超靜定結構力學

下册

徐次達編譯

大東書局出版

目　　錄

下　　册

② 根据P.65/L-2"刚架与地連接的环也是一个闭合环"，而(2)、(3)、(4)都与地連接∴(2)、(3)、(4)都是闭合环，加上(1)便是四个闭合环。一个闭合的刚架有三次超静定(P.65/L-3)，四个闭合环便有12个(4个闭合环③超静定)是超静定，因之也就需要12个典型方程式。

第六章　力法分析複雜的剛架

(6·1) 利用對稱

(P.65/L-4)
複雜的剛架含有多數的閉合環。因此多餘未知力很多，也就是典型方程式數目很多。譬如圖 6·1 所示剛架便有②四個閉合環，共有十二個多餘未知力和十二個典型方程式。這樣，解十二個聯立方程式的工作是相當繁複的。(P.70/L-2) 補救之法，只有儘量利用各種方法去簡化和縮減計算工作。

如果所給剛架是對稱的，這就是說，不但剛架的圖形是對稱的，並且構件的剛性大小也是對稱的，那我們就可以利用這種對稱的情形來簡化計算工作。爲了簡化計算工作，對稱剛架的多餘未知力應儘可能地安置在剛架的對稱軸線上，這樣，基架的單位力彎矩圖形便可以分爲兩組：對稱的和反對稱的。所謂反對稱的圖形，就是所有在對稱軸兩邊的對稱的點的縱坐標大小相等、但地位相反的一種圖形。

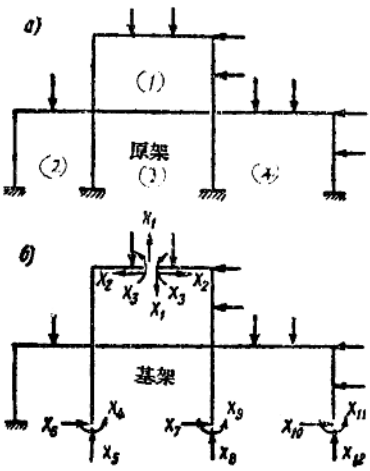


圖 6·1

譬如，圖 6·2a 所示剛架是對

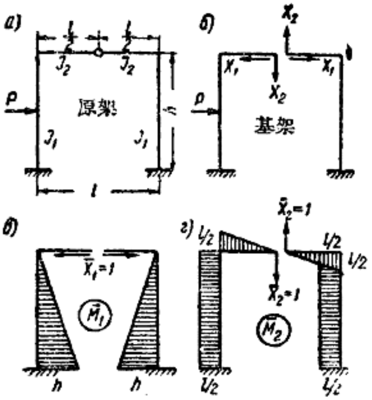


圖 6·2

稱的，因此我們可以在它的橫梁的中點（裝鉸之點）作一切口，並施加兩個多餘未知力 X_1 和 X_2，造成一個基架(圖 6·2 б)。在這基架上施加軸力 $\bar{X}_1=1$，由它所產生的 $\bar{M}_1$ 圖(圖 6·2 д)是對稱的，而施加切力 $\bar{X}_2=1$ 後所得到的 $\bar{M}_2$ 圖是反對稱的(圖 6·2 г)。

以 $\bar{M}_1$ 圖乘 $\bar{M}_2$ 圖便得 δ_{12} 等於零。

於是可得結論：**由對稱的圖形乘反對稱的圖形所得到的變位恆等於零。**

所以剛架的典型方程式本來是聯立的：

$$X_1\delta_{11}+X_2\delta_{12}+\Delta_{1p}=0$$

$$X_1\delta_{21}+X_2\delta_{22}+\Delta_{2p}=0$$

現在都變爲獨立的方程式了：

$$X_1\delta_{11}+\Delta_{1p}=0$$

$$X_2\delta_{22}+\Delta_{2p}=0$$

這樣，這個問題的計算工作便大爲簡化。由此可見，若使一個結構上所有的多餘未知力分爲兩組：一組是對稱的，另一組是反對稱的，計算工作便可大大地簡化。**對稱的力只產生對稱的圖形，反對稱的力只產生反對稱的圖形。於是典型方程式也因此被分爲兩組：一組中含有對稱的未知力，另一組中只含有反對稱的未知力。**

