21世纪高等学校规划教材

大学数学基础

主编　杨松林　汪光先

苏州大学出版社

21世纪高等学校规划教材

大学数学基础

主编　杨松林　汪光先

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学数学基础/杨松林,汪光先主编.—苏州:苏州大学出版社,2009.1
21世纪高等学校规划教材
ISBN 978-7-81137-205-2

Ⅰ.大… Ⅱ.①杨…②汪… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第005775号

内容提要

本书是为适应课程体系变化而编写的高等教学教材,包括“解析几何”“微积分”“线性代数”“概率统计”“Mathematica软件使用入门”等大学数学基本内容,可供数学课程学时较少专业的学生使用,如文科类学生等。

大学数学基础

杨松林 汪光先 主编

责任编辑 谢金海

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市干将东路200号 邮编:215021)
宜兴文化印刷厂印装
(地址:宜兴市南漕镇 邮编:214217)

开本787 mm×960 mm 1/16 印张14.25 字数271千
2009年1月第1版 2009年1月第1次印刷
ISBN 978-7-81137-205-2 定价:21.80元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话:0512-67258835

《大学数学基础》编委会名单

主　编

杨松林　汪光先

编　　委

苏国荣　李文俊　杨松林　汪光先
武震东　葛　英　戴中寅

前 言

数学是人们理解世界的钥匙；

数学是大学生的思维体操；

数学日益成为社会科学、经济学和医学等学科重要的研究工具.

《大学数学》课程不仅对于理工科学生是不可缺少的基础知识，对于社会、经济和医学等专业学生也是十分有益的课程。

针对人文类学科和部分医、农类专业，后继课程需要的数学知识较少，数学课时相对也比较少。为了使学生对大学数学有一个概括的了解，初步掌握一些数学的思维方式和应用，提高个人的文化修养，我们编写了这本《大学数学基础》。在内容选取上，我们以"体会数学思想、了解数学方法、感受数学的和谐美"为宗旨。

第一部分"解析几何"，是由以哲学家传世的笛卡尔初创，体现"数"和"形"和谐统一的杰作；

第二部分"微积分"，看似深奥，其内部逻辑却极其严密，是缜密的数学思维的典范；

第三部分"线性代数"，似乎只要会四则运算就可以完成全部工作了，但其中大量环环相扣、紧密相联的数量关系和巧妙的计算方法，对于学生的思维能力无疑是有益的锻炼。

第四部分"概率统计"，是一种研究非确定性问题的数学，对于我们的学生，可能更会有直接的应用。

本书选材，得到游宏教授和黄毅生教授的指导。本书的编写出版得到苏州大学数学科学学院的大力支持。需要说明的是，本书的前身是卢钦和老师编写的《文科高等数学》，为了适应课程体系变化，我们进行了重新编写。鉴于卢钦和老师不再参与，我们在此谨表深深的谢意！也请卢钦和老师勿以本书之陋为嗔。

最后，我们感谢苏州大学出版社和谢金海同志，他们的辛勤工作使本书得以及时面世。

编　者

2009 年 1 月于苏州大学

目　录

第一章

空间解析几何

16 世纪以后，航海、天文、力学等方面的发展对初等几何学提出了挑战. 比如，开普勒(Kepler)发现行星是沿椭圆轨道绕太阳运行的，伽利略发现投掷物体是沿抛物线运行的. 要计算行星的椭圆形轨道、投掷物体的抛物线轨迹等，用初等几何学已难以解决，需要探索新的数学方法. 法国哲学家、数学家笛卡尔(Rene Descartes)在 1637 年发表的《方法论》中建立了坐标几何，即解析几何. 解析几何利用坐标系把点与数结合起来，然后把曲线作为在一定几何条件约束下的动点的轨迹，而约束条件用点的坐标所满足的方程表示，从而把曲线与方程结合起来. 这样，我们可用代数方法研究几何图形的各种性质. 笛卡尔的思想和方法是数学的一大进步，动点坐标——变量的使用对 16 世纪晚期微积分的产生具有直接影响.

