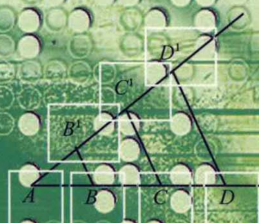
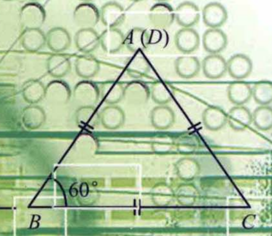
系统性的学术和基础理论

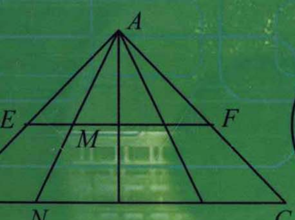
广泛适合于各院校在校生、数学爱好者、
组织管理、数理逻辑及系统科学研究人员等。

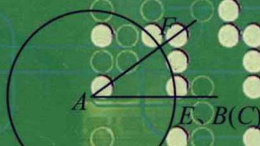
点系论

钱春光　著









- 计数与序数
- 代数基数原
- 几何基数原理
- 点的广义性
- 实数理论
- 数轴原理
- 微分学原理
- 悖论证明

西安地图出版社

点　系　论

DIAN　XI　LUN

钱春光　著

西安地图出版社

图书在版编目(CIP)数据

点系论/钱春光著.—西安:西安地图出版社,2008.1

ISBN 978-7-80748-222-2

Ⅰ.点…　Ⅱ.钱…　Ⅲ.数学—研究　Ⅳ.01

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 004892 号

点系论

作　　者:钱春光

出版发行:西安地图出版社

地　　址:西安市友谊东路 334 号

邮　　编:710054

经　　销:新华书店

印　　刷:北京嘉业印刷厂

开　　本:850mm×1168mm　　1/32

印　　张:5.5

字　　数:136 千字

版　　次:2008 年 1 月第 1 版

印　　次:2008 年 1 月第 1 次印刷

印　　数:0001—1000

书　　号:ISBN 978-7-80748-222-2

定　　价:22.00 元

[**内容提要**]本书是关于数学的具有原创的、系统性的学术和基础理论的著作.数学发展至今尚未对 $1-0.\dot{9}$ 给出算术答案,本书通过等式 $1-0.\dot{9}=0.\dot{0}1$ 给出算术答案.定义了点基数 $0.\dot{0}1$ 概念,进一步推进解析几何的统一,从而建立一个新的泛共性的数学分支——点系论.接着运用点系论对数的基极、实数理论、微积分原理、悖论证明、广义线性、系统科学等关于数学历史及应用问题进行阐释.

本书主题统一而又数理结合,结构简明而又层层推进,推理论证严谨而又朴实易懂,内容历史继承性强而又涉及学科面广,广泛适用于各院校在校生,数学爱好者,组织管理、数理逻辑及系统科学研究人员等.

前　言

陈省身："了解历史的变化是了解这门科学的一个步骤."无穷是数学的中心问题，也是数学史中最精彩的华章. 无穷观（论）是关于无穷的系统理论，例如无穷观将无穷分为潜无穷、实无穷，又分为无穷小、无穷大等等. 古希腊人最先认识到无穷是数学的中心问题，但是由于古希腊人仅承认潜无穷观，而最终未将无穷观（论）纳入其数学系统，使得微积分学至近现代才创立并发展.

在无穷观的历史发展过程中，无穷观也形成了至今不能解决的无穷问题——无穷悖论. 举例如下：

第一，古希腊几何学中的两平分线段作图. 按照平分作图法可以在线段上作出中点，试问位于线段上的这个中点到底在左半线段上，还是在右半线段上，或者这个中点不在线段上而将线段两平分？所以古希腊线段平分作图法尚未解决端点分配问题.

第二，在平面几何中直线上的两条线段相加，等式 $AB+BC=AC$ 成立，在等式中点 B 使用了二次，那么在解析几何中怎么表示？从而牵涉到解析几何中点的解析定义，即点的解析统一，这也是机器证明的基础.

