提分攻略

主编 蔡晔

疑难与规律详解

高考数学

全国百位名师联合编写

数理报 精编

龍門書局
www.longmenbooks.com

提分攻略

疑难与规律详解

高考数学

丛书主编 蔡 晔

丛书编委 李学镇 冯素梅 徐淑民 陈晓钟

刘贵军 李也莉 隋良永 张大蒙

《数理报》优秀作者编写

数理报 精编

龍門書局

北京

图书在版编目(CIP)数据

提分攻略:疑难与规律详解．高考数学/蔡晔主编．北京:龙门书局,2009
ISBN 978-7-5088-2078-1

Ⅰ．提…　Ⅱ．蔡…　Ⅲ．数学课—高中—升学参考资料　Ⅳ．G634.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 105406 号

责任编辑:田旭　赵瑞云　王艺超/封面设计:0504 设计

龍　門　書　局 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
www.longmenbooks.com
天时彩色印刷有限公司 印刷
科学出版社总发行　各地书店经销
*
2009 年 7 月第　一　版　　开本:B5(720×1000)
2009 年 7 月第一次印刷　　印张:13
字数:250 000

定　价:20.00 元

前言

您在学习中遇到过难以理解的知识点吗？
您在考试中碰到过难以解答的试题吗？
您还在苦苦的寻觅学习的规律、解题的技巧吗？
您还经常为那些“看似容易，一做就错”的易错题苦恼吗？

不要烦恼了，本书将全方位地从根本上帮您解决这一系列问题，帮助您快速、有效地突破学习瓶颈，创造优异成绩。

本书编写背景

新课标教学和新的中高考改革，越来越强调学生能力的培养，包括思维能力、实际应用能力和创新能力。在这三个能力之中，思维能力是核心、是基础。而思维能力的培养不是一蹴而就的，需要教师、教材、学生三个方面通过科学的教学、学习、训练才能见效。

目前各中学使用各种不同版本的教材，都是依据“新课标”的精神和要求编写的，内容新颖，知识覆盖面广。但由于教材本身的篇幅所限，造成教材内容对知识的深度挖掘和对思维的纵向拓展不够。因此，绝大多数教师需要自己花大功夫去研究教材和考试，针对不同学生的学习水平，开发不同的教学资料。学生们也必须根据自身情况寻找学习资源，研究学习对策。这无疑给广大师生带来很大的负担。

而《数理报》作为一份专门为一线教学服务的优秀报刊，非常好地解决了教材、教学、学习、考试等各个环节的衔接问题。为您释疑解难，归纳总结，让您能够灵活应用知识规律解决问题，并能有所创新。为广大师生的教学和学习扫清了障碍。

鉴于此，我们组织了一批经验丰富的一线优秀教师，将《数理报》5 年来积淀下来的精华内容进行重新加工和整合，根据“新课标”和“考试大纲”的要求，分模块、分年级编排成册。

本书具有以下优势

一、既具有报刊的深度和灵活性，又具有图书的广度和系统性。

报刊上的文章，均为一线优秀教师将自己的教学心得归纳整理而成。内容深刻、实用，针对性非常强。但报刊内容同时也有很大的先天缺陷，那就是随意性较强，不成系统。我们将其 5 年的精华内容整理、提升，编写成书，既弥补了其系统性不足的缺陷，又发挥了其灵活性的优势。

二、紧扣各版本教材，可以作为同步教学使用。

《数理报》是一份非常成熟、非常实用的优秀报刊，它已经得到了全国几百万师生的认可。《数理报》的版本配备比较全，是一份同步辅导报。本书融合了《数理报》所有新旧“大纲”的配版分刊，根据知识模块加以整合。因此，本书适合各版本不同学段的师生同步教学和学习使用。

三、内容覆盖面广，重点突出，专门解决“疑难”和“规律”问题。

本书的编写定位，就是为了解决教学、学习、考试中的疑难问题，总结归纳解决问题的方法规律，旨在为广大师生突破教学、学习中的难点，找到提高思维能力的捷径。

本书将您学习中已经遇到和将要遇到的各类疑难各个击破，将学习中的窍门和规律一网打尽，为您的学习扫清障碍、铺路搭桥。

四、本书编写队伍庞大、实力雄厚。

多年来，《数理报》汇集了一大批优秀的一线作者，他们来自全国各地、各级中学的教育教学一线，有的是德高望重的教育教学专家，有的是教学成绩优异的中年骨干教师，还有崭露头角的年轻一代。总之，他们是我国目前中学教学一线优秀教师的代表，是我们教师队伍的精英。

