高等职业技术学院规划教材

高等数学

主　编　张斯为
副主编　吴汉华
　　　　谢建国

厦门大学出版社
XIAMEN UNIVERSITY PRESS

高等职业技术学院规划教材

高 等 数 学

主　编　张斯为
副主编　吴汉华　谢建国
编　者　郭韩婴　林添华　何开银
李　岚　邓斌凯　温寿丰
马文山　林志方　沈传锦

厦门大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/张斯为主编. 一厦门:厦门大学出版社,2009.8
ISBN 978-7-5615-3322-2

Ⅰ.高…　Ⅱ.张…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 149778 号

厦门大学出版社出版发行
(地址:厦门市软件园二期望海路 39 号　邮编:361008)
http://www.xmupress.com
xmup@public.xm.fj.cn
福建省金盾彩色印刷有限公司印刷
2009 年 8 月第 1 版　2009 年 8 月第 1 次印刷
开本:787×1092　1/16　印张:17.75　字数:446 千字
定价:28.00 元
如有印装质量问题请与承印厂调换

内容提要

本书是根据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》编写的高职数学教材，本书淡化了理论推导和证明，强化了数学知识和方法的应用，突出了职业教育改革特色，难易程度适合高职的生源状况.

本书的主要内容有：函数；极限与连续；导数与微分；导数与微分的应用；不定积分；定积分及其应用；空间解析几何初步；偏导数与重积分；无穷级数；微分方程；概率统计初步.

本书适合高等职业技术院校各专业《高等数学》课程使用.

前 言

为适应高等职业教育人才培养要求，根据教育部组织制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，在充分汲取一些高职高专院校在《高等数学》教学改革方面的成功经验的基础上，作者组织编写了这本高等职业技术学院教材《高等数学》. 本教材淡化了理论推导和证明，突出了职业教育改革特色，难易程度适合高职的生源状况.

按照教育部关于高等职业教育要"以就业为导向"、"以培养技能型人才为目标"，以及"理论教学要以应用为目的，以'必需、够用'为原则"的要求，本书的编写力求体现以下特点：

1. 注重理论知识的实际应用. 根据高职院校培养"技能型人才"的要求，本书的编写比较注意数学概念的实际背景，提高学生的学习目的性.

2. 重视高职学生的数学基础. 本书一方面根据教育部对高职高专基础课程教学的基本要求，另一方面更注重高职学生的实际情况，加强基本知识、基本运算和基本方法的分量. 为此，我们在"函数"一章中安排集合、区间、常用函数及其图像等复习性内容，并在附录中安排"初等数学常用公式、平面曲线方程与图形"等相关知识；习题的配备也以基本训练为主.

3. 精选内容，增强教材的适应性. 根据高职院校的培养目标和各类专业的需要，精选高等数学的内容，突出一元函数微积分的基本要求，体现少而精的特点. 同时，为满足不同专业对数学的要求，本书还编入"空间解析几何初步"、"偏导数与重积分"、"微分方程"、"无穷级数"、"概率统计初步"等内容供选用.

本书由张斯为主持编写，并负责全书的策划和定稿，吴汉华负责第一章至第六章的统稿，谢建国负责第七章至第十一章的统稿. 书中第一章由李岚编写，第二章由林添华编写，第三章由吴汉华编写，第四章由张斯为编写，第五章由谢建国编写，第六章由郭韩婴编写，第七章由何开银编写，第八章由马文山编写，第九章由林志方编写，第十章由邓斌凯编写，第十一章由温寿丰编写，附录(初等数学常用公式、平面曲线方程与图形、简易积分表)由沈传锦编写.

本书的编写、出版得到闽西职业技术学院有关领导和教师的大力支持，在此，表示衷心地感谢.

本书作为高等职业教育《高等数学》课程教学内容改革的一种尝试，加上编者水平的限制和时间的紧迫，难免存在缺点和错误，欢迎使用本书的广大师生批评指正.

编 者

2009 年 8 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

第一章　函数及其图形

高等数学以变量为研究对象，函数关系是变量之间的最基本的一种关系. 本章将介绍集合、函数的概念及其特性、基本初等函数、复合函数初等函数及其图形等.