現在讓我們再來列出圖 6·3 *a* 中的剛架的典型方程式，這個剛架是對稱的並具有九次超靜定的。切開三根橫梁的中點、並在切口處各施加

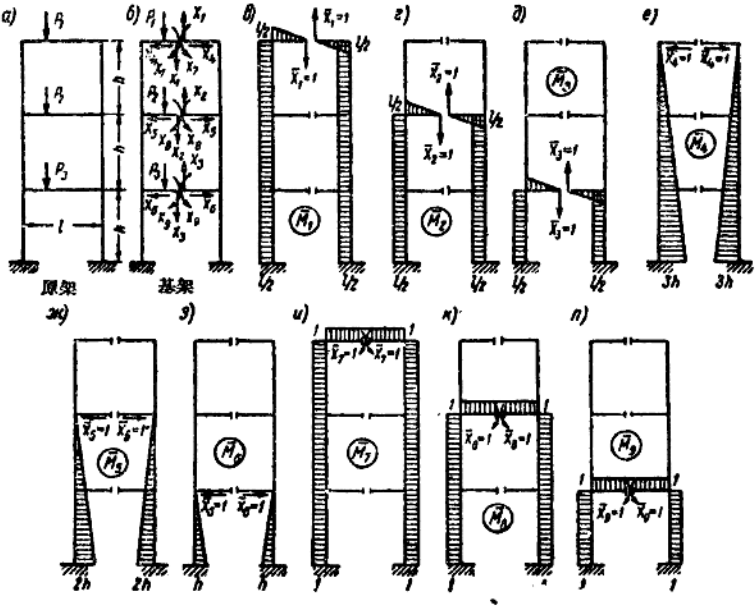


圖 6·3

未知力，便可得到一個具有對稱未知力和反對稱未知力的基架（圖 6·3б）。繪所有的單位力彎矩圖，其中 $\bar{M}_1$、$\bar{M}_2$ 和 $\bar{M}_3$ 三圖（圖 6·3 в、г和 д）是反對稱的，其餘都是對稱的（圖 6·3 е–л）。

根據對稱圖和反對稱圖相乘的結果，得到下列都等於零的變位即：

$$\delta_{14}=\delta_{15}=\delta_{16}=\delta_{17}=\delta_{18}=\delta_{19}=\delta_{24}=\delta_{25}=\delta_{26}=\delta_{27}$$
$$=\delta_{28}=\delta_{29}=\delta_{34}=\delta_{35}=\delta_{36}=\delta_{37}=\delta_{38}=\delta_{39}=0$$

於是典型方程式就被分為兩組：

$$\begin{cases} X_1\delta_{11}+X_1\delta_{12}+X_3\delta_{13}+\Delta_{1p}=0 \\ X_1\delta_{21}+X_2\delta_{22}+X_3\delta_{23}+\Delta_{2p}=0 \\ X_1\delta_{31}+X_2\delta_{32}+X_3\delta_{33}+\Delta_{3p}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_4\delta_{44}+X_5\delta_{45}+X_6\delta_{46}+X_7\delta_{47}+X_8\delta_{48}+X_9\delta_{49}+\Delta_{4p}=0 \\ X_4\delta_{54}+X_5\delta_{55}+X_6\delta_{56}+X_7\delta_{57}+X_8\delta_{58}+X_9\delta_{59}+\Delta_{5p}=0 \\ X_4\delta_{64}+X_5\delta_{65}+X_6\delta_{66}+X_6\delta_{67}+X_8\delta_{68}+X_9\delta_{69}+\Delta_{6p}=0 \\ X_4\delta_{74}+X_5\delta_{75}+X_6\delta_{76}+X_7\delta_{77}+X_8\delta_{78}+X_9\delta_{79}+\Delta_{7p}=0 \\ X_4\delta_{84}+X_5\delta_{85}+X_6\delta_{86}+X_7\delta_{87}+X_8\delta_{88}+X_9\delta_{89}+\Delta_{8p}=0 \\ X_4\delta_{94}+X_5\delta_{95}+X_6\delta_{96}+X_7\delta_{97}+X_8\delta_{98}+X_9\delta_{99}+\Delta_{9p}=0 \end{cases}$$

