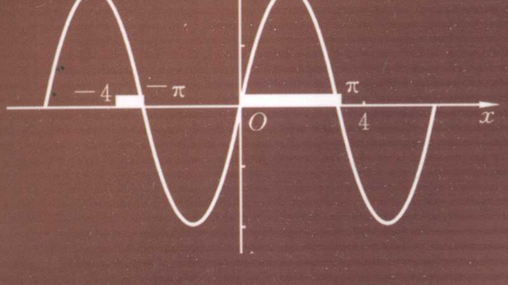
普通高等教育“十一五”规划教材

普通高等院校数学精品教材

·经贸数学·

微积分

柳宿荣　梅家斌　主编



華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

普通高等教育“十一五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

经贸数学

微积分

主　编　柳宿荣　梅家斌
副主编　袁泽政　陈晶晶
　　　　曹剑文　刘红玲

华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 简 介

本书是为经管、经贸、财经类大专生所编写的数学教材，该教材共分上、下两册. 本书是上册部分，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分共六章.

本书针对经管、经贸、财经类大专生数学知识相对薄弱的特点，在取材上以"必须、够用"为原则，同时注重结合专业特点，在选题上尽量与经济问题相结合，在教法上坚持"数学为人人"的理念，力求通俗、实用、生动、有趣.

对数学要求不高的其他专业的大专生也可使用本书.

图书在版编目(CIP)数据

经贸数学:微积分/柳宿荣　梅家斌　主编. —武汉:华中科技大学出版社,2009 年 7 月
ISBN 978-7-5609-5476-9

Ⅰ.经…　Ⅱ.①柳…　②梅…　Ⅲ.①经济数学-高等学校-教材　②微积分-高等学校-教材
Ⅳ.F224.0　O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 104570 号

经贸数学:微积分　　柳宿荣　梅家斌　主　编

策划编辑:周芬娜
责任编辑:王汉江　　封面设计:潘　群
责任校对:汪世红　　责任监印:周治超
出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437
录　　排:武汉佳年华科技有限公司
印　　刷:武汉中远印务有限公司
开本:710mm×1000mm　1/16　　印张:10.25　　字数:190 000
版次:2009 年 7 月第 1 版　　印次:2009 年 7 月第 1 次印刷　　定价:17.00 元
ISBN 978-7-5609-5476-9/F·486

前　　言

本书是专为经管、经贸、财经类大专生量身定做的教材，其内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分，共六章.

微积分是各类本、专科学生必修的一门重要基础课，它既是学习其他后续课程必备的基础和工具，同时又是专业技术人员素质教育的重要组成部分.

本教材是编者根据教育部高等学校大专经济类各专业微积分课程的基本要求，结合自己长期从事微积分教学与研究的经验编写而成的.针对经贸、经管、财经类大专生数学知识和训练相对薄弱的特点，本着“数学为人人”的理念，本书在内容的取舍上，不拘泥于追求理论上的完整性与系统性，而是按照“必须、够用”的要求.更多的是让学生去理解数学的思想，掌握数学的方法与运算技巧.

本书在编写过程中，始终结合学生的专业特点，利用数学方法解决经济问题，在各章中都列举了大量的经济应用例子及一些简单的数学模型，这也是本书的一大特色.这样有助于激发学生的学习兴趣，同时对提高学生解决实际问题的能力是大有裨益的.

全书语言流畅，内容深入浅出，通俗易懂，可读性强，形象直观，便于自学.

本套书由柳宿荣、梅家斌担任主编，由袁泽政、陈晶晶、曹剑文、刘红玲担任副主编.由于作者水平有限，错误和疏漏在所难免，恳请有关专家、同行及广大读者批评指正.

编　者

2009 年 4 月

目　　录

第 1 章 函　　数

在生产实践和经济活动中，常常会遇到一些变化的量，它们之间存在着一定的依存关系，而函数就是这种依存关系在数学中的反映，是数学中最重要的基本概念之一，是高等数学研究的主要对象. 本章在复习中学已有知识的基础上，进一步阐明函数的一般定义，总结已学过的一些函数及函数的相关性质和结构，最后介绍一些经济学中的常用函数.