本书使用建议

本丛书是对学生课堂学习的必要补充，主要针对学生学习的疑难点、易错点以及思维规律进行剖析和概括，帮助学生突破学习的薄弱环节。

本书内容分为三大部分，需要同学们根据自身的学习情况选择使用。

“知识疑难解读”针对课本各章节的重点、难点，给出详细的讲解和点拨。

此栏目需要同学们在掌握了课本知识的基本概念后使用。

“思维规律解读”总结了各章节的各类思维和解题规律，分析点拨了应用问题、探索性和开放性问题的解题思路，并针对中(高)考对各章节考查的重点考点做了剖析。

这一栏目的思维要求较高，例题有一定的难度，需要同学们首先弄懂课本上的例题和思维方法，再来研读。

“思维误区破解”精选学生容易出现的错误理解和错误解题思路，作深刻剖析，并向正确的思维引导学生。

同学们在研读这一栏目内容时，要结合自己的错题笔记，融会贯通，切勿死记硬背。

愿我们的劳动能帮助您跳出题海，享受思维探究的乐趣，体验学习成功的喜悦！

本书编写组

目录

第一部分　选择题、填空题解题规律全解

CONTENTS

第二部分　解答题解题规律全解

第三部分　数学思想应用规律全解

第四部分　高考零失误应试规律破解

第一部分　选择题、填空题解题规律全解

专题一　活用速解法巧答选择题

专题高考剖析

高考试题中选择题、填空题、解答题每种题型都有一定的梯度，其中选择题并非都是基础题、简单题. 从近几年的高考可以清楚地看出这一点. 选择题的分值份量及在试卷中的位置，决定了快速与准确地做好选择题的重要性.

解题规律详解

一、整体运算

例 1 已知 $\sin\alpha\cos\beta=-\frac{1}{2}$，则 $\cos\alpha\sin\beta$ 的范围是　　(　　)

(A) $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$　　(B) $\left[-\frac{1}{2},1\right]$

(C) $\left[-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right]$　　(D) $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

【解析】 设 $\cos\alpha\sin\beta=t$，则

$$\begin{cases}\left|-\frac{1}{2}+t\right|=|\sin(\alpha+\beta)|\leqslant 1,\\ \left|-\frac{1}{2}-t\right|=|\sin(\alpha-\beta)|\leqslant 1.\end{cases}$$

可知 $-\frac{1}{2}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$，故选(D).

点评：本题利用三角公式，借助整体运算很快得出结论，值得一提的是，本题若仅用一个三角公式，将产生错误的结论.

二、巧妙作图

例 2 空间中从一点出发的四条射线两两夹角为 α，则 $\cos\alpha$ 等于　　(　　)

(A) $-\frac{1}{4}$　(B) $-\frac{1}{3}$　(C) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　(D) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】 视空间中该点为正四面体外接球的球心，四条射线为以球心为端点过正四面体的四个顶点的四条线. 易求得：$\cos\alpha=-\frac{1}{3}$，故选(B).

点评：欲求 $\cos\alpha$，首先要作出 α，如何作呢？借助正四面体，可将问题转化为“四条射线为以球心为端点过正四面体的四个顶点的四条线”，于是结论即可产生.

例 3 若一条直线与一个正四棱柱各个面所成的角都为 α，则 $\cos\alpha$ 等于　　(　　)

(A) $\frac{\sqrt{6}}{6}$　(B) $\frac{1}{2}$　(C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$　(D) $\frac{\sqrt{6}}{4}$

【解析】 因为正方体的对角线与各个面所成的角都相等，设为 α，棱长设为 a，

则其体对角线长为 $\sqrt{3}a$，面对角线长为 $\sqrt{2}a$，

易求得 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 故选(C).

点评：本题突出考查了对空间图形的想象能力和逻辑推理能力，分析出正方体是突破该题的关键.