>>>§1.1　空间直角坐标系<<<

先复习一下中学里我们已经学习过的平面直角坐标系. 在数轴 Ox(如图 1-1)的基础上建立第二条数轴 Oy，使它与 Ox 轴在原点处垂直相交，构成一个平面直角坐标系 Oxy. 在平面直角坐标系中，一个点 A 的位置可以用一个二元有序数组 (x,y) 表示，称为点的坐标. 由于位置是点的唯一几何性质，所以，坐标 (x,y) 完全地确定了点 A. 如图 1-2 所示我们可以用如下方式确定点 A 的坐标：过 A 作平行于 Oy 的直线交 Ox 于 B，B 在数轴 Ox 上的坐标即为 x，称为 A 的横坐标. 同样，过 A 作平行于 Ox 的直线交 Oy 于点 C，C 在数轴 Oy 上的坐标即为 y，称为点 A 的纵坐标.

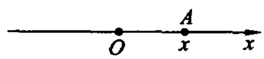

图 1-1

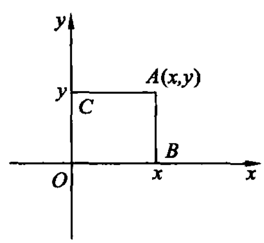

图 1-2

平面上只要选定两个相互垂直的方向，平面上的点就可以用一个二元有序数组表示，因此，我们称平面为二维的. 而我们生活的空间有三个相互垂直的方向，是三维的. 为了描述三维空间，我们再建立一条数轴 Oz，使它与平面直角坐标系 Oxy 垂直相交于原点 O，并用如下右手规则确定 Oz 的方向：当右手四指从 Ox 正方向以直角指向 Oy 正方向时，拇指所指的方向为 Oz 的正方向，如图 1-3. 这样一个坐标系称为**空间直角坐标系** $Oxyz$. 由于坐标轴方向由右手规则确定，又称为**右手系**. 在空间解析几何中，习惯上都使用右手系. 在图 1-3 所示坐标系中，O 点为**坐标原点**，Ox、Oy、Oz 分别称为**横轴、纵轴、竖轴**（或称为 x 轴、y 轴、z 轴）. 坐标轴 Ox 和 Oy 确定的平面称为 xOy **坐标平面**，坐标轴 Oy 和 Oz 确定的平面称为 yOz **坐标平面**，坐标轴 Oz 和 Ox 确定的平面称为 zOx **坐标平面**.

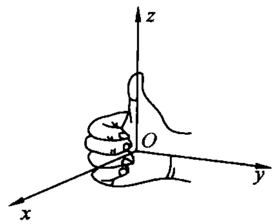

图 1-3

在空间建立空间直角坐标系后，空间中任一点可以用一个三元有序数组 (x,y,z) 表示. 和平面直角坐标系相类似，我们用如图 1-4 所示的方法确定空间点 M 的坐标，过 M 分别作平行于 yOz、zOx、xOy 坐标平面的平面，它们各自与坐标轴 Ox、Oy、Oz 交于 P、Q、R 三点. P 点在数轴 Ox 上的坐标记为 x，同样，Q、R 在数轴 Oy、Oz 上的坐标分别记为 y、z. 由过一点且平行于固定平面的平面的唯一性可知，三元有序数组 (x,y,z) 完全确定了点 M 的位置，我们称 (x,y,z) 为点 M 的**坐标**，并且分别称 x、y、z 为点 M 的**横坐标、纵坐标、竖坐标**（或称为 x 坐标、y 坐标、z 坐标）. 记作 $M(x,y,z)$.

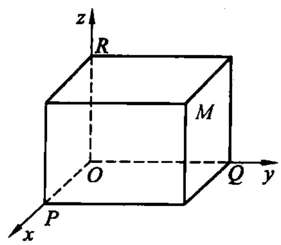

图 1-4

在空间不同点的坐标的符号有不同的特征. 例如：在 xOy 平面上方的点，它的 z 坐标为正，如果它同时又在 yOz 平面前面，则它的 x 坐标也为正；如果点 $M(x,y,z)$ 在 yOz 坐标面上，则 $x=0$；如果点 M 在 Ox 坐标轴上，则 $y=z=0$；坐标系原点的坐标为 $(0,0,0)$. 类似地，可以指出其它一些特殊位置上点的坐标. 三个坐标面把空间分成了八个部分，每一个部分称为一个**卦限**，因此三个坐标面将空间分成八个卦限. 在不同卦限的点的坐标的符号有不同的特征，列表如下：