1.1 函数关系

1.1.1 常量和变量

我们在观察某一现象的过程时，常常会遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不发生变化，我们称其为常量；有的量在过程中是变化的，也就是可以取不同的数值，我们称其为变量. 例如，一种产品的单价为一定值时，销售数量越多，销售收入就越多，在这里单价为一常量，销售数量和销售收入为变量.

通常，用字母 a、b、c 等表示常量，用字母 x、y、z 等表示变量. 在微积分中主要是研究变量及变量之间的关系.

1.1.2 函数的概念

在同一个自然现象、社会现象或技术活动过程中，往往同时有几个变量，这几个变量互相联系并遵循一定的变化规律.

定义 1 设 D 是一个非空实数集合，如果有一个对应规则 f，使每一个 $x\in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称这个对应规则 f 是定义在 D 上的一个**函数关系**，或称变量 y 是变量 x 的**函数**，记为 $y=f(x)$，其中 $x\in D$ 称为**自变量**，y 称为**因变量**. 集合 D 称为函数的**定义域**，也可以记为 $D(f)$.

函数值的全体 $W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

对于 $x_0\in D(f)$ 所对应的 y 值，称为当 $x=x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的函数值，记为 y_0 或 $y|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$，如图 1-1 所示.

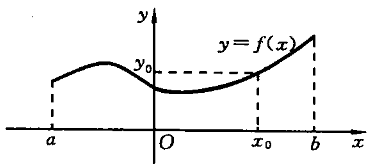


图 1-1

在中学数学中，我们已经知道定义域和对应规则是确定函数关系的两个要素，它们是判断两个函数是否表示相同函数关系的标准. 下面来看两个例子.

例 1 研究函数 $y=x$ 和 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是不是相同的函数关系.

解 $y=x$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数关系，而 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是定义在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上的函数关系. 因为它们的定义域不同，所以这两个函数是不同的函数关系.

例 2 研究函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 是不是相同的函数关系.

解 $f(x)=x$ 和 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$，而

$$g(x)=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

所以，二者是定义域相同而对应规则与值域不同的两个不同的函数.

1.1.3 函数的定义域

根据函数的定义可知：函数的定义域是确定函数的一个重要因素，在实际问题中，函数的定义域应根据实际意义来确定.

对于由数学解析表达式所表示的函数，其定义域就是使函数的表达式有意义的自变量所取的一切实数组成的集合. 在求解过程中，通常要注意以下几点：

(1) 在分式中，分母不能为零；

(2) 在根式中，负数不能开偶次方根；

(3) 在对数式中，真数必须大于零，底数应大于零且不等于 1；

(4) 在反三角函数式中，应满足反三角函数的定义要求；

(5) 如果函数的解析表达式中含有分式、根式、对数式和反三角函数式中的两者或两者以上的，求定义域时应取各部分定义域的交集.

例 3 求下列各函数的定义域：

(1) $y=\lg(x^2-1)$；　　(2) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x-1}$；

(3) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{3}$；　　(4) $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$.

解 (1) 要使函数有意义，则 $x^2-1>0$，即 $|x|>1$，解得 $x>1$ 或 $x<-1$，故该函数的定义域为 $D=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

(2) 要使函数有意义，则

$$\begin{cases} x^2-5x+6\geqslant 0, \\ x-1\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geqslant 3 \text{ 或 } x\leqslant 2, \\ x\neq 1, \end{cases}$$

故该函数的定义域为 $D=(-\infty,1)\cup(1,2]\cup[3,+\infty)$.

(3) 要使函数有意义,则

$$-1\leqslant\frac{x-1}{3}\leqslant 1\Rightarrow -2\leqslant x\leqslant 4,$$

故该函数的定义域为 $D=[-2,4]$.

(4) 要使函数有意义,则必须满足

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0,\\ \sin x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4,\\ 2n\pi<x<2n\pi+\pi, n\in\mathbf{Z},\end{cases}$$

公共解为 $[-4,-\pi)\cup(0,\pi)$,如图 1-2 所示,故所给函数的定义域为 $[-4,-\pi)\cup(0,\pi)$.