§1.1　函数的概念

一、集合与区间

1. 集合

集合是近代数学中的一个基本概念. 在中学数学中，已经学习过，这里再将其中有关的内容作一个简单的回顾.

一般地说，把具有某种特定性质的一些事物的总体，称为一个**集合**或**集**. 组成这个集合的事物或个体称为该集合的**元素**.

而对于任何集合中的元素具有的以下特性：(1)确定性；(2)互异性；(3)无序性.

例如，某学院大一的所有学生，就构成一个集合，其中每一个学生都是该集合的元素.

在习惯上，我们常用英文的大写字母如 A、B、X、Y 等表示集合，而用小写的英文字母如 a，b，x，y 或 (x, y)，(x, y, z) 等表示集合的元素.

由数组成的集合称为**数集**. 常用数集有自然数集 $\boldsymbol{N}$、正整数集 $\boldsymbol{N}^+$ 或 $\boldsymbol{Z}^+$、整数集 $\boldsymbol{Z}$、有理数集 $\boldsymbol{Q}$、实数集 $\boldsymbol{R}$ 等.

表示一个集合常用的方法有列举法、描述法和图示法. 如方程 $x^2+x-6=0$ 的根所组成的集合，用列举法表可写成 $A=\{2, -3\}$ 或 $A=\{-3, 2\}$；用描述法表示又可写成 $A=\{x \mid x^2+x-6=0, x\in R\}$.

如果集合 A 中的每一个元素都是集合 B 中的元素，就称 A 是 B 的子集，记为 $A\subseteq B$(读作 A 包含于 B)或者记为 $B\supseteq A$(读作 B 包含 A).

例如，$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{x \mid x<10, x\in N\}$，则 $A\subseteq B$.

如果集合 A 与集合 B 含有相同的元素，就称 A 与 B 相等，记为 $A=B$. 此时 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$.

例如，$A=\{x \mid x^2-1=0\}$，$B=\{1, -1\}$，则 $A=B$.

如果 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，就称 A 是 B 的**真子集**，记为 $A\subsetneqq B$.

例如，$N\subsetneqq Z$，$Q\subsetneqq R$.

只有一个元素 a 的集合称为单元素集合. 记为 $\{a\}$. 如 $\{0\}$ 表示只含 0 这个元素的集合.

不含任何元素的集合，称为**空集**，记为 $\varnothing$，而不能写成 $\{\varnothing\}$.

例如 $\{x \mid x^2+4=0, x\in R\}=\varnothing$，$\{x \mid |x|<0, x\in R\}=\varnothing$.

注意：(1)空集 $\varnothing$ 不能与含有单个元素"0"的集合 $\{0\}$ 相混淆；

(2)区别"$\in$"与"$\subseteq$"符号的使用.

2. 集合的运算

集合的并：设 A 和 B 是两个集合，所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的并集（简称并），记作 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$（如图 1-1）.

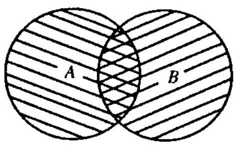


图 1-1

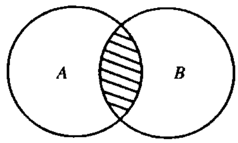


图 1-2

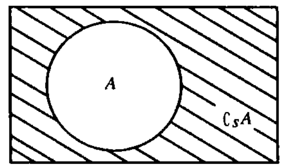


图 1-3

如：$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{2, 4, 6\}$，则 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$.

集合的交：设 A 和 B 是两个集合，所有属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的交集（简称交），记作 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$（如图 1-2）.

如：$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{2, 4, 6\}$，则 $A\cap B=\{2, 4\}$.

补集：设 S 为全集，由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合，称为集合在 S 中的补集，记为 $\complement_S A$，即 $\complement_S A=\{x\mid x\in S$ 且 $x\notin A\}$（如图 1-3）.

如：全集 $S=\{x\mid x<10$ 且 $x\in N\}$，$A=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$，则 $\complement_S A=\{6, 7, 8, 9\}$.

例 1 已知全集 $S=R$，集合 $A=\{x\mid |x-1|<3\}$，$B=\{x\mid x^2-x-6\geqslant 0\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$，$\complement_S A$.