三、数形结合

例 4 已知 $f(x)=\log_a(x^2-ax+3)$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 满足对于任意 x_1,x_2，当 $x_1<x_2<\frac{a}{2}$ 时，总有 $f(x_1)-f(x_2)>0$，那么实数 a 的取值范围是　　(　　)

(A) $(0,3)$　　(B) $(1,3)$

(C) $(0,2\sqrt{2})$　　(D) $(1,2\sqrt{3})$

【解析】 二次函数 $y=x^2-ax+3$ 的图象是

开口向上的抛物线，且对称轴为 $x=\frac{a}{2}$. 结合图形可知，当 $x_1<x_2<\frac{a}{2}$ 时，函数 $y=x^2-ax+3$ 递减；

又当 $x_1<x_2<\frac{a}{2}$ 时，$f(x_1)>f(x_2)$，即 $f(x)$ 也递减，因此 $a>1$. 注意到"总有"，所以 $\Delta=a^2-4\times3<0$，

解得 $a<2\sqrt{3}$，故选(D).

点评：抓住二次函数的图象，通过二次函数的单调性产生问题的结论.

四、引入函数

例 5 若 $a,b,c\in\mathbf{R}$ 且 $a+b+c>0$，$ab+bc+ca>0$，$abc>0$，则 ( )

(A)$a>0,b<0,c<0$

(B)$a<0,b<0,c>0$

(C)$a<0,b>0,c<0$

(D)$a>0,b>0,c>0$

【解析】 引入函数 $f(x)=(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$，易知：$x\geqslant0$ 时，$f(x)>0$，

即 $f(x)$ 的图象与 x 轴的非负半轴无交点，

则三交点 $(-a,0)$，$(-b,0)$，$(-c,0)$ 均在 x 轴负半轴上，故选(D).

点评：本题的求解很巧妙，引入一个特殊函数，又发现了它的几个特殊点，问题一下子变得简单了，结论也随之产生.

五、巧设变元

例 6 已知△ABC 的三边长 a,b,c 满足：(1)$a>b>c$，(2)$2b=a+c$，(3)b 为整数，(4)$a^2+b^2+c^2=84$，则 b 的值为 ( )

(A)5 (B)4 (C)3 (D)2

【解析】 设 $a=b+d$，$c=b-d(d>0)$，则

$(b+d)^2+b^2+(b-d)^2=84$，即 $3b^2+2d^2=84$，又 b 为整数，故 b 可能取 1,2,3,4,5，又知 $b>d$，代入验证得 $b=5$，故选(A).

六、分析极端

例 7 在正 n 棱锥中，相邻两侧面所成的二面角的取值范围是 ( )

(A)$\left(\frac{n-2}{n}\pi,\pi\right)$ (B)$\left(\frac{n-1}{n}\pi,\pi\right)$

(C)$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ (D)$\left(\frac{n-2}{n}\pi,\frac{n-1}{n}\pi\right)$

【解析】 当正 n 棱锥的高无限增大时，相邻两侧面所成的二面角无限接近于正 n 边形的内角 $\frac{n-2}{n}\pi$；当正 n 棱锥的高无限缩小时，相邻两侧面所成的二面角无限接近于 π. 故选(A).

点评：本题若是追求直接求解，将很难完成，通过极端分析，结论便很快产生.

例 8 如图 1-1 所示，在四面体 $ABCD$ 中，截面 AEF 经过四面体的内切球（与四个面都相切的球）球心 O，且与 BC，DC 分别截于 E，F. 如果截面将四面体分为体积相等的两部分，设四棱锥 $A-BEFD$ 与三棱锥 $A-EFC$ 的表面积分别为 S_1，S_2，则必有 ( )

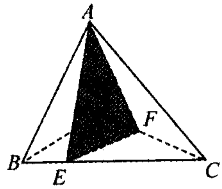


图 1-1

(A)$S_1<S_2$

(B)$S_1>S_2$

(C)$S_1=S_2$

(D)S_1，S_2 的大小关系不能确定

【解析】 由于本题中两个棱锥的高相等，故由体积相等可得 $S_{四边形BEFD}=S_{\triangle CEF}$，于是，侧面积的大小只与侧面三角形的面积有关. 而各侧面的斜高相等，故问题转化为各三角形的底边长的关系. 不妨取 E 与 B 重合，则 F 为 DC 的中点，此时 $S_1=S_2$. 故选(C).

点评：本题主要考查棱锥的体积、表面积及正四面体的性质，考查了同学们的空间想象能力及逻辑推理能力，突出了转化的数学思想，取特例是本题的一种技巧，若开始就想到这里，则问题立即可解.