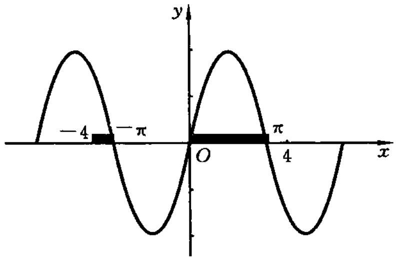


图 1-2

1.1.4 函数的表示法

常用的函数表示法有三种:表格法、图像法和解析法.

1. 表格法(又称列表法)

用自变量的一些数值与相应因变量的对应数值列成表格来表示变量之间的对应关系的方法称为表格法.函数的列表法便于直接由自变量的值去查找相应的因变量的值,但用表格法表示函数关系有时是不够全面的.

2. 图像法(又称图示法)

在平面直角坐标系中用图形来表示函数 $y=f(x)$ 的方法称为图像法.图像法表示函数具有直观性,便于观察函数所具有的变化规律,是研究函数必不可少的工具.这种表示函数的方法直观,可以清楚地看到函数在何时取得最大值、最小值,以及在哪一段函数值增加的慢,哪一段函数值增加的快.但是,这种表示法不便于精确计算.

3. 解析法(又称公式法)

用数学表达式表示变量之间的对应关系的方法称为解析法.解析法是函数的精确描述,是最常用的方法,在微积分中起着重要的作用.根据函数的解析表达式的形式不同,函数又可分为**显函数**、**隐函数**和**分段函数**三种.

(1) 显函数:函数 y 由自变量 x 的解析表达式直接表示.例如,$y=\sin x+e^x-5$.

(2) 隐函数:函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定.例如,$2^{xy}+\sin(x+y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

(3) 分段函数:函数在其定义域的不同范围内,对应法则用不同式子来表达的函数.例如,符号函数和取整函数(见例 4).

例 4 (1) 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=\{-1,0,1\}$.

(2) 取整函数 $y=[x]$,$[x]$表示不超过 x 的最大整数.例如,$[2.3]=2$,$[-1.7]$

$=-2,[-4]=-4$,如图 1-3 所示.

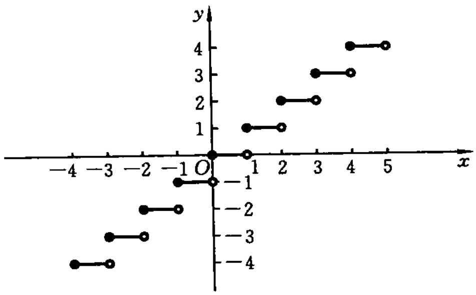


图 1-3 阶梯曲线

注 分段函数是一个函数,只是自变量 x 在不同范围内取值时,对应函数值要用不同的表达式计算.

必须注意的是:函数的三种表示法各有其优缺点,在具体应用时,通常是把这三种表示法配合着进行使用的,在高等数学的学习过程中或分析社会经济现象时经常采用图像法,即将函数的图形画出来以便帮助分析.

1.1.5 函数的几种简单性质

1. 函数的奇偶性

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,如果对于任一 $x\in D$,都有 $-x\in D$ 且使 $f(-x)=f(x)$ 恒成立,则称 $y=f(x)$ 为**偶函数**;若对于任一 $x\in D$,都有 $-x\in D$ 且使 $f(-x)=-f(x)$ 恒成立,则称 $y=f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称,如图 1-4(a)所示;奇函数的图形关于原点对称,如图 1-4(b)所示.

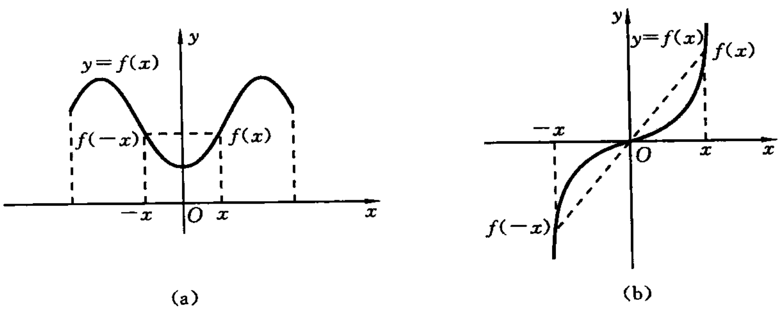


图 1-4

例 5 判断 $y=\lg\frac{1-x}{1+x}$的奇偶性.