第一組只含有三個反對稱的未知力在內；第二組含有六個對稱的未知力在內。解第一組三個聯立方程式便可求得反對稱未知力的數值；解第二組六個聯立方程式便可求得對稱未知力的數值。因此計算工作大爲簡化。

(6·2) 基架的選擇

對於一個並非對稱或是組織較爲複雜的剛架，基架型式的選取實與以後計算工作的簡繁有莫大的關係。

首先我們要瞭解到，一個複雜剛架的基架是由**基本部份**和**附加部份**組成的。基架的基本部份與基地相連，成爲一個獨立和穩定的部份。而基架的附加部份則是直接或間接倚靠在基本部份上的結構部份。

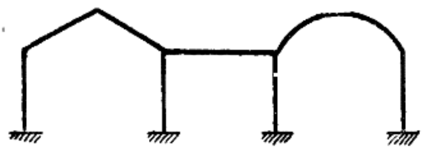


圖 6·4

譬如圖 6·4 所示九次超靜定剛架，安置九個單鉸之後，就可成爲一個基架(圖6·5)。這個基架上只有 ab 一根桿件是一個基本部份，它是

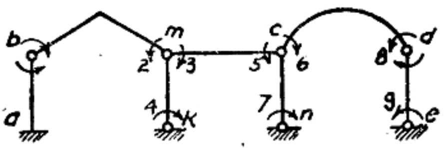


圖 6·5

一根固定於地面的懸臂梁，一個獨立的和穩定的部份；但 bmk 是一個三鉸拱，它的一端擱在 ab 桿的 b 點。同樣，mch 和 cde 都是三鉸拱，各擱在三鉸拱 bmk 的 m 點和三鉸鉸拱 $m\,c\,n$ 的 c 點。這三個三拱都是這結構的附加部份。

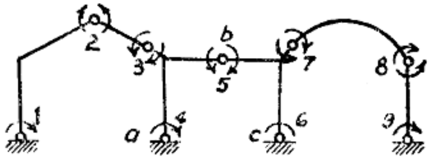


圖 6·6

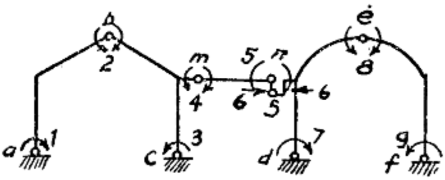


圖 6·7

此外，對於上述剛架還可以採用其他各種基架：圖 6·6 所示基架，基本部份是中間的一個三鉸拱 $a\,b\,c$，其餘都是附加部份。圖 6·7 是另一種基架，有兩個基本部份，即兩個三鉸拱 abc 及 $d\,e\,f$，中間用一根二支點梁 $m\,n$ 相連。