解 因为 $A=\{x\mid |x-1|<3\}=\{x\mid -3<x-1<3\}=\{x\mid -2<x<4\}$

$B=\{x\mid x^2-x-6\geqslant 0\}=\{x\mid x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -2\}$

所以

$A\cup B=R$，

$A\cap B=\{x\mid -2<x<4\}\cap\{x\mid x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant 2\}=\{x\mid 3\leqslant x<4\}$，

$\complement_S A=\{x\mid x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 4\}$.

3. 区间

在讨论问题时，我们所用到的集合常常是实数 $\mathbf{R}$ 的一些子集，而这些子集可用区间来表示变量的取值范围.

设 $a, b\in R$ 且 $a<b$，那么

(1)满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合，称为闭区间，记作$[a, b]$（如图 1-4(a)），即

$$[a, b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

如：$[0, 3]=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 3\}$，$[-3, 2]=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 2\}$.

(2)满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合，称为开区间，记作(a, b)（如图 1-4(b)），即

$$(a, b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

如：$(-1, 2)=\{x\mid -1<x<2\}$，$(-8, -3)=\{x\mid -8<x<-3\}$.

(3)满足不等式 $a<x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合，称为半开区间，记作$(a, b]$（如图 1-4(c)），即：

$$(a, b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

类似地，有半开区间$[a,\ b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$（如图 1-4(d)）.

如：$(-5,\ 1]=\{x\mid -5<x\leqslant 1\}$，$[-5,\ 1)=\{x\mid -5\leqslant x<1\}$.

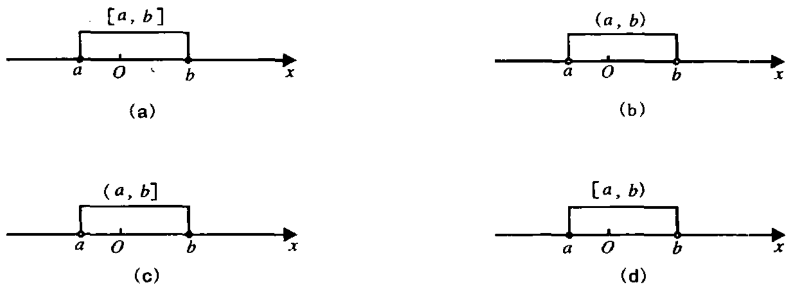


图 1-4

上述区间都以有限数 a、b 为端点，故称为有限区间，而 $b-a$ 称为区间的长度.

除了有限区间外，还有以下几类无限区间：

(1) $[a,\ +\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}=\{x\mid x\geqslant a\}$（如图 1-5(a)）

　　$(a,\ +\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\}=\{x\mid x<a\}$（如图 1-5(b)）

(2) $(-\infty,\ b]=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\}=\{x\mid x\geqslant b\}$（如图 1-5(c)）

　　$(-\infty,\ b)=\{x\mid -\infty<x<b\}=\{x\mid x<b\}$（如图 1-5(d)）

(3) $(-\infty,\ +\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}=R$

如：$(3,\ +\infty)=\{x\mid x>3\}$，$(-\infty,\ 3]=\{x\mid x\leqslant 3\}$.

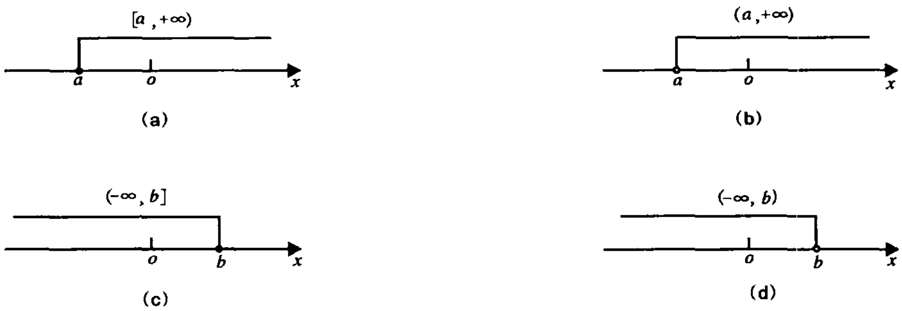


图 1-5

注意：“$-\infty$”、“$+\infty$”分别读作“负无穷大”和“正无穷大”，它们只是个记号，不是一个数.