七、妙用特殊

1. 选用特殊值进行推理和计算

例 9 已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\sin x-|a|$，$x\in\mathbf{R}$ 为奇函数，则 a 等于 ( )

(A)0 (B)1 (C)-1 (D)±1

【解析】 函数 $f(x)=\sin x-|a|(x\in\mathbf{R})$ 为

奇函数，所以对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(0)=0$.

又 $f(0)=\sin0-|a|$，所以 $a=0$. 故选(A).

点评：本题主要考查函数奇偶性的概念，对于选择题的求解，可取特殊值，由 $f(0)=0$ 求解，此种方法简单易求.

2. 选用特殊值进行验证

例 10 若关于 x 的不等式 $(1+k^2)x\leqslant k^4+4$ 的解集是 M，则对任意实常数 k，总有 ( )

(A) $2\in M,0\in M$　(B) $2\notin M,0\notin M$

(C) $2\in M,0\notin M$　(D) $2\notin M,0\in M$

【解析】 令 $x=2$，则 $k^4+4-2(1+k^2)=k^4-2k^2+2=(k^2-1)^2+1\geqslant0$ 成立；

令 $x=0$ 得 $k^4+4\geqslant0$ 成立，故选(A).

点评：本题主要考查同学们对知识的灵活应用能力，当题目较难或求解比较复杂时，可以采用特值法.

3. 选用特殊位置进行推理

例 11 函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{19}|x-n|$ 的最小值为 ( )

(A)190　(B)171　(C)90　(D)45

【解析】 $|x-n|$ 的几何意义表示数轴上的动点 x 到定点 n 的距离($n=1,2,\cdots,19$)，当动点 x 取点 $1,2,\cdots,19$ 的中间定点时，距离的和最小，即 $x=10$ 时，$f(x)_{\min}=9+8+\cdots+1+0+1+\cdots+9=90$. 故选(C).

点评：本题主要考查绝对值的几何意义，用到了数形结合的方法.

例 12 对于直角坐标平面内的任意两点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，定义它们之间的一种"距离"：$|AB|=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$.

给出下列三个命题：

①若点 C 在线段 AB 上，则 $|AC|+|CB|=|AB|$；

②在 $\triangle ABC$ 中，若 $\angle C=90°$，则 $|AC|^2+|CB|^2=|AB|^2$；

③在 $\triangle ABC$ 中，$|AC|+|CB|>|AB|$.

其中真命题的个数为 ( )

(A)0　(B)1　(C)2　(D)3

【解析】 进行特殊化处理，取 $\triangle ABC$ 为 Rt$\triangle$，$AC/\!/y$ 轴，$BC/\!/x$ 轴知①为真；②、③为假，故选(B).

点评：本题主要考查同学们的创新意识和创新能力，以及分析新问题、解决新问题的能力，这种创新题型将是高考的一种命题趋势.

4. 选用特殊图形进行推理

例 13 设平面向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$ 且 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=\mathbf{0}$. 如果平面向量 $\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\boldsymbol{b}_3$ 满足 $|\boldsymbol{b}_i|=2|\boldsymbol{a}_i|$，且 $\boldsymbol{a}_i$ 顺时针旋转 30°后与 $\boldsymbol{b}_i$ 同向，其中 $i=1,2,3$，则 ( )

(A) $-\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3=\mathbf{0}$　(B) $\boldsymbol{b}_1-\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3=\mathbf{0}$

(C) $\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2-\boldsymbol{b}_3=\mathbf{0}$　(D) $\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3=\mathbf{0}$

【解析】 不妨设向量 $\boldsymbol{a}_i$ 的模相等，夹角均为 120°，则将向量 $\boldsymbol{a}_i$ 旋转 30°，且模变为原来的 2 倍后，与向量 $\boldsymbol{b}_i$ 的模相等，且夹角均为 120°，则 $\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2+\boldsymbol{b}_3=\mathbf{0}$. 故选(D).

点评：本题主要考查向量的运算，用到了数形结合、特例的思想方法，掌握向量的基本运算，会借助图形分析问题、解决问题是高考的基本要求.