第三，没有与零之间的关系. 当两者进行逻辑判断形式化时是等同关系，此时两者仅说明结果而不能说明原因、条件、过程等；当面临问题没有直接工具而使用替代工具进行解决时，两者不是等同关系，此时两者可以说明原因、条件、过程等. 没有是广义的，零是狭义的是两者之间的关系，所以两者有不同的定数表示形式. 注：此处的没有指广义零.

第四，古希腊人的无穷观将无穷区分为为潜无穷、实无穷后，仅承认潜无穷观；其后存在一以贯之的潜无穷观继承者，直至康托的实无穷理论创立，但到目前仍未建立潜、实无穷的系统理论.

由此产生无穷多个形形色色的无穷悖论，其关键问题是点的定数是多少，再者能否对点 0(x)的定数进行算术运算.

第五，“第二次数学危机”中，矛盾集中在牛顿、莱布尼茨赖以建立微积分学科的基础——无穷小量上.柯西的“要多小有多小”和魏尔特拉斯的“任意小的正数 ε”没有定义无穷小究竟是实无穷小还是潜无穷小.由于这种无穷小没有严格的逻辑基础而使一些概念陷于混乱，其关键问题仍然是 0(x)的定数是多少.正是因为无穷小是高等数学的基础，所以可见高等数学的基础是不牢固的，等等.

无穷问题就是无穷的定数问题，例如古希腊的原子观、文艺复兴的不可分量、牛顿和莱布尼茨的无穷小分析、柯西和魏尔斯特拉斯的分析批判运动、康托的实无穷理论等，均试图对无穷的大小值进行定数.无穷的定数问题采用数学模型来表示为求解 $1-0.\dot{9}$的算术答案，本书对 $1-0.\dot{9}$ 的求解分为算术答案、代数答案和几何答案三种，其中数学发展至今未给出 $1-0.\dot{9}$ 的算术答案.例如，康托在其对角线论证中将 0.5 之类的分数用等价分数 $0.4\dot{9}$ 代替，柯西用形式语言说明无限小不再是一个固定数，魏尔斯特拉斯用代量 ε 代替柯西的无限小的数等等.本书通过代数、几何两方面推证给出 $1-0.\dot{9}=0.\dot{0}1$ 的算术答案，从而定义了点基数及其点基数原理，并在此基础上进一步推进解析几何的统一，最终建立了一个泛共性的数学分支——点系论.所以本书是关于数学的具有原创的学术和基础理论的著作.本书首先介绍了点系论将点作为一个系统进行分析；接着运用点系论的观点，对古希腊平分作图法、数的基极、实数理论、微积分原理、悖论证明、广义线性、系统科学等关于数学历史及应用问题进行阐释.所以本书是关于数学的具有历史、整体的系统性学术和基础理论的著作.

维纳在《论笛沙格及帕普斯定理的作用》中提出：“我们必定可以用桌子、椅子、啤酒杯来代替点、线、面.”已经为我们指明了一条前进的道路，本文可以看做是对维纳的注解.本书涉及的主

要是基础内容，如微积分原理、系统科学等，所以广泛适用于各院校在校生，数学爱好者，组织管理、数理逻辑及系统科学研究人员等.

本书是关于数学的原创的、系统性的学术和基础理论著作，是对数学的中心问题所进行的尝试性突破并加以总结. 书中存在部分创新、假设、推论之处，所以疏漏、简论、错误之处也在所难免，这也与一己之见识与能力、创新与决断、编写与贯通、时间与恒心等有关，希望大家指正并予以谅解. 现将一己研究之论出版，希望能够抛砖引玉、辨析总结、共同进步. 同时为帮助阅读理解或感性认识方便，特在本书末附录部分相关知识以供查阅. 是为前言.

钱春光

2007 年 10 月 9 日

目 录

第 1 章　计数与序数

1.1　计数

人类数学的起源是计数，如结绳、刻痕等，伴随着计数而产生并发展的是记数．进而人类在数的直觉上创立了初等算术与算法，在形的直觉上创立了应用算术的初等几何，以后人类数学一直伴随着人类文明进入到近现代高等（变量）数学阶段．