圖 6·8 所示乃上述剛架的又一種基架，這個基架是去掉了三個支點約束而形成的。這樣的基架只有一個基本部份，即是固定在 a 端的一根複雜懸臂梁。

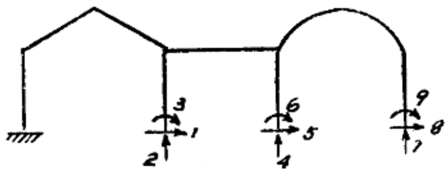


圖 6·8

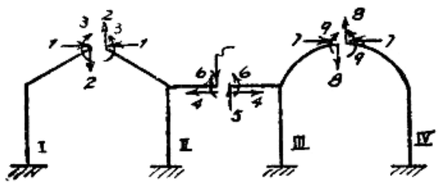


圖 6·9

圖 6·9 示另一種基架，這是從切開三個閉合環而得到的。這樣的基架共有四個基本部份——I、II、III 和 IV，都是懸臂梁，別無附加部份。

選擇剛架的基架型式必須注意下列幾點：

（1）含有多數基本部份

的基架常較僅含有一個或少數基本部份的基架要比較好。因爲基本部份是獨立的，由於多餘約束力所產生的變位也是獨立的，這樣，所需求的變位數目便減少了；

（2）應儘量利用剛架的支點使基架的基本部份數目增多；

（3）應儘量使基架的附加部份能够穩定，並使它們彼此隔離，各不相涉；

（4）切開閉合環，使形成多數的基本部份。

爲能在幾種可能的基架形式中選取比較最好的一種，我們可以組成典型方程式未知力係數表格，如表 6·1 所示。

表 6·1

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
1	δ_{11}	δ_{12}	δ_{13}	δ_{14}	δ_{15}	δ_{16}
2	δ_{21}	δ_{22}	δ_{23}	δ_{24}	δ_{25}	δ_{26}
3	δ_{31}	δ_{32}	δ_{33}	δ_{34}	δ_{35}	δ_{36}
4	δ_{41}	δ_{42}	δ_{43}	δ_{44}	δ_{45}	δ_{46}
5	δ_{51}	δ_{52}	δ_{53}	δ_{54}	δ_{55}	δ_{56}
6	δ_{61}	δ_{62}	δ_{63}	δ_{64}	δ_{65}	δ_{66}

利用這個表格把典型方程式的未知力係數按序排列，幾種基架型式的優劣便立見分明。某種基架能使典型方程式中的副變位 δ_{ik} 變爲零的愈多，這種基架也就是比較最好的，因爲採用了這種基架能使計算工作大爲簡化。當然，我們也要考慮到所採用的基架會不會使計算工作變爲複雜起來。

分析圖 6·4 的剛架時如果採用如圖 6·8 所示的基架，因爲一個支點上的單位力會在單位力作用點和其他支點中間的桿件截面上產生彎矩，所以沒有一個副變位會變爲零。顯然，這樣的基架是很不合適的。

同樣的剛架如果採用如圖 6·5 所示的基架，因爲任何鉸上的單位

力矩的作用都會使基架的基本部份 ab 發生彎矩，所以也沒有一項副變位會變爲零。這個基架也是很不合適的。

圖 6·9 所示基架中，未知力 X_1、X_2 和 X_3 的彎矩圖只限於在 I 和 II 兩個基本部份；未知力 X_4、X_5和 X_6 的影響只限於在 II和III 兩個基本部份；而 X_7、X_8和X_9的影響只限於在III 和IV 兩基本部份。除此以外，X_2、X_5和 X_8 的彎矩圖是反對稱的，其他未知力的彎矩圖是對稱的，所以有許多副變位項都會等於零。它的未知力係數表格見表 6·2。

圖 6·7 所示基架有兩個獨立的基本部份，彼此各不相涉；但作用在連結這兩部份的構件上的力矩卻會使兩個基本部份上都產生力矩。等於零的副變位是：

$$\delta_{17}=\delta_{18}=\delta_{19}=\delta_{27}=\delta_{29}=\delta_{37}=\delta_{38}=\delta_{39}=0$$

表 6·2　(基架按圖 6·9)

╲	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	╲	0					0	0	0
2	0	╲	0				0	0	0
3		0	╲				0	0	0
4				╲	0				
5				0	╲	0			
6					0	╲			
7	0	0	0				╲	0	
8	0	0	0				0	╲	0
9	0	0	0					0	╲

表 6·3　(基架按圖 6·10)

