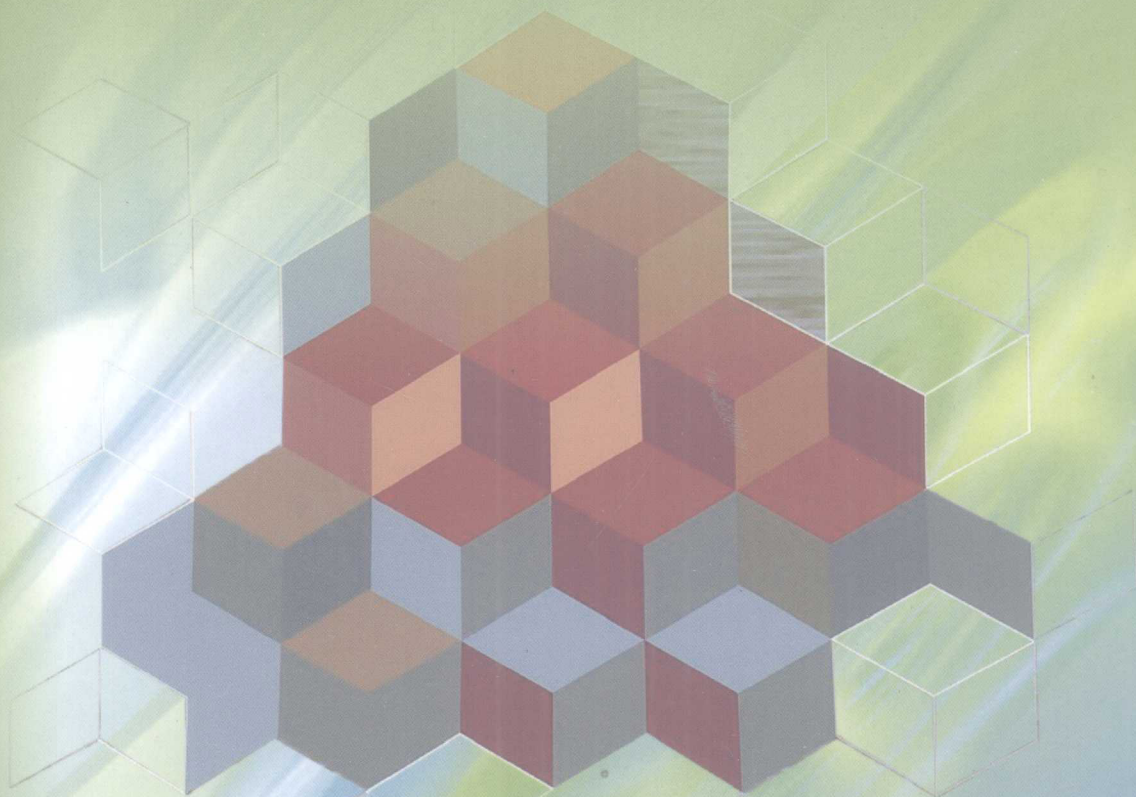



21 世纪高等学校规划教材

大学数学基础

主编 杨松林 汪光先



 苏州大学出版社

21 世纪高等学校规划教材

大学数学基础

主编 杨松林 汪光先

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学数学基础/杨松林,汪光先主编. —苏州:苏州大学出版社,2009.1
21世纪高等学校规划教材
ISBN 978-7-81137-205-2

I. 大… II. ①杨…②汪… III. 高等数学—高等学校—教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 005775 号

内容提要

本书是为适应课程体系变化而编写的高等教学教材,包括“解析几何”“微积分”“线性代数”“概率统计”“Mathematica 软件使用入门”等大学数学基本内容,可供数学课程学时较少专业的学生使用,如文科类学生等。

大学数学基础

杨松林 汪光先 主编

责任编辑 谢金海

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市干将东路200号 邮编:215021)
宜兴文化印刷厂印装
(地址:宜兴市南漕镇 邮编:214217)

开本 787 mm×960 mm 1/16 印张 14.25 字数 271 千
2009年1月第1版 2009年1月第1次印刷
ISBN 978-7-81137-205-2 定价:21.80元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话:0512-67258835

