4

第三版

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

Б. П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

4

第三版

Б.П.吉米多维奇

数学分析习题集题解

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

Б.П. 吉米多维奇数学分析习题集题解 (4)/费定晖 周学圣编演 .—3版 .—济南:山东科学技术出版社,2005.1
ISBN 7-5331-0102-2

Ⅰ.Б… Ⅱ.①费… ②周… Ⅲ.数学分析-高等学校-解题 Ⅳ.017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第43958号

Б.П. 吉米多维奇
数学分析习题集题解
(4)
费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

出版者:山东科学技术出版社
地址:济南市玉函路16号
邮编:250002 电话:(0531)2098088
网址:www.lkj.com.cn
电子邮件:sdkj@sdpress.com.cn
发行者:山东科学技术出版社
地址:济南市玉函路16号
邮编:250002 电话:(0531)2098071
印刷者:济南申汇印务有限责任公司
地址:济南市王官庄12号
邮编:250022 电话:(0531)7966822

开本:850mm×1168mm 1/32
印张:14.5
字数:355千
版次:2005年1月第3版第16次印刷
印数:235001-243000

ISBN 7-5331-0102-2 O·8
定价:19.00元

第三版前言

DISANBANQIANYAN

这套书自1979年出版发行以来，20余年一直畅销不衰，读者称其为学习数学分析“不可替代”之图书，我们对此倍感欣慰。

本次第三版主要做了如下改动：

第一，修正了部分题目的解法，使其更加注重了科学性、规范性和简明性。

第二，改正了第二版的个别印刷错误。

第三，在文字上进行了些润色，力求文字更加准确。

第四，对版面和开本进行了调整，突出了时代感。

这次的修改得到山东科学技术出版社的大力支持，责任编辑宋德万、胡新蓉等对该书的再版付出了艰辛的劳动，在此深表感谢。

在第三版修改过程中由费定晖逐章逐题予以校阅，不当之处恳请指正。

费定晖

2005.1

出版说明

CHUBANSHUOMING

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本，自50年代初在我国翻译出版以来，引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生，常以试解该习题集中的习题，作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来，对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题，数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限，单变量函数的微分学，不定积分，定积分，级数，多变量函数的微分学，带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等，概括了数学分析的全部主题。当前，我国广大读者，特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者，在为四个现代化而勤奋学习的热潮中，迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此，我们特约作者，将全书4462题的所有解答汇辑成书，共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书，同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知，原习题集，题多难度大，其中不少习题如果认真习作的话，既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念，又可以有效地提高我们的运算能力，

特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样，我们殷切期望初学数学分析的青年读者，一定要刻苦钻研，千万不要轻易查抄本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有周家云同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工业大学、山东师范大学和曲阜师范大学的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

目录

MULU

第五章　级　　数

§1.　数项级数.同号级数收敛性的判别法

1° 一般概念　对于数项级数

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\tag{1}$$

若

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S\quad(\text{级数的和})$$

存在,式中 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,则称级数(1)为收敛的.反之,则称级数(1)为发散的.

2° 哥西准则　级数(1)收敛的充分且必要的条件为对于任何的 $\varepsilon>0$,都存在有数 $N=N(\varepsilon)$,使得当 $n>N$ 和 $p>0$ 时,不等式

$$|S_{n+p}-S_n|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+p}a_i\right|<\varepsilon$$

成立.

特别是,若级数收敛,则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

3° 比较判别法Ⅰ　设除级数(1)外,还有级数

$$b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots.\tag{2}$$

若当 $n\geqslant n_0$,不等式

$$0\leqslant a_n\leqslant b_n$$

成立,则 1)从级数(2)收敛可推得级数(1)收敛;2)从级数(1)发散可推得级数(2)发散.

特别是,当 $n\to\infty$,若 $a_n\sim b_n$,则正项级数(1)和(2)同时收敛或同时发散.

4° 比较判别法Ⅱ　设

$$a_n = O^*\left(\frac{1}{n^p}\right)^*,$$

则(ⅰ)当 $p>1$ 时级数(1)收敛，(ⅱ)当 $p\leqslant 1$ 时级数(1)发散.

5° 达朗伯耳判别法　若 $a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$及

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q,$$

则(ⅰ)当 $q<1$ 时级数(1)收敛，(ⅱ)当 $q>1$ 时级数(1)发散.