5. 选用特殊点确定点的轨迹方程

例 14 曲线 $y^2=4x$ 关于直线 $x=2$ 对称的曲线方程是 ( )

(A) $y^2=8-4x$　(B) $y^2=4x-8$

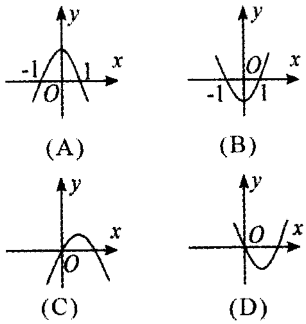
(C) $y^2=16-4x$　(D) $y^2=4x-16$

【解析】 取已知曲线 $y^2=4x$ 的顶点(0,0)，则关于 $x=2$ 的对称点为(4,0)，把(4,0)代入四个选项，可排除(A)，(B). 又结合图象知所求曲线开口向左，所以一次项系数一定为负，故应选(C).

点评：本题解法较多，可以根据图象平移法或代入法求轨迹，但特殊点的确能快速准确地求解问题.

6. 选用特殊点解答函数图象问题

例 15 设 $b>0$，二次函数 $y=ax^2+bx+a^2-1$ 的图象为下列之一，则实数 a 的值为 ( )



(A)1　　　　(B)-1

(C)$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$　　　　(D)$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

【解析】 由第一、二个图形可知，与 x 轴的两个交点为对称点，则两根之和为 0.

又已知 $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\neq0$，所以必不是前两个图象. 又由后两个图形知，$-\dfrac{b}{2a}>0$，而 $b>0$，所以 $a<0$，开口向下，故应为第三个图形.

又图象过原点，所以 $a^2-1=0$，结合 $a<0$，所以 $a=-1$. 选(B).

点评：选择恰当的点（如对称点与原点）在题目解决中起到关键性的作用.

例 16 要得到函数 $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的图象，只需将函数 $y=\sin2x$ 的图象　　(　　)

(A)向左平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位

(B)向右平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位

(C)向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位

(D)向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位

【解析】 函数 $y=\sin2x=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{2}\right)$，

取函数的两个最大值点，

令 $2x_1-\dfrac{\pi}{4}=0$，$2x_2-\dfrac{\pi}{2}=0$，

则 $x_1=\dfrac{\pi}{8}$ 与 $x_2=\dfrac{\pi}{4}$，由 $\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{\pi}{8}$ 知

只需将函数 $y=\sin2x$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{8}$ 个单位. 故选(A).

点评：同学们复习中应注意通性通法，五点法在画三角函数图象中起着关键作用. 同时，又是解决三角形函数图象问题的关键，抓了"五点"能起到事半功倍的效果.

7. 选用特殊点解答解析几何中的求值问题

例 17 过抛物线 $y=ax^2(a>0)$ 的焦点 F 作一条直线交抛物线于 P,Q 两点，若线段 PF 与 FQ 的长分别是 p,q，则 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}$ 等于　(　　)

(A)$2a$　(B)$\dfrac{1}{2a}$　(C)$4a$　(D)$\dfrac{1}{4a}$

【解析】 抛物线 $x^2=\dfrac{1}{a}y$ 的焦点为 $F\left(0,\dfrac{1}{4a}\right)$. 取点 P,Q，使 PQ 所在直线平行于 x 轴，其直线方程为 $y=\dfrac{1}{4a}$，与 $y=ax^2$ 联立解出 $x=\pm\dfrac{1}{2a}$，有 $p=q=\dfrac{1}{2a}$，此时 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=4a$，故选(C).

8. 选用特殊点解答立体几何中的取值问题

例 18 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，P,Q 分别是侧棱 AA_1,CC_1 上的点，且 $A_1P=CQ$，则四锥棱 $B_1-A_1PQC_1$ 的体积与多面体 $ABC-PB_1Q$ 的体积之比为　(　　)

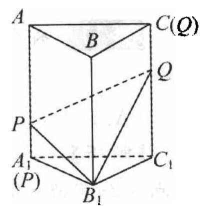


图 1-2

(A)$\dfrac{1}{2}$　(B)$\dfrac{1}{3}$　(C)$\dfrac{1}{4}$　(D)$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【解析】 如图 1-2，令 $A_1P=CQ=0$，则原多面体 $ABC-PB_1Q$ 变为四棱锥 $C-AA_1B_1B$，原四棱锥 $B_1-A_1PQC_1$ 变为三棱锥 $C-A_1B_1C_1$.