《大学数学基础》编委会名单

主 编

杨松林 汪光先

编 委

苏国荣 李文俊 杨松林 汪光先
武震东 葛 英 戴中寅

前 言

数学是人们理解世界的钥匙；

数学是大学生们的思维体操；

数学日益成为社会科学、经济学和医学等学科重要的研究工具。

《大学数学》课程不仅对于理工科学生是不可缺少的基础知识，对于社会、经济和医学等专业学生也是十分有益的课程。

针对人文类学科和部分医、农类专业，后继课程需要的数学知识较少，数学课时相对也比较少。为了使学生对大学数学有一个概括的了解，初步掌握一些数学的思维方式和应用，提高个人的文化修养，我们编写了这本《大学数学基础》。在内容选取上，我们以“体会数学思想、了解数学方法、感受数学的和谐美”为宗旨。

第一部分“解析几何”，是由以哲学家传世的笛卡尔初创，体现“数”和“形”和谐统一的杰作；

第二部分“微积分”，看似深奥，其内部逻辑却极其严密，是缜密的数学思维的典范；

第三部分“线性代数”，似乎只要会四则运算就可以完成全部工作了，但其中大量环环相扣、紧密相联的数量关系和巧妙的计算方法，对于学生的思维能力无疑是有益的锻炼。

第四部分“概率统计”，是一种研究非确定性问题的数学，对于我们的学生，可能更会有直接的应用。

本书选材，得到游宏教授和黄毅生教授的指导。本书的编写出版得到苏州大学数学科学学院的大力支持。需要说明的是，本书的前身是卢钦和老师编写的《文科高等数学》，为了适应课程体系变化，我们进行了重新编写。鉴于卢钦和老师不再参与，我们在此谨表深深的谢意！也请卢钦和老师勿以本书之陋为嗔。

最后，我们感谢苏州大学出版社和谢金海同志，他们的辛勤工作使本书得以及时面世。

编 者

2009年1月于苏州大学

目 录

第一章 空间解析几何

1.1 空间直角坐标系	(001)
1.2 空间向量及其运算	(004)
1.2.1 向量的概念	(004)
1.2.2 向量的加法与数乘	(004)
1.2.3 向量的代数形式	(005)
1.2.4 向量的内积	(007)
1.3 空间平面与直线的方程	(008)
1.3.1 空间曲面及其方程	(008)
1.3.2 空间平面的方程	(009)
1.3.3 空间直线的方程	(011)
1.4 常见空间曲面、曲线	(012)
1.4.1 球面	(012)
1.4.2 椭球面	(013)
1.4.3 常见曲面	(014)
1.4.4 二次曲线(圆锥截线)	(016)
习题一	(017)
第一章学习指导	(019)

第二章 导数、微分及其应用

2.1 函数	(023)
2.1.1 预备知识	(023)
2.1.2 函数	(025)
2.2 数列和函数的极限	(028)
2.2.1 数列的极限	(028)
2.2.2 级数	(031)
2.2.3 函数的极限	(034)
2.2.4 两个重要极限	(038)

2.2.5	无穷小量和无穷大量	(039)
2.3	连续	(041)
2.3.1	函数连续的概念	(041)
2.3.2	初等函数的连续性	(042)
2.3.3	闭区间上连续函数的性质	(042)
2.4	函数的导数	(044)
2.4.1	导数的概念	(045)
2.4.2	基本求导公式和求导法则	(048)
2.4.3	高阶导数	(051)
2.5	微分	(051)
2.5.1	微分的概念	(051)
2.5.2	基本微分公式	(053)
2.5.3	微分的运算	(053)
2.6	导数的应用	(053)
2.6.1	拉格朗日(Lagrange)中值定理	(053)
2.6.2	洛必塔法则——求极限的一种方法	(054)
2.6.3	函数的单调性	(056)
2.6.4	函数的极值	(057)
2.6.5	函数的多项式近似	(060)
	习题二	(062)
	第二章学习指导	(066)
第三章 不定积分与定积分		
3.1	定积分	(070)
3.1.1	定积分的概念	(070)
3.1.2	定积分的几何意义	(072)
3.2	不定积分	(074)
3.2.1	原函数与不定积分的概念	(074)
3.2.2	不定积分的基本公式和性质	(075)
3.2.3	换元积分法和分部积分法	(076)
3.3	定积分的计算	(079)
3.3.1	微积分基本定理	(079)
3.3.2	定积分的基本性质	(081)
3.3.3	定积分的计算	(082)

