



数学方法论应用传播丛书

丛书主编 徐沥泉 徐鸿超

数学和谐美

Beauty of Harmonious in Mathematics



李雍 顾曼生 郁建辉 阮必胜 著

大连理工大学出版社 | DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS



数学方法论应用传播丛书

丛书主编 徐沥泉 徐鸿超

数学和谐美

Beauty of Harmonious in Mathematics



李雍 顾曼生 郁建辉 阮必胜 著

大连理工大学出版社 DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学和谐美/李雍等著. —大连:大连理工大学出版社,
2009.8

(数学方法论应用传播丛书)

ISBN 978-7-5611-5051-1

I. 数… II. 李… III. 数学:美学—研究 IV. O1-05

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 146194 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail: dutp@dutp. cn URL: <http://www.dutp.cn>

大连美跃彩色印刷有限公司印刷

大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm
2009 年 8 月第 1 版

印张:8.25 字数:158 千字
2009 年 8 月第 1 次印刷

责任编辑:王颖鑫

责任校对:晓 杰

封面设计:孙宝福

ISBN 978-7-5611-5051-1

定价:25.00 元



数学方法论应用传播丛书

编写委员会

丛书顾问(按姓氏笔画排序)

王梓坤 刘绍学 周春荔 林夏水

丛书主编 徐沥泉 徐鸿超

执行主编 唐志华

委员(按姓氏笔画排序)

于世章	王民珠	王光明	朱恒杰
何万生	吴勤文	杨世明	杨冠夏
陈安宁	陈远刚	周公贤	周家禧
徐献卿	袁 渊	郭 璋	顾晓华
储东花	谢 祥	裴光亚	

“数学方法论应用传播丛书”题词

推广数学方法论二十年

徐利治

2009年8月于大连

总 序

“太湖烟波碧沉沉 渤海嗒淋^①沁人心。”

由大连理工大学出版社出版的“数学方法论应用传播丛书”，与读者见面了。这是我国数学科学与数学教育文库百花园中的一簇奇葩。

先让我们扼要地回顾一下这套丛书的由来。

1987年8月，无锡市的数学老师应邀出席了由大连理工大学应用数学研究所主办的“全国数学方法论和数学史学术研讨会”。在此期间，一连六天，我国著名数学家徐利治教授作了关于“数学方法论和G·波利亚数学教育思想”的系列讲座。尔后，无锡市的老师又出席了由周春荔先生、杨世明先生在首都师范大学主持召开的“全国首届波利亚数学教育思想学术研讨会”。

返锡后，他们在时任无锡市教育局局长周稽裘先生的亲自部署和直接领导下，在无锡市原教研室主任、特级教师李永灿先生的支持与指导下，成立了无锡市MM(Mathematical Methodology)课

① “大连”原本是满语中“嗒淋”的译音，本意是“海滨”之意。

题组. 教育行政部门组织和协调市教育科学研究所、市教研室和江南大学·教育学院等各方面的研究力量,“强强联合”协作攻关,设计出“贯彻数学方法论的教育方式,全面提高学生素质”的数学教育实验(简称 MM 实验)课题. 从此,在中国无锡市正式拉开了把数学方法论和波利亚数学教育思想直接应用于数学教育教学实践的序幕.

此后,在时任江苏省教委主任袁相碗教授、副主任周稽裘先生的关心支持下,在无锡市教委主任林建坤先生的直接参与和领导下,MM 课题先后列入江苏省教育科研“八五、九五”重点项目和国家教委“八五规划”项目.

经过 5 年实验,证明 MM 教育方式不仅减轻了师生的负担,而且提高了老师的数学水平和教学水平,从而提高了教学质量. 因此,它于 1994 年通过了受江苏省教委委托,由王梓坤院士、徐利治教授组成的专家组的鉴定,并获得高度好评.

MM 实验从设计到确立为一种教育方式(MM 教育方式),并且推广到全国十几个省、市、自治区,迄今已经整整 20 年. 这其中倾注了设计者、实验者、推广者的大量心血. 当年参加实验和推广的老师已经陆续退休了,而且随着年龄的增长,他们将无法到全国各地亲自指导和推广 MM 实验. 这就提出一个问题:如何使 MM 实验继续推广下去,使 MM 教育方式世代相传,并且随着时代的发展而不断发展?