计数是统计数量的多少，序数是计数的抽象，计数的实质是序数即一进制．序数分为全计数（包括零）、计数数（不包括零）两种．记数是计数的记录，是根据实际所需采用的各种进制法以及科学计数法等（见表 1—1）．注：①计数是一种自然属性，而自然数集 $\mathbf{N}$、正整数集 $\mathbf{Z}^+$ 仅是全计数、计数数的一种形式；②进制是任意的，如外币汇率（钱钱交换）、交易单价（钱货交换）、物物比价（货货交换）等等；③本文采用十进制分析，其他处无特别说明均如此．

表 1—1

计数	记进制	一进制	二进制	十进制
无	桌子	无	无	无
原点	椅子	0	0	0
·	笔	1	1	1
· ·	纸	11	10	2
· · ·	电脑	111	11	3
· · · ·	台灯	1111	100	4
· · · · ·	杯子	11111	101	5
…	…	…	…	…

1.2 序数

序数是计数的抽象，有三种基本状态：第一种离散序数，如结绳的结与结之间存在间隔；第二种连续序数，如石子紧靠排列无间隔；第三种同体序数，如以进制为基数单位的双、打、堆、箱等. 注，①《中华人民共和国国家标准》(GB3100～3102 93)、《量和单位》规定：自然数包括 0；②序数基数取值与所选状态有关，简称为序离、序连、序同等（见表 1－2). 下面两章将分别从代数、几何上找出所选状态的基数原理.

表 1—2

序数	序数集 X	实例	实例基数
离散	$0\eta,1\eta,2\eta,3\eta,\cdots$	自然数集 N	$\eta=1$
连续	$0\eta,1\eta,2\eta,3\eta,\cdots$	[0,1]区间数集	$\eta=0.\dot{0}1$
同体	$0\eta,1\eta,2\eta,3\eta,\cdots$	$0.\dot{0}1$ 点自身集	$\eta=0.\dot{0}.\dot{0}1$

1.3 科学记数法

为了便于书写非常大或非常小的数 n，而它本身只能表示一个足够大或小的有限可数数却不能表示一个无穷大或小数，阿基米德《数沙者》：“很多人确信沙粒是无数的，另一些人认为尽管沙粒的数目不是无限的，但是人们无法指出一个比沙粒数目更大的数，但是我试图向您证明，在我已经说出的数字中，有一些数的大小超过了地球，甚至比宇宙还大的一堆沙子的沙粒数目.”

第 2 章　代数基数原理

2.1　基数原理——基用基数 $0.\dot{0}1(\varepsilon)$

$$0.\dot{9}+0.\dot{9}=0.\dot{9}\times 2=1.999\Lambda 8=1.\dot{9}8 \tag{1}$$

$$1.\dot{9}-(1)=1.\dot{9}-1.\dot{9}8=0.1^{\infty}=0.\dot{0}1=\varepsilon \tag{2}$$

$$1-0.\dot{3}\times 3=1-0.\dot{9}=0.1^{\infty}=0.\dot{0}1=\varepsilon \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 0}x=0\pm 0(0),\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=0.\dot{0}1^{-1}=\infty \tag{4}$$

$$\lim_{x\to\infty}0.1^{n}=0\pm 0(\dot{9}),\infty=\dot{9} \tag{5}$$

定义一：基元基数指 0，基本基数指 1，基用基数指 $0.\dot{0}1$（用 ε 表示）；基数指基本基数 1 乘或连除基用基数 $0.\dot{0}1$ 的解 $A=0.\dot{0}1^{\pm n},n\in\mathbf{N}$；基数集指基数的集合 $A=\{x\mid x\in 0.\dot{0}1^{\pm n},n\in\mathbf{N}\}$；数指基本和基用基数经有限次四则运算和复合步骤所构成并能用单一基数形式表示. 数分为两种：第一种是不跨基极数，如 76，$0.\dot{2}$，$0.\dot{0}.\dot{3}4$ 等；第二种是跨基极数，如 $4.\dot{6}$：$4.\dot{8}.5\dot{0}8$ 等.