解 因为

$$f(-x)=\lg\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\lg\frac{1+x}{1-x}=-\lg\frac{1-x}{1+x}=-f(x),$$

所以 $y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$为$(-1,1)$内的奇函数.

必须强调的是：当 $x\in D$，要求 $-x\in D$ 时，即 D 是关于原点对称的集合这一条件是讨论函数奇偶性的前提条件.

容易证明：两个奇（偶）函数之和仍是奇（偶）函数；两个奇（偶）函数之积是偶函数；一个奇函数与一个偶函数之积是奇函数.

2. 函数的单调性

定义 3　如果函数 $f(x)$在区间(a,b)内随着 x 增大而增大，即对于(a,b)内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内是**严格单调增的**，其函数图形如图 1-5(a)所示.

如果函数 $f(x)$在区间(a,b)内随着 x 增大而减少，即对于(a,b)内任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内是**严格单调减的**，其函数图形如图 1-5(b)所示.

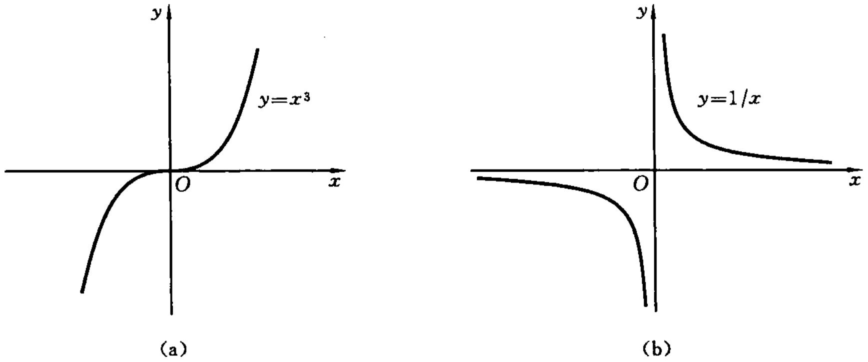


图 1-5

由定义 3 易知：严格单调增加函数的图形在自变量从左向右变化时，函数的图形逐渐上升（见图 1-5(a)）；严格单调减少函数的图形在自变量从左向右变化时，函数的图形逐渐下降（见图 1-5(b)）的.

单调增加函数和单调减少函数统称为**单调函数**，函数的这种特性称为**单调性**.

3. 函数的有界性

定义 4　设函数 $y=f(x)$在区间 I（I 可以是函数的定义域，也可以是定义域的一部分）上有定义，若存在一个正数 M，使得对任一 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $y=f(x)$在区间 I 上**有界**；若这样的 M 不存在，则称 $f(x)$在 I 上**无界**.

例如，由于对任何实数 x，有 $|\sin x|\leqslant 1$，因此函数 $y=\sin x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内有界.

在整个定义域上有界的函数，其图形必介于直线$y=-M$与直线 $y=M$ 之间，如图 1-6 所示.

注　有的函数在它的定义域上无界，但在某个区间上有界，或在定义域的某一部

分有界，如 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间(1,2)内有界，但在区间(0,1)内无界，由此可以说一个函数是有界的或者说是无界的，应同时指出其自变量的取值范围.

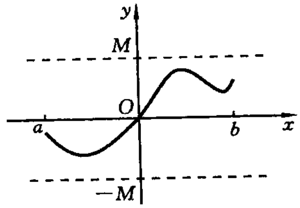


图 1-6

4. 函数的周期性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 l，使得对于任一 $x\in D$，有 $x\pm l\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立，则称 $y=f(x)$ 为**周期函数**，l 称为函数 $y=f(x)$ 的**周期**. 通常，我们所说的周期函数的周期是指最小正周期. 例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 的周期为 2π.

