思路　注意到它是一个数列极限，所以在求极限过程中，x 看作常数.