6° 哥西判别法　若 $a_n\geqslant 0$ $(n=1,2,\cdots)$及

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q,$$

则(ⅰ)当 $q<1$ 时级数(1)收敛，(ⅱ)当 $q>1$ 时级数(1)发散.

7° 拉阿伯判别法　若 $a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$及

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=p,$$

则(ⅰ)当 $p>1$ 时级数(1)收敛，(ⅱ)当 $p<1$ 时级数(1)发散.

8° 高斯判别法　若 $a_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$及

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

式中 $|\theta_n|<C$ 而 $\varepsilon>0$，则(ⅰ)当 $\lambda>1$ 时级数(1)收敛，(ⅱ)当 $\lambda<1$ 时级数(1)发散；(ⅲ)当 $\lambda=1$ 时，若 $\mu>1$ 则级数(1)收敛；若 $\mu\leqslant 1$ 则级数(1)发散.

9° 哥西积分的判别法　若 $f(x)$ $(x>0)$是非负的不增函数，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$$

与积分

$$\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$$

同时收敛或同时发散.

* 记号 O^* 的意义参阅第一章§6，1°.

直接证明下列级数的收敛性并求它们的和：

【2546】 $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\cdots.$

解 由于

$$S_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}=\frac{1-\frac{(-1)^n}{2^n}}{1+\frac{1}{2}},$$

故得 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3},$

即所给级数收敛，且其和为$\frac{2}{3}$.（以下有关各题省略这两句话）

【2547】 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots.$

解 由于

$$\begin{aligned}S_n&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)\\&=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}},\end{aligned}$$

故得 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}.$

【2548】 $\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots.$

解 由于

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n},$$

从而有

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

并且

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S_n&=S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\\&=\frac{1}{2}\left(1+1+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right),\end{aligned}$$

故得 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1+\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=3.$

【2549】 $\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\cdots.$

解 由于

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\&=1-\frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

故得 $S=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=1.$

【2550】 $\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots.$

解 由于

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{4\cdot7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right),\end{aligned}$$

故得　$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{1}{3}$.

【2551】

(1) $q\sin\alpha+q^2\sin2\alpha+\cdots+q^n\sin n\alpha+\cdots\quad(|q|<1)$;

(2) $q\cos\alpha+q^2\cos2\alpha+\cdots+q^n\cos n\alpha+\cdots\quad(|q|<1)$.

解　令 $z=q(\cos\alpha+i\sin\alpha)=qe^{i\alpha}$，其中 $i=\sqrt{-1}$. 于是，得$|z|=|q|<1$，并且有

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos n\alpha+i\sum_{n=0}^{\infty}q^n\sin n\alpha \tag{1'}$$

及

$$\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-q\cos\alpha-iq\sin\alpha}$$
$$=\frac{(1-q\cos\alpha)+iq\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}. \tag{2'}$$

比较(1′)、(2′)两式的实部及虚部，即得

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}q^n\sin n\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\sin n\alpha=\frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}q^n\cos n\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos n\alpha-1$

$$=\frac{1-q\cos\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}-1=\frac{q\cos\alpha-q^2}{1-2q\cos\alpha+q^2}.$$

【2552】　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

解　由于

$$S_n=(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1)+(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3})$$
$$+(\sqrt{6}-2\sqrt{5}+\sqrt{4})+\cdots+(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$$
$$=1-\sqrt{2}+\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}},$$

故得　$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1-\sqrt{2}$.

【2553】 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的收敛性.

解 记 $x=k\pi$. 若 k 为整数, 则由 $\sin nx=0$ 知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 是收敛的, 且其和为零. 若 k 非整数, 我们以下将证 $\sin nx$ 并不趋于零, 于是, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 发散. 可采用反证法. 假设

$$\lim_{n\to\infty}\sin nx=0,$$

则当 $n\to\infty$ 时也有 $\sin(n+1)x\to 0$. 但是,

$$\sin(n+1)x=\sin nx\cos x+\cos nx\sin x,$$

由 $\sin(n+1)x\to 0$ 及 $\sin nx\to 0$(当 $n\to\infty$ 时)知 $\cos nx\sin x\to 0$(当 $n\to\infty$ 时), 而 $\sin x=\sin k\pi\neq 0$, 故必有

$$\lim_{n\to\infty}\cos nx=0.$$

但

$$1=\sin^2 nx+\cos^2 nx.$$

令 $n\to\infty$, 两端取极限, 即得左端为 1 而右端为 0, 这就产生了 1 与 0 相等的谬论. 这个矛盾证明了此假设不真, 也即 $\sin nx\not\to 0$(当 $n\to\infty$ 时), 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的发散性获证.