4. 邻域

以点 x_0 为中心的任何开区间称为点 x_0 的**邻域**，记作 $U(x_0)$.

所谓点 x_0 的 δ 邻域，是指以点 x_0 为中心，以 $2\delta(\delta>0)$ 为长度的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$，记作 $U(x_0,\ \delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$（如图 1-6(a)）.

图 1-6

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

在 x_0 的 δ 邻域中去掉 x_0 所得集合记作 $\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)$，称为点 x_0 的 δ 去心邻域（如图 1-6(b)），

$$\overset{\circ}{U}(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}.$$

例如，$U(3,\ 0.5)=\{x\mid\ |x-3|<0.5\}$ 表示点 3 的 0.5 邻域，也可表示为开区间 (2.5，3.5).

$\overset{\circ}{U}(1,\ 0.25)=\{x\mid 0<|x-1|<0.25\}$ 表示点 1 的 0.25 去心邻域，也可用两个开区间的并表示为 $(0.75,\ 1)\cup(1,\ 1.25)$.

注意：$0<|x-x_0|$ 表示 $x\neq x_0$，即邻域内不含 x_0.

二、函数

1. 函数的有关概念

在研究、观察许多现象中，往往会碰到一些相互依赖的变量. 如某银行公布的整存整取利率表 1-1 如下：

表 1-1

时间	3 个月	6 个月	1 年	2 年	3 年	5 年
年利率(%)	1.71	1.98	2.25	2.73	3.33	3.60

时间和年利率都是变量，并且年利率是依赖于时间这个变量的，当存款的时间确定时，其存款的年利率就确定，变量间像这样的依赖关系，就是函数关系.

定义 1.1 设在某一个变化过程中有两个变量 x 和 y，且 x 的取值范围为非空集 D，如果对于 D 中的每一个值 x，按照一定的对应法则 f，变量 y 都有唯一确定的值与它对应，那么，就称 y 是 x 的函数，并记作：$y=f(x)$，$x\in D$.

其中 x 叫作**自变量**，y 叫做**因变量**或函数，自变量 x 的取值范围 D 叫做函数的定义域，记为 $D(f)$ 或 D；与 x 的值对应的 y 值叫做函数值，而函数值的集合叫作函数的值域，一般记作 $M(f)$ 或 M，即：$M=\{f(x)\mid x\in D\}$.

说明：(1)定义中的对应法则用 f 表示，但也可以用其他字母如 f，h，φ，F 等表示，不同的函数可用不同符号区分，如 $y=f(x)$，$y=g(x)$，$y=\varphi(x)$等.

(2)定义域和对应法则是确定函数的两个要素，只要定义域相同，且 f 代表同一对应法则，则 $y=f(x)$ 和 $u=f(v)$ 就是同一个函数，而与自变量和因变量用什么字母无关，例如，$y=\sin x$ 与 $u=\sin v$ 是同一个函数.

(3)如果 $x_0\in D$，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，函数 $f(x)$ 在 x_0 处的函数值记为 $y\big|_{x=x_0}$ 或者 $f(x_0)$，如果 $x_0\notin D$，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处无定义，在实际问题中，函数的定义域 $D(f)$ 还需要由实际意义来确定.

例 2 求函数 $f_1(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域，并与函数 $f_2(x)=x+1$ 比较，它们否表示同一函数？

解 $f_1(x)$ 的定义域是 $x\neq 1$ 的全体实数，即：$D(f_1)=\{x\mid x\neq 1,x\in R\}$；而 $f_2(x)$ 的定义域是 $\boldsymbol{R}$；由于两个函数的定义域不相同，所以 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 不表示同一函数.

例 3　已知函数 $f(x)=\frac{1}{1-x}$,求 $f(-1)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(\cos 2x)$，$f(f(x))$.

解　$f(-1)=\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$,

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$,

$f(\cos 2x)=\frac{1}{1-\cos 2x}=\frac{1}{1-(1-2\sin^2 x)}=\frac{1}{2\sin^2 x}=\frac{1}{2}\csc^2 x$,

$f(f(x))=f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=1-\frac{1}{x}\quad(x\neq 0)$.