3.4 定积分的应用	(083)
3.4.1 平面图形的面积	(083)
3.4.2 旋转体体积	(085)
3.4.3 定积分在物理中的简单应用——变力做功	(086)
习题三	(086)
第三章学习指导	(089)
第四章 线性代数	
4.1 行列式	(092)
4.1.1 二阶、三阶行列式	(092)
4.1.2 n 阶行列式	(094)
4.1.3 行列式的性质及计算	(095)
4.2 矩阵和向量	(100)
4.2.1 矩阵的概念	(100)
4.2.2 矩阵的运算	(101)
4.2.3 逆矩阵	(105)
4.2.4 向量	(107)
4.3 解线性方程组	(108)
4.3.1 消元法	(108)
4.3.2 线性方程组的增广矩阵	(109)
4.3.3 高斯消元法和高斯-若当消元法	(111)
4.3.4 克莱姆法则	(115)
习题四	(117)
第四章学习指导	(120)
第五章 概率统计	
5.1 事件与概率	(128)
5.1.1 随机试验与样本空间	(128)
5.1.2 事件的关系和运算	(129)
5.1.3 概率和频率	(130)
5.1.4 古典概型	(132)
5.1.5 几何概率	(134)
5.1.6 条件概率、全概率公式	(136)
5.2 随机变量	(140)
5.2.1 离散型随机变量	(141)

5.2.2 分布函数	(142)
5.2.3 连续型随机变量	(144)
5.3 随机变量的数学期望与方差	(147)
5.3.1 数学期望	(147)
5.3.2 方差	(148)
5.4 统计初步和数据整理	(150)
5.4.1 统计的基本概念	(150)
5.4.2 数据的整理和分析	(151)
5.5 回归分析	(155)
5.5.1 回归概念	(155)
5.5.2 一元线性回归	(156)
习题五	(157)
第五章学习指导	(161)
附表	(167)
附录一 微积分史话	(169)
附录二 MATHEMATICA 软件使用入门	(182)
附录三 再说连续	(192)
附录四 数论与密码	(197)
附录五 线性规划	(208)
参考答案	(214)



第一章

空间解析几何

16 世纪以后,航海、天文、力学等方面的发展对初等几何学提出了挑战. 比如,开普勒(Kepler)发现行星是沿椭圆轨道绕太阳运行的,伽利略发现投掷物体是沿抛物线运行的. 要计算行星的椭圆形轨道、投掷物体的抛物线轨迹等,用初等几何学已难以解决,需要探索新的数学方法. 法国哲学家、数学家笛卡尔(Rene Descartes)在 1637 年发表的《方法论》中建立了坐标几何,即解析几何. 解析几何利用坐标系把点与数结合起来,然后把曲线作为在一定几何条件约束下的动点的轨迹,而约束条件用点的坐标所满足的方程表示,从而把曲线与方程结合起来. 这样,我们可用代数方法研究几何图形的各种性质. 笛卡尔的思想和方法是数学的一大进步,动点坐标——变量的使用对 16 世纪晚期微积分的产生具有直接影响.

>>> § 1.1 空间直角坐标系 <<<<

先复习一下中学里我们已经学习过的平面直角坐标系. 在数轴 Ox (如图 1-1) 的基础上建立第二条数轴 Oy , 使它与 Ox 轴在原点处垂直相交, 构成一个平面直角坐标系 Oxy . 在平面直角坐标系中, 一个点 A 的位置可以用一个二元有序数组 (x, y) 表示, 称为点的坐标. 由于位置是点的唯一几何性质, 所以, 坐标 (x, y) 完全地确定了点 A . 如图 1-2 所示我们可以用如下方式确定点 A 的坐标: 过 A 作平行于 Oy 的直线交 Ox 于 B , B 在数轴 Ox 上的坐标即为 x , 称为 A 的横坐标. 同样, 过 A 作平行于 Ox 的直线交 Oy 于点 C , C 在数轴 Oy 上的坐标即为 y , 称为点 A 的纵坐标.