当然,作为实验,已经出版过两本教材:杨世明、周春荔、徐沥泉等著的《MM 教育方式:理论与实践》(2002 年)和徐沥泉著的《教学·研究·发现——MM 方式演绎》(2003 年). 不过,MM 实

验需要具备一定的条件,这就使得它的传播带有一定的局限性.特别是对于不具备实验条件,又希望在数学教学中贯彻 MM 教育方式的一些重要教育思想和教学方法的老师来说,则需要一部能概括 MM 实验、MM 教育方式的普及书.因此,我在 2006 年于新疆召开的数学科学方法论研究交流中心理事会上提议:撰写一部“MM 教育方式”雅俗共赏的书籍.

现在,我国各地 MM 实验点一线教师,以及热心于数学方法论的理论传播和应用研究的大、中、小学数学教师 and 教学研究人员集思广益,共同努力,分工协作撰写的“数学方法论应用传播丛书”,终于正式出版了.她比我原先设想的 MM 教育方式普及性书籍能更全面地传播数学科学,传播数学方法论,传播数学文化,传播数学的精髓.是一套让人走进数学,理解数学,鉴赏数学,品味数学,直到热爱数学和应用数学,宣传数学思想方法的高级科普读物.

丛书作者的知识结构、年龄结构合理,在丛书写作方面具有最佳的主体结构.作者的年龄跨度从 33 岁至 89 岁,这是少见的,也是十分可喜的.我国一批著名数学家、科学家都十分关心和支持数学方法论的研究与普及工作,关心数学科普作品的撰写与出版.王梓坤教授的《科学发现纵横谈》一书,就给我们如何撰写科普著作做出了榜样.该书对从事理科和文科工作的同志都起到了很好的教育作用.本套丛书的作者也认真学习和尝试了这种风韵.

值此 MM 课题实施 20 周年之际,王梓坤院士和刘绍学教授等又为 MM 实验纪念活动,为本套丛书的出版发来了热情洋溢的贺词与贺信.年届 90 的徐利治教授亲自撰写有关 MM 教育方式

的论文和《MM 教育方式:理论与实践》一书的序言。“天下士非一方之士,人伦师乃万世之师。”他们为本套丛书留下了珍贵的作品和墨宝,他们的思想在这套丛书中得以充分体现,以飨读者. 作为一名数学哲学工作者,看到这些著名数学家和科学家为数学科普工作付出的辛劳,我感到由衷的欣慰.

丛书共有八本专著和一本编著.《源于教学·高于教学——MM 方式演绎》一书,是《教学·研究·发现——MM 方式演绎》(科学出版社,2003 年 3 月)的姊妹篇,其中收录了全国各实验点 70 余位老师的专题论文、研究报告、教学设计和教学实录. 他们之中有著名学者,大学教授、副教授、讲师和初出茅庐的博士、硕士;有中、小学的特级教师、高级教师;有享受国家和地方政府特殊津贴的专家,全国模范教师、先进教师和科技拔尖人才.

《合情推理趣引》、《数学——直觉与逻辑的交响乐》、《数学和谐美》等著作,揭示和展现了数学发现和发明过程中直觉思维、形象思维和逻辑思维交融的旋律. 数学和文学、数学和艺术都是相通的.

数学是研究抽象事物的,它的抽象性保证了其应用的广泛性. 如何教育学生从具体事物中抽象出数学问题?《学会抽象与建模》一书的许多数学模型都是从日常生活中以及我们身边的例子提炼(抽象)出来的,有一部分是中学数学课堂教学的实例,还有一部分是由中学生从自己周围的具体事例中抽象概括出来的数学模型和他们的获奖作品,颇具特色,也有一定的应用价值. 学会抽象与建模应该成为学习数学的一种技能.