显然 $V_{C-A_1B_1C_1}=\dfrac{1}{3}V_{棱柱}$，

所以 $V_{C-A_1B_1C_1}:V_{C-AA_1B_1B}=\dfrac{1}{2}$. 故选(A).

点评：在满足已知条件下，让 P 与 A_1 重合，Q 与 C 重合，把不规则图形转化为能求解的规则图形求解，真可谓"极地探险，绝处逢生".

八、合理预测

例 19 若实数 x,y 满足 $1+\cos^2(2x+3y-1)=\dfrac{x^2+y^2+2(x+1)(1-y)}{x-y+1}$，则 xy 的最小值为 ( )

(A)$\dfrac{1}{25}$ (B)$\dfrac{1}{24}$ (C)$\dfrac{1}{23}$ (D)$\dfrac{1}{22}$

【解析】这是与三角函数有关的式子，求解时可能会用到三角函数的有界性.

因为 $1+\cos^2(2x+3y-1)\leqslant 2$，

预测 $\dfrac{x^2+y^2+2(x+1)(1-y)}{x-y+1}\geqslant 2$.

$$\frac{x^2+y^2+2(x+1)(1-y)}{x-y+1}$$
$$=\frac{(x-y)^2+2(x-y)+2}{x-y+1}$$
$$=\frac{(x-y+1)^2+1}{x-y+1}$$
$$=(x-y+1)+\frac{1}{x-y+1},$$

因为 $\dfrac{x^2+y^2+2(x+1)(1-y)}{x-y+1}>0$，故预测正确.

此时 $\begin{cases}x-y+1=1,\\2x+3y-1=k\pi(k\in\mathbf{Z}).\end{cases}$

所以 $x=y=\dfrac{k\pi+1}{5}$，

故 $xy=(\dfrac{k\pi+1}{5})^2\geqslant\dfrac{1}{25}$.

即 xy 的最小值为 $\dfrac{1}{25}$，故选(A).

点评：数学的规律性与和谐性为预测提供了基础，依据题目的信息特征，首先对试题条件及结论的深层进行分析，然后进行初步预测，最后逐步验证是求解数学的思路之一.

九、变换视角

例 20 关于 x 的方程 $x^4-2ax^2-x+a^2-a=0$ 有两实根，则实数 a 的取值范围为 ( )

(A)$\left[-\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right)$ (B)$\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right)$

(C)$\left[-\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right]$ (D)$\left(-\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right]$

【解析】由题意知 $a^2-(2x^2+1)a+x^4-x=0$，由于 $x^4-x=(x^2-x)(x^2+x+1)$，故方程可变为：

$[a-(x^2-x)]\cdot[a-(x^2+x+1)]=0$，

即 $(x^2+x+1-a)(x^2-x-a)=0$.

由 $\begin{cases}1-4(1-a)\geqslant 0,\\(-1)^2+4a<0.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}1-4(1-a)<0,\\(-1)^2+4a\geqslant 0.\end{cases}$ 得：

$-\dfrac{1}{4}\leqslant a<\dfrac{3}{4}$，故选(A).

点评：本题解关于 x 的方程难度很大，换个角度看关于 a 的方程，结论立即可以产生.

十、抓住本质

例 21 椭圆 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2(a>b>0)$ 和圆 $x^2+y^2=\left(\dfrac{b}{2}+c\right)^2$ 有四个交点，其中 c 为椭圆的半焦距，则椭圆离心率 e 的范围为 ( )

(A)$\dfrac{\sqrt{5}}{5}<e<\dfrac{3}{5}$ (B)$0<e<\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

(C)$\dfrac{\sqrt{2}}{5}<e<\dfrac{\sqrt{3}}{5}$ (D)$\dfrac{\sqrt{3}}{5}<e<\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

【解析】此题的本质是椭圆的两个顶点 $(a,0)$ 与 $(0,b)$ 一个在圆外而一个在圆内，即

$$\begin{cases}a^2>(\frac{b}{2}+c)^2,\\b^2<(\frac{b}{2}+c)^2.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>\frac{b}{2}+c,\\b<\frac{b}{2}+c.\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(a-c)^2>\frac{1}{4}(a^2-c^2),\\\sqrt{a^2-c^2}<2c.\end{cases}\Rightarrow\frac{\sqrt{5}}{5}<e<\frac{3}{5}.$$

故选(A).