2. 分段函数

表示函数的方法通常有公式法(解析法)、列表法和图示法三种.

用公式表示函数时，一般用一个式子表示一个函数，但有时需要用几个式子分段表示一个函数，即对于自变量不同的取值范围，函数采用不同的表达式，这种函数叫做**分段函数**.

例如：函数 $y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$ 及函数 $y=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 0\\ 1+x & x>0\end{cases}$ 都是分段函数，其图像分别如图 1-7 及图 1-8 所示.

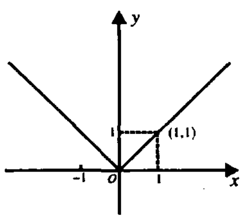


图 1-7

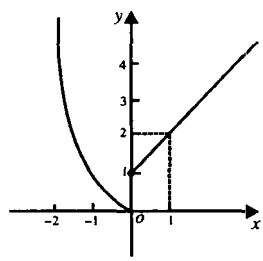


图 1-7

注意：(1)分段函数是用几个式表示一个函数，而不是几个函数；

(2)分段函数的定义域是各段自变量取值集合的并集.

例如：分段函数 $y=\begin{cases}2 & 0<x\leqslant 3\\ 0 & x=0\\ -1 & -2<x<0\end{cases}$ 的定义域是 $D(f)=(-2,3]$.

例 4　国内寄信函的收费标准如下表 1-2：

表 1-2

20 g 及 20 g 以下	0.80 元	60 g 以上至 80 g	3.20 元
40 g 以上至 40 g	1.60 元	80 g 以上至 100 g	4 元
40 g 以上至 60 g	2.40 元		

试求邮资与信函重量的函数关系式、定义域；当信函分别是 38 g 与 88 g 时，应付多少邮资？

分析　由表 1-2 知，信函在 5 个质量范围时，其收费标准是各不相同的，故需用分段函数表示.

解 设信函质量为 $x(g)$，邮资为 $f(x)$元，依题意，得

$$f(x)=\begin{cases}0.80 & 0<x\leqslant 20\\ 1.60 & 20<x\leqslant 40\\ 2.40 & 40<x\leqslant 60\\ 3.20 & 60<x\leqslant 80\\ 4 & 80<x\leqslant 100\end{cases}$$

其定义域为(0,100).

当信函为 36 g，应付的邮资是 $f(36)=1.60$(元)；

当信函为 85 g 时，应付的邮资是地$(85)=4$(元).

3. 显函数和隐函数

有些函数的因变量 y 可以用含自变量 x 的一个明显的表式表示，例如，$y=2x-3$，$y=\sqrt{1-x^2}$等等，这样的函数称为**显函数**，由函数 $y=2x-3$ 可得方程 $2x-y-3=0$，由函数 $y=\sqrt{1-x^2}$可得方程 $x^2+y^2=1$，所以方程也可以确定函数的关系.

用方程 $F(x,y)=0$ 的形式确定 y 是 x 的函数，称这种函数为**隐函数**. 例如，$3x+e^y-5=0$，$xy-5^y+1=0$，$e^{x+y}=\sin x$ 等等，有的隐函数可以化为显函数，如 $3x+y^3-5=0$ 中可解出 $y=\sqrt[3]{5-3x}$；但有些隐函数要化为显函数是困难的，甚至是不可能的.

习题 1.1

1. 用描述法表示下列集合：

(1)不小于 3 的所有自然数集合；

(2)抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=3x+4$ 的交点的集合；

(3)椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 内部(不含椭圆的边界)的一切点的集合；

(4)点 3 的去心$\frac{1}{2}$和邻域.

2. 用列举法表示下列集合：

(1)方程 $x^2+x-12=0$ 的根的集会；

(2)抛物线 $y^2=x$ 与 $y=x$ 的交点的集合；

(3)集合$\{x|0<|x-1|\leqslant 4$，且 $x\in Z\}$；

(4)方程 $3^{x-1}=\frac{1}{9}$的根的集合.

3. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\arcsin(x-5)$；　　(2) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$；

(3) $y=\frac{\sqrt{|x|-1}}{\ln(4-x)}$；　　(4) $y=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$.