数学教育是人类的一件大事. 古往今来,许许多多数学家、教

育家、教师和数学教育工作者，一直在“摸着石头过河”。怎样摸得更好？怎样避免陷入泥潭？记得一位伟人说过：“人类总得不断地总结经验，有所发现，有所发明，有所创造，有所前进。”那么，《数学·教学·哲学》和《世纪婚约——哲学与数学教育联姻的实践与思考》这两部著作将给我们带来深刻的启迪与思考。它将帮助我们回答数学的本质是什么，数学教育和数学教学的本质又是什么，在数学教学中怎样提高学生的一般科学素养，增进社会文化修养，形成和发展数学品质，从而全面提高学生的素质。

一个好的数学教师，他的任务是帮助学生了解数学文化、喜爱数学文化、陶醉于数学文化，进而让学生学会用数学家的思维方式思考问题、解决问题。正如波利亚所说，让处于性格极易改变的青少年时期的学生，养成善思的好习惯，从而改变他们一生的命运。《从喜欢到入迷——学好数学的秘密》一书的作者将以自己的亲身经历说明如何用以上思想来教育学生，让学生从害怕数学、讨厌数学的困境中解脱出来，从而热爱数学，迷恋数学。从一二十分到全年级前三名，一些看来是神话般的例子，确实是现实的，关键是要真正地理解数学及其教学方法。

《数学思想赏析》一书内容丰富、内涵深刻，作者居高临下，又深入浅出，可供非数学专业的读者领略和赏析数学美，学到一定的数学常识、数学知识、典型的数学思想与方法；也可供爱好数学和数学专业的读者在茶余饭后分享与品味作者精心设计与制作的数学实例。它会引起具有较好数学基础和具备较高数学素养的读者的共鸣。

总之，本套丛书是具有数学科学方法论特色、兼具鉴赏性和教

材性的数学专题科普著作.同时,她又沟通了文理科学,内容丰富,事例翔实,起点有高有低,读者可各取所需,适合于广大数学爱好者阅读.

“数学方法论应用传播丛书”的宗旨是:走进数学,理解数学,养成数学思维,欣赏数学的美;品味数学,启迪心智,增强数学修养,弘扬数学文化.我们要提倡、鼓励和采取有效机制让学习和从事文科的人们读一点自然科学的科普读物;学习和从事理科(含数学)的人们阅读和鉴赏一些文学、艺术名著.开阔思路,从事跨学科的研究工作,把各自的思维活动发挥得淋漓尽致,不断地实现科学研究中的发明和发现.

林夏水

2009年2月15日

前 言

有一本数学科普名著,书名叫《数学欣赏》,系德国籍数学家汉斯·拉德梅彻(Hans Rademacher)和奥托·托普利茨(Otto Toeplitz,1881—1940)所著(有中译本,左平译,北京出版社,1981年),其中介绍了素数序列、集合论、四色问题、欧拉关于素数无限性的证明等 28 个片断.从数学知识而论,它们仅仅是数学科学这个汪洋大海中绽放出来的几滴水花.然而,它们却是两位作者,准确地说,应该是两位数学大家,因为后一位作者,奥托·托普利茨,正是早年在哥廷根时就作为大卫·希尔伯特的弟子而开始其学术生涯的.因此,这些看起来似乎毫不起眼的短篇,一旦到了他们的手上,却已成为“他们偶然地离开了他们深刻的理论成果的领域,从简单的开端出发,制作出的一件件小型独立的艺术作品,即短篇数学杰作.”

那么,为什么我们要在此说些似乎与本书无关的话?原因有二:其一,作者的学识和水平不可能与上述两位数学大师相提并论,因此,希望读者对书中的错漏之处予以谅解,当然,欢迎批评指正;其二,在写作本书之前,也查阅、参考与仔细探讨了许许多多的

数学书籍,尤其是数学科普读物,包括像《数学欣赏》这样的名著.力求能够做到“兼收并蓄,博采众长”.作者都是中学老师,也曾兼任些大学数学课程.长期的数学教学实践和教学研究工作使我们认识到,中学生和大学生需要什么样的课外读物.