【2554】 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则把该级数的项经过组合而不变更其先后次序所得的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$, 其中

$$A_n=\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i\quad(p_1=1,\ p_1<p_2<\cdots)$$

也收敛且具有相同的和. 反之不真. 举出例子.

证 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 的部分和叙列为

$$l_1, l_2, \cdots, l_n, \cdots,$$

则 $l_n = \sum\limits_{i=1}^{n} A_i = \sum\limits_{i=1}^{p_{n+1}-1} a_i$.

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，故其部分和叙列 $\{S_n\}$ 趋于定值 S，因此，

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} S_{p_{n+1}-1} = S,$$

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 是收敛的，且与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 有相同的和. 反之不真. 例如，级数

$$1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots$$

是发散的，但按下述方法组成的级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

却是收敛的.

【2555】 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的各项是正的，而把这级数的项经过组合而得到的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛，则原来的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

证 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛，记其和为 S. 考虑原级数的部分和 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$，并注意到 $a_k > 0$ $(k=1,2,\cdots)$，故存在 n_0，使

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k < \sum_{l=1}^{n_0} A_l < S.$$

显然 $S_n < S_{n+1}$ 对一切 n 成立. 于是，$\{S_n\}$ 单调上升且有界. 因

此，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在有限，即原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

研究下列级数的收敛性：

【2556】 $1-1+1-1+1-1+\cdots$.

解 由于通项 $a_n=(-1)^{n-1}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限不存在，更不可能趋于零，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ 发散.

【2557】 $0.001+\sqrt{0.001}+\sqrt[3]{0.001}+\cdots$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{0.001}=1\neq 0,$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.001}$ 发散.

【2558】 $\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\cdots$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)-1=\mathrm{e}-1,$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ 收敛，且其和为 $\mathrm{e}-1$.

e

【2559】 $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}+\cdots$.

解 由于 $\dfrac{1}{2n-1}>\dfrac{1}{2n}>0$ 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$ 发散，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}$ 也发散.

【2560】 $\dfrac{1}{1001}+\dfrac{1}{2001}+\dfrac{1}{3001}+\cdots+\dfrac{1}{1000n+1}+\cdots$.

解 由于 $\dfrac{1}{1000n+1}\geqslant\dfrac{1}{1001n}$ 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1001n}$ 发散，故级

数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1000n+1}$也发散．

【2561】 $1+\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}+\cdots+\dfrac{n}{2n-1}+\cdots$.

解 由于

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq 0,$$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2n-1}$发散．

【2562】 $1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)^2}+\cdots$.

解 由于$0<\dfrac{1}{(2n-1)^2}\leqslant\dfrac{1}{n^2}$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$也收敛．

【2563】 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{3\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}+\cdots$.

解 由于$0<\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}<\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$也收敛．

【2564】 $\dfrac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+\cdots$.

解 由于$\dfrac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}>\dfrac{1}{2n}>0$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n}$发散，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$也发散．

【2565】 证明：由等差级数各项的倒数组成的级数是发散的．

证 设等差级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[a+(n-1)d]$，其中 d 为公差.

当 $d>0$ 时，总存在正整数 n_0，使 $a<(n_0-1)d$，则当 $n\geqslant n_0$时，有 $a+(n-1)d<2(n-1)d$. 于是，

$$\frac{1}{a+(n-1)d}>\frac{1}{2(n-1)d}>\frac{1}{2nd}>0,$$

注意到级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{2nd}$发散，因而级数 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}\frac{1}{a+(n-1)d}$发散，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+(n-1)d}$也发散.

当 $d=0$ 时，a 不可能为零，此时级数$\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\cdots+\frac{1}{a}+\cdots$显然发散.

当 $d<0$ 时，将此级数的各项乘以 -1 即化为 $d>0$ 的情形，于是，这级数也发散.

总上所述，不论 d 为何值，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a+(n-1)d}$均发散.

【2566】 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$(A)及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$(B)皆收敛且 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$(C)也收敛，若级数(A)与(B)皆发散，问级数(C)的收敛性若何?

证 当级数(A)及(B)收敛时，由于 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$，故 $0\leqslant c_n-a_n\leqslant b_n-a_n$. 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)$收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$也收敛，再由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)$的收敛性即知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[a_n+(c_n-a_n)]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 也收敛.