4. 用区间表示适合下列不等式的变量 x 的变化范围：

(1) $2<x\leqslant 7$；　　(2) $|x|\leqslant 7$；

(2) $|x-3|<\frac{1}{10}$；　　　　(4) $|x|>10$；

(5) $0<|x-2|<0.01$.

5. 设 $x\in U(1,\delta)$时，$|2x-2|<\varepsilon$ 当 ε 分别小于 0.1 和 0.01 时，求邻域半径 δ 各等于多少.

6. 设 $U=R$，$A=\{x|2<x\leqslant 6\}$，$B=\{x|x>5\}$，求：

(1) $A\cap B$；　　(2) $A\cup B$；　　(3) $A\cup \complement_U B$.

7. 设函数 $f(x)=\sqrt{5+x^2}$，求下列函数值：

(1) $f(-2)$；　　　　(2) $f(\frac{1}{a})$ $(a\neq 0)$；

(3) $f(x_0)$；　　　　(4) $f(x_0+h)$.

8. 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\cos x| & |x|<\frac{\pi}{3}\\ 0 & |x|\geqslant\frac{\pi}{3}\end{cases}$，求 $\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right)$、$\varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right)$、$\varphi(-1)$.

§1.2　函数的几种特性与反函数

一、函数的几种特性

1. 函数的单调性

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$定义在区间(a,b)内，如果对于(a,b)内的任意两点都有 $x_1<x_2$ 都有

$$f(x_1)<f(x_2)\qquad [f(x_1)>f(x_2)]$$

成立，则称函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内是单调增加（单调减少）的. 函数在区间(a,b)内单调增加（单调减少）的性质，称为函数的**单调性**，而称区间(a,b)为**单调增加（单调减少）区间**.

函数 $y=f(x)$在(a,b)内单调增加，它的图像是一条从左下方向右上方伸展的曲线（如图 1-9(a)）；函数 $y=f(x)$在(a,b)内单调减少，它的图像是一条从左上方向右下方的伸展的曲线（如图 1-9(b)）.

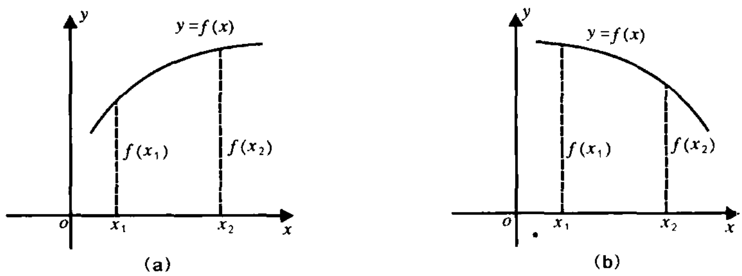


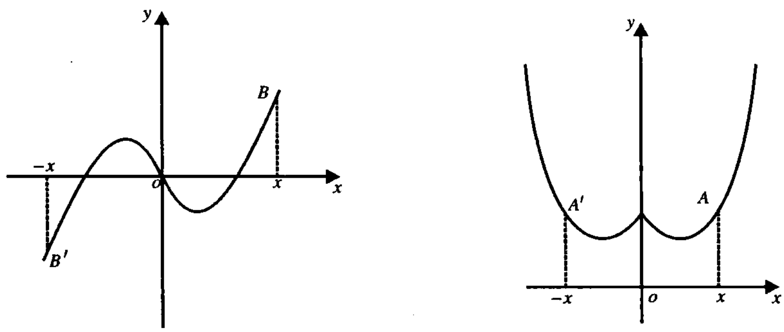
图 1-9

2. 函数的奇偶性

定义 1.3　设函数 $y=f(x)$的定义域 $D(f)$是关于原点 O 对称的数集，如果对于任意的 x

$\in D$ 都有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；如果对任意 $x\in D$ 都有 $f(-x)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

由上述的定义可知，奇函数的图像是关于原点对称(如图 1-10(a))，而偶函数的图像关于 y 轴对称(如图 1-10(b)).



(a)　　(b)

图 1-10

函数定义域 $D(f)$ 关于原点对称是函数具有奇偶性的必要条件，例如 $y=x^2$，$x\in R$ 是偶函数，但 $y=x^2$ 在$[-3,5]$内就是非奇非偶函数. 一般地，判断函数的奇偶性，可先求它的定义域 $D(f)$.