点评：有些选择题就是在某一知识点或某一技能处设卡，同学们若能认清本质，抓住关键，做到"一语道破"，往往可以达到速解的目的.

专题二　高考填空题归纳解析

专题高考剖析

填空题是高考数学客观题之一，由于填空题设计的跨度大、覆盖面广、形式灵活多变、能力要求较高，因而历年高考这类题型得分较低．从题型及内容上看，绝大多数填空题是计算型(尤其是推理计算型)和概念判断型，解答时必须进行切实可行的计算或者合乎逻辑的推演判断，几乎没有间接法可言，更是无从猜答．

填空题解题的基本原则是“小题不能大做”，解题的基本策略是“巧做”．本文将高考数学填空题常见类型加以归纳解析，以飨读者．

解题规律详解

一、基础知识型填空题

这类填空题主要考查课本知识的基础内容，可采用直接求解法，这是解填空题时常用的基本方法．

例 1　(1)安排 7 位工作人员在 10 月 1 日至 10 月 7 日值班，每人值班一天，其中甲、乙二人都不安排在 10 月 1 日和 2 日，不同的安排方法共有________种(用数字作答)．

(2)设函数 $f(x)=\cos(\sqrt{3}x+\varphi)(0<\varphi<\pi)$．若 $f(x)+f'(x)$ 是奇函数，则 $\varphi=$________．

【解析】(1)第一步，先安排甲、乙二人，应排 3 日至 7 日，共有 A_5^2 种；

第二步，再安排其他 5 人，有 A_5^5 种．

由分步计数原理，得 $A_5^2\times A_5^5=2400$(种)．

(2)$f(x)+f'(x)=\cos(\sqrt{3}x+\varphi)-\sqrt{3}\sin\left(\sqrt{3}x+\varphi\right)=-2\sin\left(\sqrt{3}x+\varphi-\frac{\pi}{6}\right)$，

又 $f(x)+f'(x)$ 是奇函数，则有 $\varphi-\frac{\pi}{6}=k\pi$，即 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$．又 $0<\varphi<\pi$，故 $\varphi=\frac{\pi}{6}$．

点评：问题(1)运用了元素优先排列法进行分步计数，而问题(2)考查了导数的定义．

二、多选型填空题

多选型填空题是指：给出若干个命题或结论，要求从中选出所有满足题意的命题或结论．这类题不论多选还是少选都是不能得分的．可采用正面肯定或反面否定的方法求解，举反例是否定一个命题的最有效方法．

例 2　下列四个命题中，真命题的序号有________(写出所有真命题的序号)．

①将函数 $y=|x+1|$ 的图象按向量 $\boldsymbol{v}=(-1,0)$ 平移，得到的图象对应的函数表达式为 $y=|x|$；

②圆 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 与直线 $y=\frac{1}{2}x$ 相交，所得弦长为 2；

③若 $\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}$，$\sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{3}$，则 $\tan\alpha\cot\beta=5$；

④如图 1-3，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，P 为底面 $ABCD$ 内一动点，P 到平面 AA_1D_1D 的距离与到直线 CC_1 的距离相等，则 P 点的轨迹是抛物线的一部分．

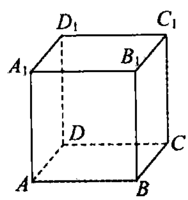


图 1-3

【解析】对于①：平移后函数为 $y=|x+2|$，

故命题①错误．

对于②：圆的圆心$(-2,1)$，半径为 2，

则圆心到直线的距离 $d=\frac{|-2-2|}{\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}\neq\sqrt{3}$，故命题②错误．

对于③：由题意，得

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2},\\ \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{3}.\end{cases}$$

两者相加，得 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{5}{12}$；

两者相减，得 $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{12}$.

故 $\tan\alpha\cot\beta=5$. 从而命题③正确.

④由题意知 P 到面 AA_1D_1D 的距离等于到 AD 的距离，到 CC_1 的距离等于到点 C 的距离，由抛物线的定义可得④正确. 综上可知，应填③④.

点评：填空题中出现的多选问题考查的知识点较多，相当于四个命题，对每个命题都要作出准确的判断，否则前功尽弃，对把握不准的命题要从多角度去分析和理解，做到万无一失.

三、类比推理型填空题

这类填空题是根据两个对象之间一部分属性相同或相似，从而推断出这两个对象另外的一些属性也可能相同或相似的一种思维形式. 常由二维类比推理到三维，如平面到空间，圆到球；还有平行类比，如从等差数列性质类比等比数列性质，从椭圆性质类比双曲线性质等.