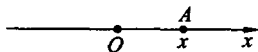


图 1-1

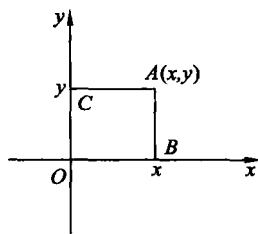


图 1-2

平面上只要选定两个相互垂直的方向,平面上的点就可以用一个二元有序数组表示,因此,我们称平面为二维的.而我们生活的空间有三个相互垂直的方向,是三维的.为了描述三维空间,我们再建立一条数轴 Oz ,使它与平面直角坐标系 Oxy 垂直相交于原点 O ,并用如下右手规则确定 Oz 的方向:当右手四指从 Ox 正方向以直角指向 Oy 正方向时,拇指所指的方向为 Oz 的正方向,如图 1-3. 这样一个坐标系称为空间直角坐标系 $Oxyz$. 由于坐标轴方向由右手规则确定,又称为右手系. 在空间解析几何中,习惯上都使用右手系. 在图 1-3 所示坐标系中, O 点为坐标原点, Ox 、 Oy 、 Oz 分别称为横轴、纵轴、竖轴(或称为 x 轴、 y 轴、 z 轴). 坐标轴 Ox 和 Oy 确定的平面称为 xOy 坐标平面,坐标轴 Oy 和 Oz 确定的平面称为 yOz 坐标平面,坐标轴 Oz 和 Ox 确定的平面称为 zOx 坐标平面.

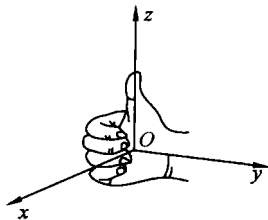


图 1-3

在空间建立空间直角坐标系后,空间中任一点可以用一个三元有序数组 (x, y, z) 表示. 和平面直角坐标系相类似,我们用如图 1-4 所示的方法确定空间点 M 的坐标,过 M 分别作平行于 yOz 、 zOx 、 xOy 坐标平面的平面,它们各自与坐标轴 Ox 、 Oy 、 Oz 交于 P 、 Q 、 R 三点. P 点在数轴 Ox 上的坐标记为 x ,同样, Q 、 R 在数轴 Oy 、 Oz 上的坐标分别记为 y 、 z . 由过

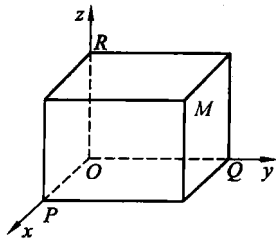


图 1-4

一点且平行于固定平面的平面的唯一性可知,三元有序数组 (x, y, z) 完全确定了点 M 的位置,我们称 (x, y, z) 为点 M 的坐标,并且分别称 x 、 y 、 z 为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标(或称为 x 坐标、 y 坐标、 z 坐标). 记作 $M(x, y, z)$.

在空间不同点的坐标的符号有不同的特征. 例如:在 xOy 平面上方的点,它的 z 坐标为正,如果它同时又在 yOz 平面前面,则它的 x 坐标也为正;如果点 $M(x, y, z)$ 在 yOz 坐标面上,则 $x=0$;如果点 M 在 Ox 坐标轴上,则 $y=z=0$;坐标系原点的坐标为 $(0, 0, 0)$. 类似地,可以指出其它一些特殊位置上点的坐标. 三个坐标面把空间分成了八个部分,每一个部分称为一个卦限,因此三个坐标面将空间分成八个卦限. 在不同卦限的点的坐标的符号有不同的特征,列表如下:

符号 \ 位置	位置							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	-	-	+	+	-	-	+
y	+	+	-	-	+	+	-	-
z	+	+	+	+	-	-	-	-

现在,我们来计算空间一点 $M(x, y, z)$ 到原点 O 的距离. 如图 1-5, 易知

$$|OM| = \sqrt{|OS|^2 + |SM|^2},$$

而

$$|OS|^2 = |OP|^2 + |PS|^2,$$

并且

$$|OP| = |x|, |PS| = |OQ| = |y|,$$

$$|SM| = |OR| = |z|,$$

所以我们有

$$|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

这是空间点到原点的距离公式. 由此,我们可以得到空间两点的距离公式.

对于空间任意两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 如图 1-6, 过 M_1, M_2 作各侧面分别平行于坐标平面的六面体, 于是

$$\begin{aligned} |M_1M_2|^2 &= |M_1N|^2 + |NM_2|^2 \\ &= |M_1P_1|^2 + |P_1N|^2 + |NM_2|^2 \\ &= |A_1A_2|^2 + |B_1B_2|^2 + |C_1C_2|^2. \end{aligned}$$

而

$$|A_1A_2| = |x_2 - x_1|,$$

$$|B_1B_2| = |y_2 - y_1|,$$

$$|C_1C_2| = |z_2 - z_1|,$$

所以空间中 M_1, M_2 两点间的距离为

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (1.1)$$

上式称为空间两点间的距离公式.