╲	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	╲						0	0	0
2		╲		0	0	0	0	0	0
3			╲				0	0	0
4		0		╲				0	
5		0			╲		0	0	0
6		0				╲		0	
7	0	0	0		0		╲		
8	0	0	0	0	0	0		╲	
9	0	0	0		0				╲

如果採用如圖 6·10 所示的基架，因爲切口都開在節點上的，所以豎向力 X_2、X_5和 X_8都不會在柱上引起彎矩，於是更多的副變位會

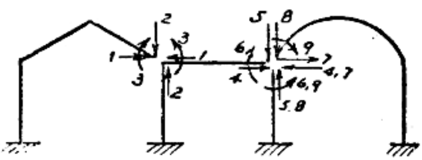


圖　6·10

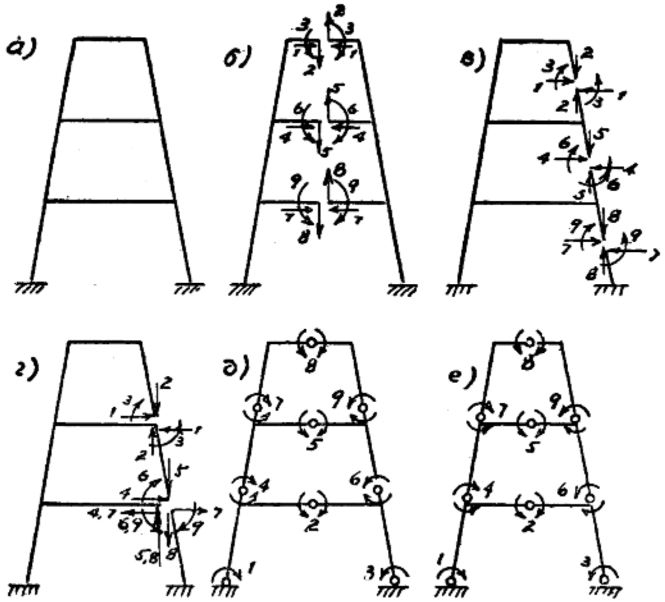


圖 6·11

變爲零。這個基架的未知力係數表格見表 6·3。這個基架比較前面的幾種都好。

現在考慮另一個多層的剛架(圖 6·11 *a*)的基架型式。

圖 6·11 *б* 所示的基架把結構分成爲固定於地面的兩根梁，在每個部份上的單位力都會在單位力作用點以下的部份產生彎矩。這樣的基架是不適宜的。

圖 6·11 *в* 所示的基架，切口開在每層柱的中間，在基架上的單位力和單位力偶成對地相等相反，因此不會引起支點的彎矩和節點的彎矩。這樣，由於一對單位力或一對單位力偶所引起的彎矩圖，只限於在具有切口的一個環中。這樣，自然有許多副變位都等於零。

圖6·11 ı 所示基架中切口開在柱的下端。這樣，水平力 X_1、X_4 和 X_7 不會在橫梁中產生彎矩，所以更多的副變位會等於零，它的未知力係數見表6·4。

表 6·4　(基架按圖 6·11 ı)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1				0	0	0	0	0	0
2							0	0	0
3							0	0	0
4	0						0	0	0
5	0						0		
6	0						0		
7	0	0	0	0	0	0			
8	0	0	0	0					
9	0	0	0	0					

表 6·5　(基架按圖 6·11 e)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1					0		0	0	0
2					0		0	0	0
3					0		0	0	0
4								0	
5	0	0	0					0	
6								0	
7	0	0	0						
8	0	0	0	0	0	0			
9	0	0	0						

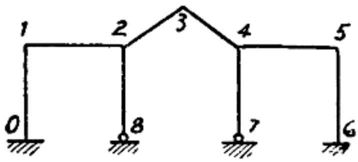
圖 6·11 ∂ 所示基架使結構變爲三個三鉸拱，層層疊起，每層三鉸拱的單位力矩會引起拱脚的推力，因而輾轉又引起下層三鉸拱的彎矩，如此，自然沒有一個副變位會等於零了。這種基架也是不適宜的。