符号 位置 坐标	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
x	+	−	−	+	+	−	−	+
y	+	+	−	−	+	+	−	−
z	+	+	+	+	−	−	−	−

现在，我们来计算空间一点 $M(x,y,z)$ 到原点 O 的距离. 如图 1-5，易知

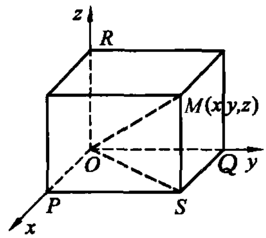

图 1-5

$$|OM|=\sqrt{|OS|^2+|SM|^2},$$

而

$$|OS|^2=|OP|^2+|PS|^2,$$

并且

$$|OP|=|x|,|PS|=|OQ|=|y|,$$
$$|SM|=|OR|=|z|,$$

所以我们有

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

这是空间点到原点的距离公式. 由此，我们可以得到空间两点的距离公式.

对于空间任意两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，如图 1-6，过 M_1、M_2 作各侧面分别平行于坐标平面的六面体，于是

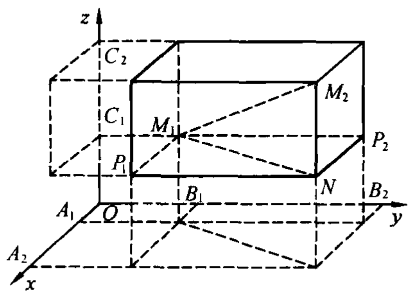

图 1-6

$$\begin{aligned}|M_1M_2|^2&=|M_1N|^2+|NM_2|^2\\&=|M_1P_1|^2+|P_1N|^2+|NM_2|^2\\&=|A_1A_2|^2+|B_1B_2|^2+|C_1C_2|^2.\end{aligned}$$

而

$$|A_1A_2|=|x_2-x_1|,$$
$$|B_1B_2|=|y_2-y_1|,$$
$$|C_1C_2|=|z_2-z_1|,$$

所以空间中 M_1、M_2 两点间的距离为

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1.1}$$

上式称为**空间两点间的距离公式**.

>>>§1.2 空间向量及其运算<<<

1.2.1 向量的概念

定义 1.1 既有大小,又有方向的量称为**向量**.

数学上用一条有方向的线段(称为有向线段)来表示向量.有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向表示向量的方向.

以 M_1 为起点,M_2 为终点的向量记为$\overrightarrow{M_1M_2}$.今后常用粗体小写字母 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 表示向量,书写时由于无法区别是否是粗体,所以常常在字母上面加上箭头如 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 来表示向量.

向量的大小称作向量的**模**,向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记作$|\boldsymbol{a}|$.

模等于 1 的向量称作**单位向量**.

模等于 0 的向量称作**零向量**,记作 $\boldsymbol{0}$,并规定:**零向量的方向为任意的**.

实际问题中,有些向量与起点有关(如作用于质点上的力),有些向量与起点无关(如气象学中的风).为了方便起见,除非特别声明外,我们研究的向量是指具有大小和方向的量,它的性质与起点位置无关,并称这种向量为**自由向量**,简称**向量**.

1.2.2 向量的加法与数乘

如果两向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的方向与模都相等,则称**两向量相等**,记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

显然,若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$,则两向量经过平行移动之后能完全重合.

如图 1-7,将向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 首尾相接,则以 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点、以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的**和**,记为

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

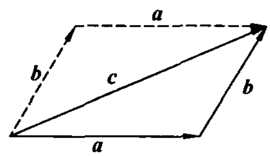

图 1-7

由于向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 构成一个三角形,所以,向量加法的这种计算规则称为**三角形法则**.

定义 1.2 设 λ 为任一实数,$\boldsymbol{a}$ 为一个向量,λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的**数乘**:

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}$$

是一个模为$|\lambda||\boldsymbol{a}|$的向量.当 $\lambda>0$ 时,它与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同;当 $\lambda<0$ 时,它与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反;当 $\lambda=0$ 时,我们无需关心方向,因为 $\lambda\boldsymbol{a}$ 模为零,是零向量,此时方向是任意的.