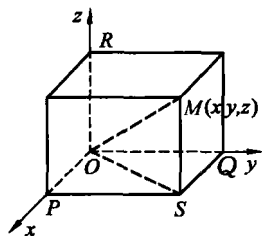


图 1-5

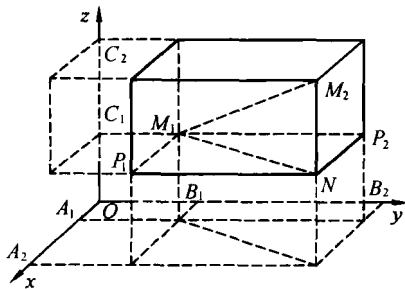


图 1-6

>>> § 1.2 空间向量及其运算 <<<

1.2.1 向量的概念

定义 1.1 既有大小,又有方向的量称为**向量**.

数学上用一条有方向的线段(称为有向线段)来表示向量.有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.

以 M_1 为起点, M_2 为终点的向量记为 $\overrightarrow{M_1M_2}$. 今后常用粗体小写字母 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 表示向量,书写时由于无法区别是否是粗体,所以常常在字母上面加上箭头如 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 来表示向量.

向量的大小称作向量的模,向量 \mathbf{a} 的模记作 $|\mathbf{a}|$.

模等于 1 的向量称作**单位向量**.

模等于 0 的向量称作**零向量**,记作 $\mathbf{0}$,并规定:零向量的方向为任意的.

实际问题中,有些向量与起点有关(如作用于质点上的力),有些向量与起点无关(如气象学中的风).为了方便起见,除非特别声明外,我们研究的向量是指具有大小和方向的量,它的性质与起点位置无关,并称这种向量为**自由向量**,简称**向量**.

1.2.2 向量的加法与数乘

如果两向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 的方向与模都相等,则称两向量相等,记为 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$.

显然,若 $\mathbf{a}=\mathbf{b}$,则两向量经过平行移动之后能完全重合.

如图 1-7,将向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 首尾相接,则以 \mathbf{a} 的起点为起点、以 \mathbf{b} 的终点为终点的向量 \mathbf{c} 称为向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 的和,记为

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b}.$$

由于向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 、 \mathbf{c} 构成一个三角形,所以,向量加法的这种计算规则称为**三角形法则**.

定义 1.2 设 λ 为任一实数, \mathbf{a} 为一个向量, λ 与 \mathbf{a} 的数乘:

$$\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}$$

是一个模为 $|\lambda||\mathbf{a}|$ 的向量.当 $\lambda>0$ 时,它与 \mathbf{a} 方向相同;当 $\lambda<0$ 时,它与 \mathbf{a} 方向相反;当 $\lambda=0$ 时,我们无需关心方向,因为 $\lambda\mathbf{a}$ 模为零,是零向量,此时方向是任意的.

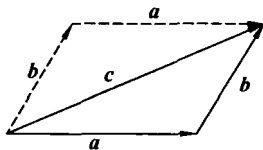


图 1-7

$-a = (-1)a$ 是与 a 大小相等方向相反的向量, 称为 a 的负向量.

当 $a \neq 0$ 时, 向量 $\frac{1}{|a|}a$ 是与 a 同方向的单位向量, 记为 a° .

若存在实数 λ 使得 $b = \lambda a$, 则按定义, a, b 同向或反向, 总之 a 与 b 是平行的. 由于 a 与 b 是自由向量, 故 a, b 可以平移到同一条直线上, 所以, 当 $b = \lambda a$ 时, 称 a, b 为共线的.

向量的加法运算与数乘运算称为向量的线性运算, 它们有如下运算规律:

- (1) 加法交换律: $a + b = b + a$.
- (2) 加法结合律: $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$.
- (3) 数乘结合律: $\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a$.
- (4) 数乘分配律: $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a, \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.

这些运算律容易从它们的定义得到. 例如, 从图 1-7 可知 $a + b$ (实线) 与 $b + a$ (虚线) 相等.

以上, 我们用几何方法引进了向量及其线性运算. 显然, 利用这些定义进行向量运算是不方便的, 所以需要代数方法来描述它们.

1.2.3 向量的代数形式

设向量 $a = \overrightarrow{OM}$, 如图 1-8, 其中点 $M(x, y, z)$.

则有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{SM} &= \overrightarrow{OR}, \\ \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SM} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OR}, \\ \overrightarrow{PS} &= \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PS},\end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$.