如果把拱脚的鉸放到梁的上面去便可作如圖 6·11 e 所示的基架型式，拱脚的推力由横梁來負擔，因而不致使下層的拱產生彎矩。這樣，就可以使很多的副變位等於零。圖 6·11 e 所示基架的未知力係數見表6·5。

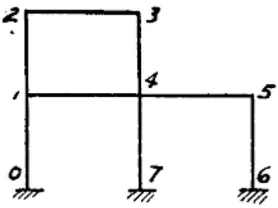
在幾種基架型式中選取一種比較最好的基架，我們以爲圖 6·11 ı 和 e 兩種都是比較好的，它們都能使多數的副變位等於零。但在這兩種基架中，按計算上便捷與否的一方面來說，卻以圖 6·11 ı 的一種爲更好；雖然，在這兩種基架中等於零的副變位的數目彼此約略相等。

習題

題 6·1　作出圖示剛架的各種基架以爲分析的準備，並列未知力係數表，那一種副變



題 6·1



題 6·2

位等於零的最多?

提示:

取下列三種基架型式作爲比較:

a) 除去 0 和 6 的支點;

b) 在 1、2、4、5 四節點上加鉸;

c) 在節點 3 處開切口。

題 6·2 同題 6·1。

(6·3) 成組的未知力

爲了使對稱的結構能有對稱的和反對稱的單位力圖，我們可以用成組的未知力施加在結構的基架上去代替單獨的未知力。爲了明瞭起見，讓我們來用如圖 6·12 所示的六次超靜定結構來說明這個簡化方法。

爲了使這個簡化方法能清楚地表達出來起見，我們採用如圖 6·12 *б* 所示的基架。但在這個圖內施加在基架上的未知力是單獨的，那就是 X_1、X_2、X_3、X_4、X_5 和 X_6。

典型方程式是:

$$\begin{cases} X_1\delta_{11}+X_2\delta_{12}+X_3\delta_{13}+X_4\delta_{14}+X_5\delta_{15}+X_6\delta_{16}+\Delta_{1p}=0 \\ X_1\delta_{21}+X_2\delta_{22}+X_3\delta_{23}+X_4\delta_{24}+X_5\delta_{25}+X_6\delta_{26}+\Delta_{2p}=0 \\ X_1\delta_{31}+X_2\delta_{32}+X_3\delta_{33}+X_4\delta_{34}+X_5\delta_{35}+X_6\delta_{36}+\Delta_{3p}=0 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{aligned}X_1\delta_{41}+X_2\delta_{42}+X_3\delta_{43}+X_4\delta_{44}+X_5\delta_{45}+X_6\delta_{46}+\Delta_{4p}=0\\X_1\delta_{51}+X_2\delta_{52}+X_3\delta_{53}+X_4\delta_{54}+X_5\delta_{55}+X_6\delta_{56}+\Delta_{5p}=0\\X_1\delta_{61}+X_2\delta_{32}+X_3\delta_{63}+X_4\delta_{64}+X_5\delta_{65}+X_6\delta_{66}+\Delta_{6p}=0\end{aligned}\right.$$

假定我們採用成組的未知力 Z_1、Z_2、Z_3、Z_4、Z_5 和 Z_6 施加在同樣的基架上(圖 6·12 в)，其中 Z_1 是兩個大小相等方向相反的水平力；Z_2 是