2.2　基极原理——基本基极$[0,1](\varphi)$

$$(1+0.\dot{9})\div 2+0.\dot{3}\times 0.\dot{0}1=0.\dot{9}.5+0.\dot{0}.\dot{3}=0.\dot{9}.8\dot{3} \tag{6}$$

$$(0,1)=[0.\dot{0}1,0.\dot{9}]、(0,1]=[0.\dot{0}1,1]、[0,1]=\varphi \tag{7}$$

$$[0,+\infty)=[0,\dot{9})、[0,+\infty]=[0,\dot{9}]、[0,+\infty+1]=[0,\dot{9}+1] \tag{8}$$

$$1\div(2)=1\div 0.1^{\infty}=1\div 0.\dot{0}1=1\div\varepsilon=\dot{9}+1=1.\dot{0}(\varphi+1) \tag{9}$$

$$\frac{0}{0}=[-\infty,+\infty]|_{y=0}、\frac{n}{0}=[-\infty,+\infty]|_{y=n} \tag{10}$$

定义二:线性基极(或连续基极)指数轴($-\infty$,$+\infty$)的区间;基本线性基极指数轴中的[0,1]区间,简称基本基极指数轴的单位长度,用$\overset{0}{\underset{1}{\infty}}$表示(字形为上 0 下 1 中$\infty$,读界 jiè);基极指基元基数 0 与任意基数 $0.\dot{0}1^{\pm n}$ 且间隔为 $0.\dot{0}1^{\pm n+1}$ 的区间(见表 2—3).区间指任意两数所表示起止的区域.注:①以上采用基极或基集相同,基集偏用于代数,基极偏用于几何;②两小数点间的位数是无穷有界的,两数运算位置一一对应;③超出基本基极的不跨基极的数集,可采用升高或降低基本基极记录法记录,表示为 $a(\overset{0}{\underset{1}{\infty}}\pm n)$,当 $0\leqslant|a|\leqslant1$ 且 $n=-1$ 为点基数集 A,当 $0\leqslant|a|\leqslant1$ 且 $n=0$ 为基本基集$\overset{0}{\underset{1}{\infty}}$,当 $0\leqslant|a|\leqslant1$ 且 $n=1$ 为自然数集 **N** 等.

表 2—3

基极起点	基极终点	基数间隔
…	…	…
0	$0.\dot{0}1^{-1}=1\dot{0}$	$0.\dot{0}1^{0}=1$
0	$0.\dot{0}1^{1}=1$	$0.\dot{0}1^{1}=0.\dot{0}1$
0	$0.\dot{0}1^{1}=0.\dot{0}1$	$0.\dot{0}1^{2}=0.\dot{0}.\dot{0}1$
…	…	…

第 3 章　几何基数原理

3.1　古希腊线段平分作图法的未完全平分原理

（古希腊线段平分作图法的未完全平分原理如图 1 所示 AD 段）

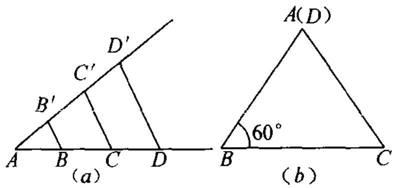


图 1

证明：反证法. 线段 AD 的几何区间是 $[A,D]$，则线段 AD 三平分即是几何区间 $[A,D]$ 三平分. 由古希腊平分作图法（见图 1）可知：区间 $[A,D]$ 三平分若表示为 $[A,B]=[B,C]=[C,D]$ 则存在共用点 B,C；区间 $[A,D]$ 三平分若表示为 $[A,B)=[B,C)=[C,D)$ 则存在唯一不包括的点 D，即 $[A,D]=[A,B)+[B,C]+[C,D]+\{D\}$，所以只能完全平分 $[A,D)$ 而不能完全平分 $[A,D]$，与线段 AD 平分矛盾，得证.

几何平分分析：第一种线段 $[A,D)$ 完全平分，则线段 $[A,D)$ 构成等边 $\triangle ABC$ 即点 A,D 重合（见上图），则在等边 $\triangle ABC$ 中 $[A,B]=[B,C]=[C,A]$ 且 $[A,B)=[B,C)=[C,A)$，即三边三顶点全部完全平分；第二种线段 $[A,D]$ 存在一点未分（或共用 2 点），即古希腊线段三平分作图法；第三种线段 (A,D) 存在二点未分（或共用 1 点），如共点夹角互为 120° 的三线段或其球棍模型等.