$-\boldsymbol{a}=(-1)\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 大小相等方向相反的向量，称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**.

当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时，向量 $\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，记为 $\boldsymbol{a}^{\circ}$.

若存在实数 λ 使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，则按定义，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向或反向，总之 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是平行的. 由于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是自由向量，故 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 可以平移到同一条直线上，所以，当 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 时，称 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为**共线**的.

向量的加法运算与数乘运算称为向量的线性运算，它们有如下运算规律：

(1) 加法交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

(2) 加法结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

(3) 数乘结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

(4) 数乘分配律：$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

这些运算律容易从它们的定义得到. 例如，从图 1-7 可知 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(实线)与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$(虚线)相等.

以上，我们用几何方法引进了向量及其线性运算. 显然，利用这些定义进行向量运算是不方便的，所以需要用代数方法来描述它们.

1.2.3　向量的代数形式

设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}$，如图 1-8，其中点 $M(x,y,z)$. 则有

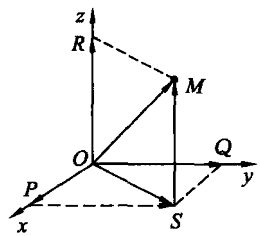

图 1-8

$$\overrightarrow{SM}=\overrightarrow{OR},$$
$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{SM}=\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{OR},$$
$$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{OQ},\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PS},$$

所以　$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$.

若记 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向的单位向量(如图 1-9，称为**坐标向量**)，则利用单位向量易知

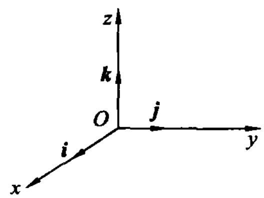

图 1-9

$$\overrightarrow{OP}=|\overrightarrow{OP}|\boldsymbol{i}=x\boldsymbol{i},$$
$$\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OQ}|\boldsymbol{j}=y\boldsymbol{j},$$
$$\overrightarrow{OR}=|\overrightarrow{OR}|\boldsymbol{k}=z\boldsymbol{k}.$$

于是　$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$.

因此，一个空间向量 $\boldsymbol{a}$ 可以写成

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}\tag{1.2}$$

的形式，称为向量 $\boldsymbol{a}$ **按坐标向量的分解式**. 由于坐标系建立后，坐标向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 就确定了，所以向量 $\boldsymbol{a}$ 完全由系数 a_x,a_y,a_z 确定. 于是我们又可以将一个向量

记为

$$\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}. \tag{1.3}$$

称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表达式**(用"{}"以示与点的坐标之区别),a_x,a_y,a_z 称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标**.显然,从几何意义上看,向量坐标的数值是自由向量起点置于原点时的终点坐标.

设向量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$,$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$,$\lambda$ 为实数,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})+(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}=\{a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z\},\end{aligned}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=\lambda a_x\boldsymbol{i}+\lambda a_y\boldsymbol{j}+\lambda a_z\boldsymbol{k}=\{\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z\},$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})=\{a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z\}.$$

总之,向量的加法和数乘等都可以通过坐标运算来进行.最后,由向量坐标的几何意义及(1.1)式,易知

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{1.4}$$

例 1.1 设 $\boldsymbol{a}=\{1,2,1\}$,$\boldsymbol{b}=\{2,3,5\}$,$\lambda=3$,试求:$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 及 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$.

解 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{3,5,6\}$,

$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=3\{1,2,1\}+\{2,3,5\}=\{5,9,8\}$,

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=3\{3,5,6\}=\{9,15,18\}$.

应用中,有时需要利用几何方法指定一个向量,即指定向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点、终点.设 $\boldsymbol{a}$ 为由起点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 指向终点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 的向量(图 1-10).则由加法法则有

$$\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}.$$

而 $\overrightarrow{OM_1}=\{x_1,y_1,z_1\}$,$\overrightarrow{OM_2}=\{x_2,y_2,z_2\}$,

故 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$

$$=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}. \tag{1.5}$$

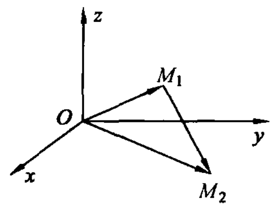

图 1-10

即向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标是终点坐标减去起点坐标.