因此,我们的出发点是要寻找其共性的一面,使我们的作品既可在宏观上供读者阅读鉴赏,又可在微观上供读者进一步学习,学到一些实用的数学方法和知识.因此,书中所提供的一些例子既是普通的、实用的、典型的,读者耳熟能详的数学知识和方法,又是经过作者尽力加工、创作、编制出来的.比如,在讲到美丽的正态分布时,穿插了有关实对称矩阵等预备知识,这些知识是必要的,也同样具有美学价值和鉴赏性质;在讲到射影几何中美妙的笛沙格对偶定理的证明(代数证明、交比证明、几何证明)与应用之前,先回顾了角平分线定理和正弦定理等,作好必要的铺垫.这样,只要具备了中学数学知识,读者就可以边欣赏边进一步学到更多的数学知识和方法了.

本书不同于一般的数学科普读物.书中所引述的故事、史料、趣闻轶事都围绕着数学知识来展开,不离开数学本身的精髓.因此,它也可以引起具有较好数学基础和具备较高数学素养读者的共鸣.作者的目标是把它写成具有数学科学方法论特色、兼具鉴赏性和教材性的数学专题科普著作.

本书分上下两篇.上篇为漫谈数学和,下篇为赏析和谐美.各章节都可独立成文,同时也有一定的连贯性.可以说上篇是数学和谐美的“理论”基础,数学和从算术和、代数到图形和、几何和、级数和与广义积分等.下篇从我国古代的太极图、河图、洛书、幻方等

所包含的数学古典和谐美谈起,相继展示了杨辉三角、笛沙格定理、正态分布等所蕴含的典型的数学美学思想与方法,其重点是对称、对偶与和谐.

最后,通过运用洛必达法则求未定型的极限,用留数定理求奇异积分,最终达到化奇异为和谐的典型例子,以及分形等对自然界和人类社会所起的作用,揭示这些超常美的数学思想方法和工具所表现出来的数学不可抗拒的魅力.

本书的宗旨是介绍数学知识,传播数学方法,领悟数学思想,鉴赏数学美妙.同时,沟通文理科学,提炼和挖掘文学艺术中蕴含的数学思想,揭示和展现存在于数学发现和发明过程中直觉思维、形象思维和逻辑思维交融的旋律.数学和文学艺术是相通的,这就是数学的和谐美.

作 者

2009 年 8 月

目 录

上篇 漫话数学和	1
1.0 探索广义和的文化	2
1.1 欣赏算术和的珍品	7
1.2 闯荡代数和的空间	19
1.3 铸造图形和的完美	34
1.4 寻觅无限和的踪迹	46
1.5 把握数学和的韵律	59
下篇 赏析和谐美	74
2.0 数学和谐美赏析开篇	75
2.1 好玩的幻方,智力的乐园	79
2.2 L. Collatz's 分割的美学特征与古典和谐美 ——来自《易经》的太极符号与六爻	97
2.3 杨辉三角	120
2.4 笛沙格定理妙不可言	142
2.5 美丽的正态分布	171
2.6 化奇异为和谐——奇异美与和谐美的对立统一	210

上篇 漫话数学和



昭君出塞图

1.0 探索广义和的文化

美就是和谐,整个天体是一种和谐,宇宙的和谐是由数组成的,因而构成了整个宇宙的美.

——毕达哥拉斯

1.0.1 和合文化

在文化、科技各个方面,“和”扮演着出色、成功的主角.

中华“和”的理念、和合文化源远流长,且不同于其现代的意义,比其现代的意义更为宽广、深刻.在《辞源》里“和”就有“调”、“顺”、“谐”、“合”等多重释义,可见“和”在传统思维中是一个十分重要但又常为人所忽视的范畴.“和”,从广泛的字义上讲,就有和合、和平、和美、和顺、和悦、和煦、和善、和气、和声,亲和、平和、温和、祥和、晴和,和衷共济、和睦相处等等,都是相安、谐调、融洽、美好的词汇.这种“和”,不妨称为广义和,以区别数学中几个数相加的结果得到的和.



书法 米南阳

妙手七得 字中藏鸽

中国古代先哲们通过对天、地、自然界、人类社会普遍存在