若记 i, j, k 分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴正方向的单位向量 (如图 1-9, 称为坐标向量), 则利用单位向量易知

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= |\overrightarrow{OP}|i = xi, \\ \overrightarrow{OQ} &= |\overrightarrow{OQ}|j = yj, \\ \overrightarrow{OR} &= |\overrightarrow{OR}|k = zk.\end{aligned}$$

于是 $a = \overrightarrow{OM} = xi + yj + zk$.

因此, 一个空间向量 a 可以写成

$$a = a_x i + a_y j + a_z k \quad (1.2)$$

的形式, 称为向量 a 按坐标向量的分解式. 由于坐标系建立后, 坐标向量 i, j, k 就确定了, 所以向量 a 完全由系数 a_x, a_y, a_z 确定. 于是我们又可以将一个向量

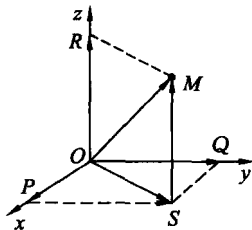


图 1-8

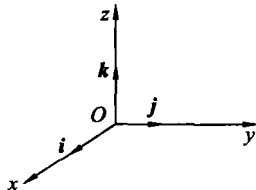


图 1-9

记为

$$\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}. \quad (1.3)$$

称为向量 \mathbf{a} 的坐标表达式(用“ $\{\}$ ”以示与点的坐标之区别), a_x, a_y, a_z 称为向量 \mathbf{a} 的坐标. 显然, 从几何意义上看, 向量坐标的数值是自由向量起点置于原点时的终点坐标.

设向量 $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}, \lambda$ 为实数, 则

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) + (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= (a_x + b_x) \mathbf{i} + (a_y + b_y) \mathbf{j} + (a_z + b_z) \mathbf{k} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}, \\ \lambda \mathbf{a} &= \lambda(a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) = \lambda a_x \mathbf{i} + \lambda a_y \mathbf{j} + \lambda a_z \mathbf{k} = \{\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\}, \\ \mathbf{a} - \mathbf{b} &= \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \{a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z\}. \end{aligned}$$

总之, 向量的加法和数乘等都可以通过坐标运算来进行. 最后, 由向量坐标的几何意义及(1.1)式, 易知

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.4)$$

例 1.1 设 $\mathbf{a} = \{1, 2, 1\}, \mathbf{b} = \{2, 3, 5\}, \lambda = 3$, 试求: $\mathbf{a} + \mathbf{b}, \lambda \mathbf{a} + \mathbf{b}$ 及 $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

解 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{3, 5, 6\}$,

$$\lambda \mathbf{a} + \mathbf{b} = 3\{1, 2, 1\} + \{2, 3, 5\} = \{5, 9, 8\},$$

$$\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 3\{3, 5, 6\} = \{9, 15, 18\}.$$

应用中, 有时需要利用几何方法指定一个向量, 即指定向量 \mathbf{a} 的起点、终点. 设 \mathbf{a} 为由起点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 指向终点 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的向量(图 1-10). 则由加法法则有

$$\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2}.$$

而 $\overrightarrow{OM_1} = \{x_1, y_1, z_1\}, \overrightarrow{OM_2} = \{x_2, y_2, z_2\}$,

$$\text{故 } \mathbf{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$$

$$= \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}. \quad (1.5)$$

即向量 \mathbf{a} 的坐标是终点坐标减去起点坐标.

例 1.2 设 $M_1(2, 5, 3), M_2(1, 7, 6)$, 试求 $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_1}$ 和 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$.

$$\text{解 } \overrightarrow{M_1M_2} = \{1-2, 7-5, 6-3\} = \{-1, 2, 3\} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k},$$

$$\overrightarrow{M_2M_1} = \{2-1, 5-7, 3-6\} = \{1, -2, -3\} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k},$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}.$$

例 1.3 设 $\mathbf{a} = \{1, 2, 1\}, \mathbf{b} = \{2, 4, 2\}$, 试证: \mathbf{a}, \mathbf{b} 共线.

证明 因为显然有 $\mathbf{b} = 2\mathbf{a}$, 所以 \mathbf{a}, \mathbf{b} 共线.