周期函数的图形特点是：如果把一个周期为 l 的函数在一个周期内的图形向左或向右平移 l 的正整数倍，则它将与周期函数的其他部分图形重合.

1.2 初等函数

1.2.1 反函数

定义 1 设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 W，若对于值域 W 内任一 y，都可以从函数关系式 $y=f(x)$ 中确定唯一的 x 值与之对应，则称 x 为定义在 W 上关于 y 的函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，且称其为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**. 这时，原来的函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

函数 $y=f(x)$，x 为自变量，y 为因变量，定义域为 D，值域为 W；函数 $x=f^{-1}(y)$，y 为自变量，x 为因变量，定义域为 W，值域为 D.

习惯上，人们用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此 $x=f^{-1}(y)$ 通常表示为 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 图形在相同的坐标系中关于直线 $y=x$ 对称. 例如，函数 $y=2^x$ 与函数 $y=\log_2 x$ 互为反函数，则它们的图形在同一直角坐标系中是关于直线 $y=x$ 对称的，如图 1-7 所示.

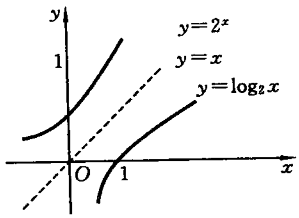


图 1-7

例 1 求函数 $y=2x+1$ 的反函数.

解 从函数 $y=2x+1$ 中直接解出 x，得 $x=\frac{y-1}{2}$，交换变量符号，得 $y=2x+1$ 的反函数为 $y=\frac{x-1}{2}$.

然而，并不是所有函数都有反函数. 那么，函数 $y=f(x)$ 满足什么条件，它的反函数才存在呢？我们不加证明地给出如下定理.

定理 1(反函数的存在定理) 若 $y=f(x)$ 在 (a,b) 上严格单调增(减)，其值域为 W，则它的反函数必然在 W 上确定，且严格单调增(减).

对 $y=f(x)$ 值域中的每个 y，定义域 D 中有唯一的 x 与之对应，且满足 $y=f(x)$，才有反函数. 由此可见，一一对应是一个函数存在反函数的充要条件. 严格单调函数一定有反函数. 例如，$y=x^2$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$. 对于 y 取定的非负值，可求得 $x=\pm\sqrt{y}$. 若我们不加限制条件，由 y 的值就不能唯一确定 x 的值，也就是在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上，函数不是严格单调增(减)，故其没有反函数. 如果我们加上条件，要求 $x\geqslant 0$，则对 $y\geqslant 0$，$x=\sqrt{y}$ 就是 $y=x^2$ 在要求 $x\geqslant 0$ 时的反函数.

1.2.2　基本初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数和常数统称为**基本初等函数**. 在初等数学中，我们已经深入学习过这些函数，微积分中常见的函数都是由这些函数构成的.

基本初等函数是指以下几类函数.

(1) 常数函数　$y=C$.

(2) 幂函数　$y=x^\mu$(μ 为实常数).

(3) 指数函数　$y=a^x$ $(a>0,a\neq 1)$.

(4) 对数函数　$y=\log_a x$ $(a>0,a\neq 1)$.

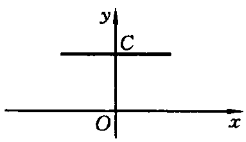
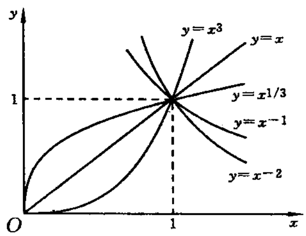
(5) 三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$.

(6) 反三角函数　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\mathrm{arccot}\, x$ 等.