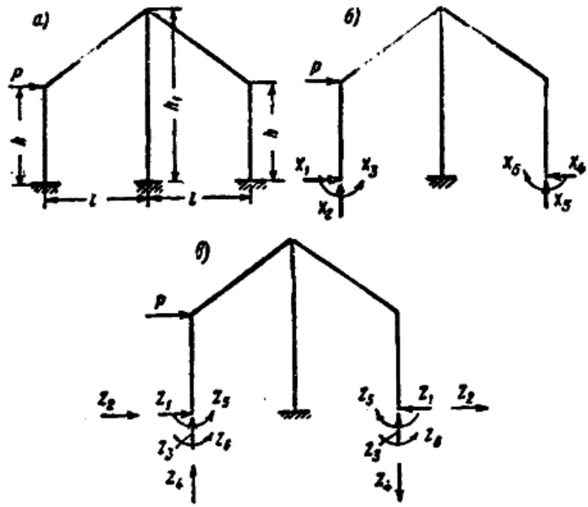


圖 6·12

兩個大小相等方向相同的水平力；Z_3 是兩個大小相等方向相同的垂直力；Z_4 是兩個大小相等方向相反的垂直力；Z_5 是兩個大小相等方向相反的力偶；Z_6是兩個大小相等方向相同的力偶；於是就造成了許多對稱圖形和反對稱圖形。根據 6·1 節所述，所有由於對稱圖形和反對稱圖形相乘的變位都等於零。

由成組的未知力所造成的圖形見圖 6·13，其中 $\overline{M}_1$、$\overline{M}_3$ 和 $\overline{M}_5$ 圖形都是對稱的；$\overline{M}_2$、$\overline{M}_4$ 和 $\overline{M}_6$ 圖形都是反對稱的。

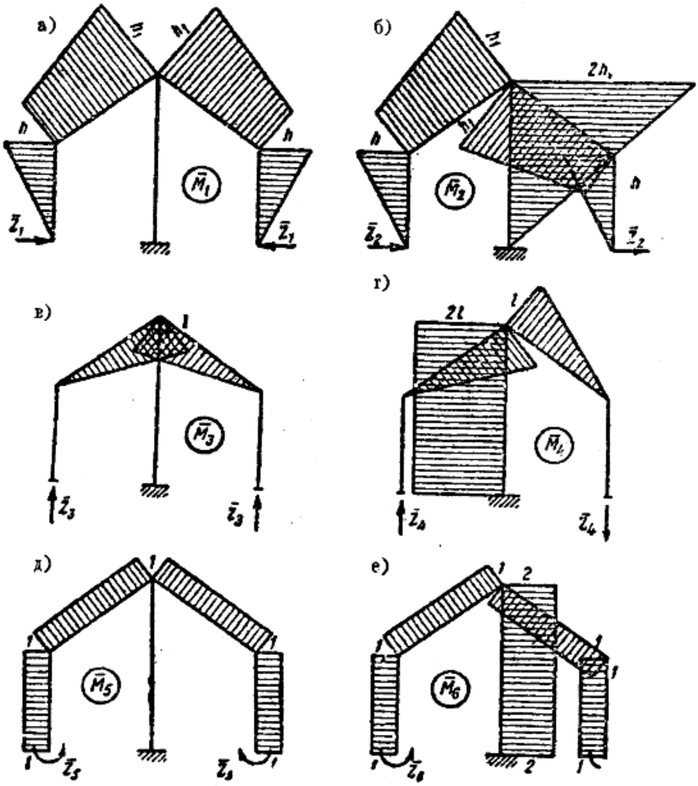


圖 6·13

根據這些圖形可以求得各項變位並列出典型方程式。典型方程式可被分爲兩組：一組只含有對稱的未知力；而另一組則只含有反對稱的未知力。故得：

第一組：
$$Z_1(\delta_{11})+Z_3(\delta_{13})+Z_5(\delta_{15})+(\Delta_{1p})=0$$
$$Z_1(\delta_{31})+Z_3(\delta_{33})+Z_5(\delta_{35})+(\Delta_{3p})=0$$
$$Z_1(\delta_{51})+Z_3(\delta_{53})+Z_5(\delta_{55})+(\Delta_{5p})=0$$