代数平分分析：等分线段 AD 视为基本基极区间内连续序数

的三种等分分析.第一种在基本基极[0,1]中,最大序连区间等分是(0,1),即线段 AD 所表示的代数区间是(0,1);第二种在基本基极[0,1]中,最大计数数序连区间等分,即线段 AD 所表示的代数区间为(0,1],存在一点 1 未进入平分,代数式为(0,1]−(0,1)={1};第三种在基本基极[0,1]中最大全计数数序连区间等分,即线段 AD 所表示的代数区间为[0,1],存在两点 0,1 未进入平分,代数式为[0,1]−(0,1)={0,1}.

结论一:古希腊平分作图法的未完全平分原理,在未进行具体分析的情况下,几何上辅助线借用了终点 D' 从而使原线段终点 D 未进入平分.由几何作图可知 $[A,D]-[A,D)=\{D\}$,代数位置表示(0,1)−(0,1)={1},算术求解表示 $1-0.\dot{9}=0.\dot{0}1$,这样终点基数表示为 $0(D)=0(1)=0.\dot{0}1$,此点即是未完全平分点的无穷小点,也就是文艺复兴时期数学定义中组成线段的“不可分量”——点.换言之,古希腊线段平分作图法尚未解决端点分配问题.注:①此结论处线段 AD 假设的代数区间是(0,1],具体分析的情况见下解;②此结论处 $\{D\}$ 是几何答案,{1}是代数答案,$0.\dot{0}1$ 是算术答案.

3.2 线段在区间[0,1]进行 $n=2$ 平分作图的最大化几何、代数分析(图中 AC 段)

第一种奇数情况,线段 AC 的几何与代数区间表示 $[A,C]=[0,1]$ 进行两平分,则存在独立中间点 $B=(0+1)\div 2=0.5$,代数平分表示为[0,0.5)=(0.5,1]或[0,0.5]=[0.5,1],其几何表示为 $[A,B)=(B,C]$ 或 $[A,B]=[B,C]$,即中间点 $B=0.5$ 只能共同使用或不共同使用.现将线段 AC 的几何与代数区间表示为 $[A,C]=[0,1]$ 进行完全平分,首先对中间点 $B=0.5$ 进行基数平分 $0.\dot{0}1\div 2=0.\dot{0}.5$,然后点 B 左右区间各增加 $0.\dot{0}.5$,代数表示为 $[0,0.5]^{1}_{2}[0.5,1]$ 即 $[0,0.4\dot{9}.5]=[0.5\dot{0}.5,1]$,其几何表示记为 $[A,B]^{1}_{2}[B,C]$.原理:辅助线的中间点 B 加以平分利用.

第二种偶数情况，线段 AC 的几何与代数区间表示 $[A,C]=[0,1)$ 进行两平分，则存在余数中间点 $B=(0+0.\dot{9})\div 2=0.4\dot{9}+0.\dot{0}5$，代数表示为 $[0,0.5)=[0.5,1)$ 即 $[0,0.4\dot{9}]=[0.5,0.\dot{9}]$，其几何表示记为 $[A,B-0.\dot{0}5]=[B+0.\dot{0}5,C]$. 原理：辅助线的中间点 B 是 $0.4\dot{9}$ 与 0.5 两点的相切处，即 $0.4\dot{9}-0=0.\dot{9}-0.5$.

3.3　线段在区间[0,1]进行 $n=3$ 平分作图的最大化几何、代数分析(图中 *AD* 段)