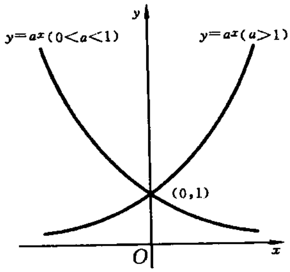
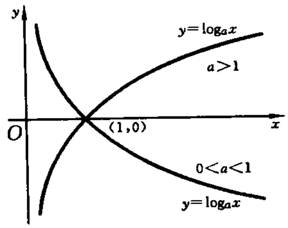
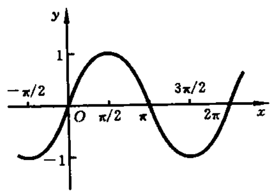
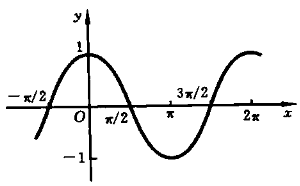
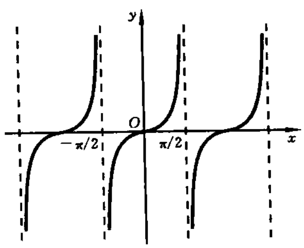
这里指数函数与对数函数(同底)互为反函数，每个反三角函数是相应三角函数在一个单调区间上的反函数.

基本初等函数的性质与图形如表 1-1 所示(T 表示周期).

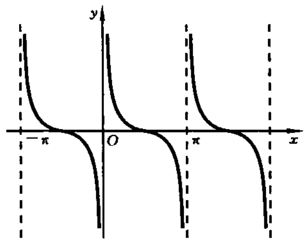
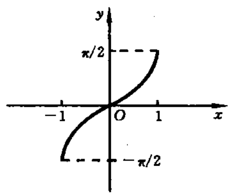
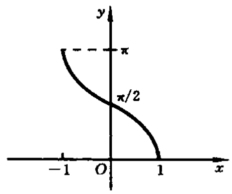
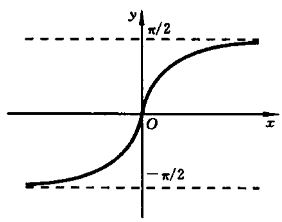
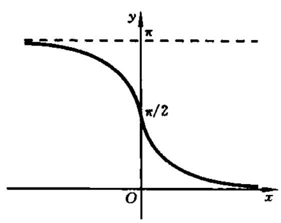
表 1-1　基本初等函数的性质

名称	表达式	定义域	图　形	特　性
常数函数	$y=C$	$\mathbf{R}$		
幂函数	$y=x^\mu$	随 μ 而异，但在 $\mathbf{R}^+$ 上均有定义		过点(1,1) $\mu>0$ 时在 $\mathbf{R}^+$ 单调增 $\mu<0$ 时在 $\mathbf{R}^+$ 单调减

续表

名称	表达式	定义域	图 形	特 性
指数函数	$y=a^x$ $a>0, a\neq 1$	$\mathbf{R}$		$y>0$,过点(0,1) $a>1$ 单调增 $0<a<1$ 单调减
对数函数	$y=\log_a x$ $a>0, a\neq 1$	$\mathbf{R}^+$		过点(0,1) $a>1$ 单调增 $0<a<1$ 单调减
正弦函数	$y=\sin x$	$\mathbf{R}$		奇函数,$T=2\pi$ $\|y\|\leqslant 1$
余弦函数	$y=\cos x$	$\mathbf{R}$		偶函数,$T=2\pi$ $\|y\|\leqslant 1$
正切函数	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$		奇函数,$T=\pi$ 在每个周期内单调增

续表

名称	表达式	定义域	图　形	特　性
余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}$		奇函数，$T=\pi$ 在每个周期内单调减
反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$		奇函数，单调增 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$
反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$		单调减，$0\leqslant y\leqslant\pi$
反正切函数	$y=\arctan x$	$\mathbf{R}$		奇函数，单调增 $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$
反余切函数	$y=\operatorname{arccot} x$	$\mathbf{R}$		单调减，$0<y<\pi$

注　正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$、余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，它们的性质可分别由余弦函数与正弦函数的性质导出，此处从略. 此外，反三角函数有以下性质：

$$\sin(\arcsin x)=x,\quad \cos(\arccos x)=x,\quad \tan(\arctan x)=x,\quad \cot(\operatorname{arccot} x)=x.$$