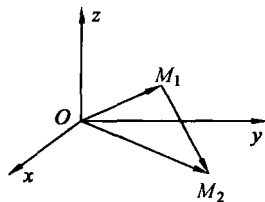


图 1-10

此例说明,如果 a, b 共线,则 $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$. 注意这个连比,是一个形式符号,并非真正的比式,当某个分式分母为零时表示其相应分子也为零. 下面我们利用向量为工具,解决一个纯几何问题.

例 1.4 设有点 $A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B)$, 试求线段 AB 的中点 C .

解 如图 1-11, 因为

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}),$$

$$\text{而 } \overrightarrow{OA} = \{x_A, y_A, z_A\}, \overrightarrow{OB} = \{x_B, y_B, z_B\},$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{OC} = \left\{ \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right\},$$

$$\text{即 } C \text{ 点坐标为 } \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right).$$

上例的结果通常称为中点公式.

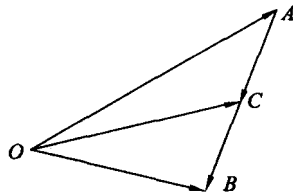


图 1-11

1.2.4 向量的内积

定义 1.3 设 a, b 为向量, 记 a, b 的夹角为 $\theta, 0 \leq \theta \leq \pi$ (如图 1-12). 我们称数量

$$|a| |b| \cos \theta$$

为两向量 a, b 的内积(数量积), 记为 $a \cdot b$. 即

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta.$$

对于两向量的内积, 我们不加证明地给出其运算律:

- (1) 交换律: $a \cdot b = b \cdot a$.
- (2) 分配律: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.
- (3) 结合律: $\lambda a \cdot b = (\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b) \quad (\lambda \in \mathbf{R})$.

显然, 如果 a, b 相互垂直, 则 $\theta = \frac{\pi}{2}, \cos \theta = 0$, 故 $a \cdot b = 0$. 如果 $a = b$, 则 $\theta = 0$, 即 $a \cdot a = |a|^2$ 或者

$$|a| = \sqrt{a \cdot a}.$$

特别地, 对于坐标向量有

$$i \cdot i = 1, i \cdot j = 0, i \cdot k = 0,$$

$$j \cdot i = 0, j \cdot j = 1, j \cdot k = 0,$$

$$k \cdot i = 0, k \cdot j = 0, k \cdot k = 1.$$

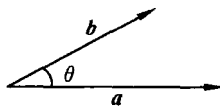


图 1-12

由此可得

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= a_x b_x \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_x b_y \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + a_x b_z \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} \\ &\quad + a_y b_x \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_y b_y \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + a_y b_z \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} \\ &\quad + a_z b_x \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + a_z b_y \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} + a_z b_z \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \\ &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \end{aligned}$$

即向量内积的坐标表达式为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1.6)$$

例 1.5 设 $\mathbf{a} = \{1, 2, 3\}$, $\mathbf{b} = \{2, 4, 2\}$, 试求 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 及 $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})$.

解 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1 \times 2 + 2 \times 4 + 3 \times 2 = 16$,

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = (3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \cdot (-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) = -3 - 12 + 5 = -10.$$

利用向量的内积可推得两向量垂直的充要条件为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \quad (1.7)$$

例 1.6 设 $\mathbf{a} = \{1, 3, 1\}$, $\mathbf{b} = \{2, -1, 1\}$, 试证: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

证明 因为 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 - 3 + 1 = 0$, 所以 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

>>> § 1.3 空间平面与直线的方程 <<<

1.3.1 空间曲面及其方程

在平面解析几何中, 我们知道, 如果一条平面曲线 C 和一个包含两个未知数的方程 $E: f(x, y) = 0$ 之间满足:

- (1) 曲线 C 上的点的坐标满足方程 E ,
- (2) 以方程 E 的解为坐标的点在曲线 C 上,

则称方程 E 为曲线 C 的方程, 亦称曲线 C 为方程 E 的图形. 在应用中为了方便, 也可以把(2)等价地叙述为:

- (2)' 不在曲线 C 上的点的坐标不满足方程 E .

可以将这个定义推广到空间直角坐标系中. 由于空间直角坐标系中, 点的坐标是三元有序数组, 因此, 方程应是包含三个未知数的方程 $E: F(x, y, z) = 0$, 而 S 则是空间的一张曲面. 空间曲面 S 和它的方程 $E: F(x, y, z) = 0$ 之间满足:

- (1) 曲面 S 上的点的坐标满足方程 E ,
- (2) 以方程 E 的解为坐标的点在曲面 S 上.