线段 $n=3$ 平分具体分析：第一种完全平分，即线段 AD 的几何与代数区间表示 $[A,D]=(0,1)=[0.\dot{0}1,0.\dot{9}]$ 进行三等分，几何表示为 $[A,B][B+0.\dot{0}1,C][C+0.\dot{0}1,D]$，代数表示为 $[0.\dot{0}1,0.\dot{3}][0.\dot{3}4,0.\dot{6}][0.\dot{6}7,0.\dot{9}]$，其中端点 $B=0.\dot{9}\div 3\times 1=0.\dot{3}$，$C=0.\dot{9}\div 3\times 2=0.\dot{6}$；第二种存在一点未完全平分(计数数)，即线段 AD 的几何与代数区间表示 $[A,D]=(0,1]=(0,1)+\{1\}$ 进行三等分，几何表示为 $[A,B+0.\dot{0}1]_3^1[B+0.\dot{0}1,C+0.\dot{0}1]_3^2[C+0.\dot{0}1,D]$，代数表示为 $[0.\dot{0}1+0.\dot{3}4]_3^1[0.\dot{3}4,0.\dot{6}7]_3^2[0.\dot{6}7,1]$，其中端点 $B=0.\dot{9}\div 3\times 1=0.\dot{3}$，$C=0.\dot{9}\div 3\times 2=0.\dot{6}$；第三种存在两点未完全平分(全计数)，即线段 AD 的几何与代数区间表示 $[A,D]=[0,1]=\{0\}+(0,1)+\{1\}$ 进行三等分，几何表示为 $[A,B]_3^2[B,C+0.\dot{0}1]_3^1[C+0.\dot{0}1,D]$，代数表示为 $[0,0.\dot{3}]_3^2[0.\dot{3},0.\dot{6}7]_3^1[0.\dot{6}7,1]$，其中端点 $B=0.\dot{9}\div 3\times 1=0.\dot{3}$、$C=0.\dot{9}\div 3\times 2=0.\dot{6}$.

结论二：区间上下标记录表示法，用以表示区间的完全平分. 其中下标表示左侧点共平分等分数，上标表示左侧点所占等分数，右侧点所占的等分数是左侧下标减去上标的得数. 如上述三平分作图法中的几何表示 $[A,B]_3^1[B,C]_3^2[C,D]$，其中端点 B 点分三份，在[A,B]中端点 B 点占一份，[B,C]中端点 B 点占二份；同理端点 C 点分三份，在[B,C]中端点 C 点占二份，[C,D]中端点点占一份. 由此可知，古希腊平分作图法在基本基极[0,1]区间中

完全平分的最大区间是(0,1),而尚未解决端点分配问题(详见下解). 注:①在此情况下古希腊平分作图法的未完全平分点被完全平分,所以建立点系论是将点看做是一个集合或整体;②使用 $0.\dot{3}$,1/3 两数时意义不同,详见下解.

3.4 线段进行 $n>3$ 平分,与线段 $n=3$ 平分同理

附基本基极[0,1]的 7 平分法见表(3—4)

表 3—4

第一求各平均值点	第二求各平均区间	第三分点	
		左	右
$0.\dot{9}\div7\times1=0.\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7}$	$[0,0.\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7}]$	/	$\frac{2}{7}$
$0.\dot{9}\div7\times2=0.\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7}\dot{1}\dot{4}$	$[0.\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7},0.\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7}\dot{1}\dot{4}]$	/	$\frac{5}{7}$
$0.\dot{9}\div7\times3=0.\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7}\dot{1}$	$[0.\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7}\dot{1}\dot{4},0.\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7}\dot{1}]$	$\frac{3}{7}$	$\frac{6}{7}$
$0.\dot{9}\div7\times4+0.\dot{0}1=0.\dot{5}\dot{7}\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}+0.\dot{0}1$	$[0.\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}\dot{7}\dot{1},0.\dot{5}\dot{7}\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}571429]$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$
$0.\dot{9}\div7\times5+0.\dot{0}1=0.\dot{7}\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}+0.\dot{0}1$	$[0.\dot{5}\dot{7}\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}571429,0.\dot{7}\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}714286]$	$\frac{6}{7}$	$\frac{3}{7}$
$0.\dot{9}\div7\times6+0.\dot{0}1=0.\dot{8}\dot{5}\dot{7}\dot{1}\dot{4}\dot{2}+0.\dot{0}1$	$[0.\dot{7}\dot{1}\dot{4}\dot{2}\dot{8}\dot{5}714286,0.\dot{8}\dot{5}\dot{7}\dot{1}\dot{4}\dot{2}857143]$	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$
$0.\dot{9}\div7\times7+0.\dot{0}1=0.\dot{9}+0.\dot{0}1$	$[0.\dot{8}\dot{5}\dot{7}\dot{1}\dot{4}\dot{2}857143,1]$	$\frac{2}{7}$	/

结论三:点是有大小的、可分的、可连续组合的,尽管点是无穷小的量,即点本身就是一个系统、一个整体、一个无穷集等. 通常情况下圆周长平分可视为(0,1)的完全平分,圆面积平分可视为(0,1],即存在圆心奇点的完全平分.