例 1.2 设 $M_1(2,5,3)$,$M_2(1,7,6)$,试求 $\overrightarrow{M_1M_2}$、$\overrightarrow{M_2M_1}$ 和 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=\{1-2,7-5,6-3\}=\{-1,2,3\}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$,

$\overrightarrow{M_2M_1}=\{2-1,5-7,3-6\}=\{1,-2,-3\}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$,

$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$.

例 1.3 设 $\boldsymbol{a}=\{1,2,1\}$,$\boldsymbol{b}=\{2,4,2\}$,试证:$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 共线.

证明 因为显然有 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}$,所以 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$ 共线.

此例说明，如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线，则$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$. 注意这个连比，是一个形式符号，并非真正的比式，当某个分式分母为零时表示其相应分子也为零. 下面我们利用向量为工具，解决一个纯几何问题.

例 1.4　设有点 $A(x_A,y_A,z_A)$、$B(x_B,y_B,z_B)$，试求线段 AB 的中点 C.

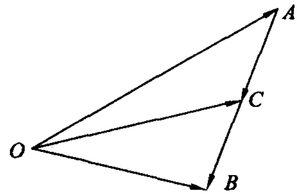

图 1-11

解　如图 1-11，因为

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA},$$

所以　$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$，

而　$\overrightarrow{OA}=\{x_A,y_A,z_A\}$，$\overrightarrow{OB}=\{x_B,y_B,z_B\}$，

所以　$\overrightarrow{OC}=\left\{\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right\}$，

即 C 点坐标为$\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$.

上例的结果通常称为**中点公式**.

1.2.4　向量的内积

定义 1.3　设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为向量，记 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$（如图 1-12）. 我们称数量

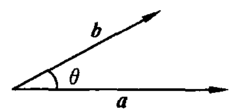

图 1-12

$$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

为**两向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的内积（数量积）**，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$. 即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

对于两向量的内积，我们不加证明地给出其运算律：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

(2) 分配律：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

(3) 结合律：$\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\quad(\lambda\in\mathbf{R})$.

显然，如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 相互垂直，则 $\theta=\frac{\pi}{2}$，$\cos\theta=0$，故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$. 如果 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，则 $\theta=0$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ 或者

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}.$$

特别地，对于坐标向量有

$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1$，$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0$，$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0$，

$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}=0$，$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1$，$\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0$，

$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}=0$，$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$.

由此可得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\
&=a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}\\
&\quad+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}\\
&\quad+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\\
&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.
\end{aligned}
$$

即向量内积的坐标表达形式为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{1.6}$$

例 1.5 设 $\boldsymbol{a}=\{1,2,3\}$,$\boldsymbol{b}=\{2,4,2\}$,试求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 及 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$.

解 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times2+2\times4+3\times2=16$,

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=(3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k})\cdot(-\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})=-3-12+5=-10.$

利用向量的内积可推得**两向量垂直的充要条件**为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0. \tag{1.7}$$

例 1.6 设 $\boldsymbol{a}=\{1,3,1\}$,$\boldsymbol{b}=\{2,-1,1\}$,试证:$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

证明 因为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2-3+1=0$,所以 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

>>>§1.3 空间平面与直线的方程<<<

1.3.1 空间曲面及其方程

在平面解析几何中,我们知道,如果一条平面曲线 C 和一个包含两个未知数的方程 E:$f(x,y)=0$ 之间满足:

(1) 曲线 C 上的点的坐标满足方程 E,

(2) 以方程 E 的解为坐标的点在曲线 C 上,

则称方程 E 为曲线 C 的方程,亦称曲线 C 为方程 E 的图形.在应用中为了方便,也可以把(2)等价地叙述为:

(2)′不在曲线 C 上的点的坐标不满足方程 E.

可以将这个定义推广到空间直角坐标系中.由于空间直角坐标系中,点的坐标是三元有序数组,因此,方程应是包含三个未知数的方程 E:$F(x,y,z)=0$,而 S 则是空间的一张曲面.空间曲面 S 和它的方程 E:$F(x,y,z)=0$ 之间满足:

(1) 曲面 S 上的点的坐标满足方程 E,

(2) 以方程 E 的解为坐标的点在曲面 S 上.