例 1　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^3+4x$　　(2) $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$　　(3) $f(x)=\frac{1}{x}-1$.

解　(1)因为 $f(x)=x^3+4x$ 的定义域是 $\boldsymbol{R}$，且

$$f(-x)=(-x)^3+4(-x)=-(x^3+4x)=f(x),$$

所以 $f(x)=x^3+4x$ 是奇函数.

(2)因为函数的定义域是 $\boldsymbol{R}$，且

$$f(-x)=\frac{1}{2}(e^{-x}+e^{-(-x)})=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=f(x),$$

所以 $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$是偶函数.

(3) 因为 $f(x)=\frac{1}{x}-1$ 的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且

$$f(-x)=\frac{1}{-x}-1\neq f(x)\text{且 } f(-x)\neq -f(x),$$

所以 $f(x)=\frac{1}{x}-1$ 既不是奇函数也不是偶函数.

例 2　讨论函数 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$的奇偶性：

解　因为 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$的定义域是 $\boldsymbol{R}$，且

$$\begin{aligned}f(-x)&=\ln(\sqrt{(-x)^2+1}-(-x))=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)\\&=\ln\left[\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+1)}{\sqrt{x^2+1}-x}\right]\\&=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)^{-1}\end{aligned}$$

$$=-\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=-f(x),$$

所以 $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$是奇函数.

3. 函数的周期性

定义 1.4　对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个常数 $T(T\neq 0)$，使得对于其定义域内的所有 x，都有 $f(x+T)=f(x)$成立，那么称函数 $y=f(x)$是**周期函数**，而称 T 为这个函数的周期，通常，我们把周期函数的最小正周期简称为周期.

例如函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 周期的周期函数；函数 $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 都是以 π 为周期的周期函数；而 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$和 $y=A(\cos\omega x+\varphi)$是以$\dfrac{2\pi}{\omega}$为周期的周期函数，周期函数 $f(x)$不一定存在最小正周期，如常数函数 $f(x)=c$(c 为常数)任何正数都是它的周期，而正数中没有最小的正数，所以它不存在最小正周期.

4. 函数的有界性

定义 1.5　对于定义在(a,b)内的函数 $y=f(x)$，如果存在一个正数 M，使得对于(a,b)内的所有 x，都有$|f(x)\leqslant M$成立，则称 $y=f(x)$在(a,b)内是有界的；如果这样的 M 不存在，则称 $y=f(x)$在(a,b)内是无界的.

从几何上来看，若函数 $y=f(x)$在(a,b)内有界，则函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内的图像总被夹在两条平行于 x 轴的直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间，如图 1-11 所示.

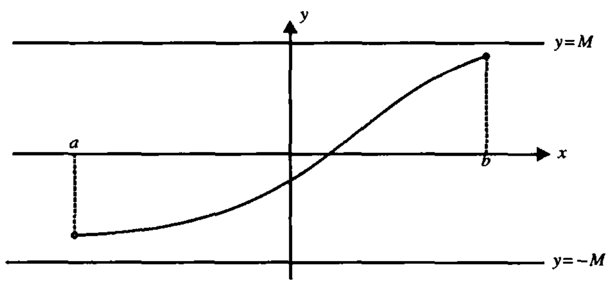


图 1-11

例如：函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内，对于任意的 x，恒有$|\sin x|\leqslant 1$，所以，函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的，而函数 $y=\dfrac{1}{x}$在$(0,2)$内是无界的，因为不存在这样的正数 M，使得$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$对于$(0,2)$内的所有 x 都成立；而同样的函数 $y=\dfrac{1}{x}$在$(1,2)$内是有界的，因为存在这样的正数 M(例如 $M=1$)，使得$\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$对于$(1,2)$内的所有 x 都成立.

二、反函数

在函数关系中，通常把 x 作为自变量，y 作为 x 的函数，但在实际问题中，并不是绝对的. 例如，圆的周长 y 是半径 x 的函数，即 $y=2\pi x$，但有时我们要根据周长 y 去确定半径 x，即半径 x 成了周长 y 的函数：$x=\dfrac{y}{2\pi}$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com