第二組：　$Z_2(\delta_{22})+Z_4(\delta_{24})+Z_6(\delta_{26})+(\Delta_{2p})=0$

$$Z_2(\delta_{42})+Z_4(\delta_{44})+Z_6(\delta_{46})+(\Delta_{4p})=0$$

$$Z_2(\delta_{62})+Z_4(\delta_{64})+Z_6(\delta_{66})+(\Delta_{6p})=0$$

其中(δ_{ik})和(Δ_{ip})表示成組的力的變位。

圖 6·13 *б* 的未知力X和圖 6·13 *в* 的未知力 Z 的關係如下：

$$X_1=Z_1+Z_2$$

$$X_2=Z_3+Z_4$$

$$X_3=Z_5+Z_6$$

$$X_4=Z_1-Z_2$$

$$X_5=Z_3-Z_4$$

$$X_6=Z_5-Z_6$$

根據這些關係就可以求得所有的未知力X_s。

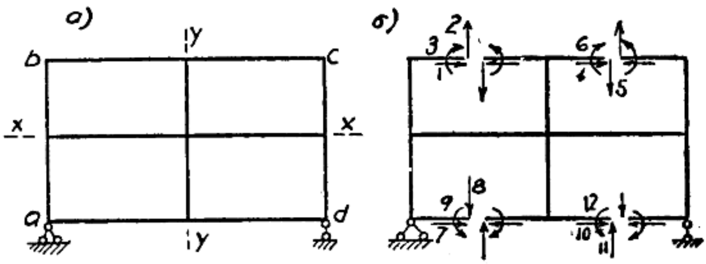


圖　6·14

如果結構具有兩個對稱軸(圖 6·14)，則典型方程式有被分為四組的可能。舉一個具體的例子，假定我們來分析圖 6·14 中的剛架：

採取如圖 6·14*б* 所示的基架，多餘未知力共有12個，都與對稱軸X和Y對稱。在一般情形下，未知力X_2、X_5、X_8和X_{11}並不相等，所以每個未知力可被分解為四個新的未知力以便滿足下列四個條件：

1) 全對稱的(圖 2·15 а):

$$\left.\begin{aligned} &Z_2+Z_5+Z_8+Z_{11}=X_2 \\ &\text{2) 與 } y \text{ 軸反對稱的(圖 2·15 б):} \\ &Z_2-Z_5+Z_8-Z_{11}=X_5 \\ &\text{3) 與 } x \text{ 軸反對稱的(圖 2·15 в):} \\ &Z_2+Z_5-Z_8-Z_{11}=X_8 \\ &\text{4) 與兩軸都反對稱的(圖 2·15 г):} \\ &Z_2-Z_5-Z_8+Z_{11}=X_{11} \end{aligned}\right\}$$

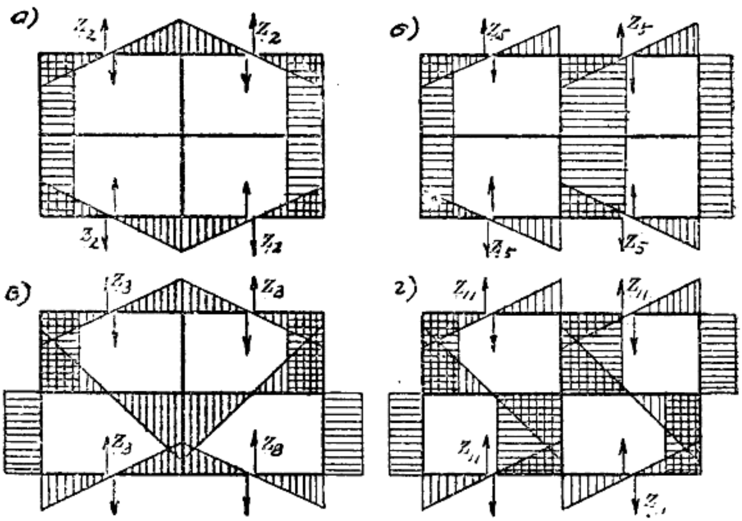


圖 6·15

這樣,新的未知力的大小是:

$$Z_2=\frac{1}{4}(X_2+X_5+X_8+X_{11})$$

$$Z_5=\frac{1}{4}(X_2-X_5+X_8-X_{11})$$