例 3 半径为 r 的圆的面积 $S(r)=\pi r^2$，周长 $C(r)=2\pi r$，若将 r 看作 $(0,+\infty)$ 上的变量，则 $(\pi r^2)'=2\pi r$. ①

①式可用语言叙述为：圆的面积函数的导数等于圆的周长函数.

对于半径为 R 的球，若将 R 看作 $(0,+\infty)$ 上的变量，请你写出类似于①的式子：__________________________________. ②

②式可用语言叙述为：__________________.

【解析】只要写出球的体积公式及球的表面积公式，运用导数将它们沟通起来即可，可填 $(\frac{4}{3}\pi R^3)'=4\pi R^2$. 球的体积函数的导数等于球的表面积函数.

点评：本题是已知圆的一个性质，类比推理球的一个性质. 同时本题也是从低维向高维的类比.

四、探索型填空题

探索型填空题是指：从给定的题设中探究其相应的结论或从题目的要求中探究其必须具备的相应条件.

例 4 如图 1-4，已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 1，高为 8，一质点自 A 点出发，沿着三棱柱的侧面绕行两周到达 A_1 点的最短路线的长为________.

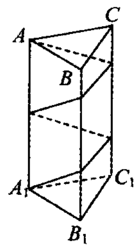


图 1-4

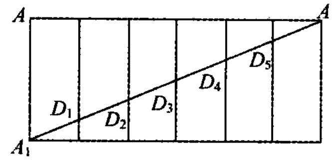


图 1-5

【解析】设与各侧面的交点分别为 D_1,D_2,D_3,D_4,D_5，由平面展开图（如图 1-5）知，从 A_1 到 A 的距离为 $|A_1D_1|+|D_1D_2|+\cdots+|D_5A|\geqslant|AA_1|$，而 $|AA_1|=\sqrt{8^2+(6\times1)^2}=10$.

点评：本题考查同学们动手操作能力及全面分析和解决问题的能力，运用"展平法"是解决多面体和旋转体表面距离最短问题的有效手段.

五、构造型填空题

这类填空题往往用直接法较难解决. 因此在解题过程中要设法将条件或结论构造成另一种形式，才可找到解决问题的捷径，常用的方法有构造图形法，构造函数法，构造数列法，构造向量法等.

例 5 在三棱锥 $O-ABC$ 中，三条棱 OA,OB,OC 两两互相垂直，且 $OA=OB=OC$，M 是 AB 边的中点，则 OM 与平面 ABC 所成角的正切值是________.

【解析】如图 1-6 所示，将此三棱锥补成正方体. 连结 CM，则 OM 与平面 ABC 所成角的大小就是 $\angle OMC$.

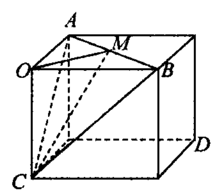


图 1-6

在 $\mathrm{Rt}\triangle OMC$ 中，有

$$\tan\angle OMC=\frac{OC}{OM}=\frac{OC}{\frac{\sqrt{2}}{2}OC}=\sqrt{2}.$$

点评：补形构造是立体几何中常用的解题技巧，它能将一般几何体的有关问题放在通过补形形成的特殊几何体中求解．当然，对补形前后的两种图形的内在联系应该非常熟悉才是求解的关键．

六、新定义型填空题

该类问题即时定义新情景，给出一定容量的新信息，要求同学们依据新信息进行解题．必须紧扣新信息的意义，学会语言的翻译、新旧知识的转化，便可使问题顺利获解．

例 6 非空集合 G 关于运算 $\oplus$ 满足：(1)对任意 $a,b\in G$，都有 $a\oplus b\in G$；(2)存在 $e\in G$，使得对一切 $a\in G$，都有 $a\oplus e=e\oplus a=a$，则称 G 关于运算 $\oplus$ 为"融洽集"．现给出下列集合和运算：

①$G=\{$非负整数$\}$，$\oplus$为整数的加法；

②$G=\{$偶数$\}$，$\oplus$为整数的乘法；

③$G=\{$平面向量$\}$，$\oplus$为平面向量的加法；

④$G=\{$二次三项式$\}$，$\oplus$为多项式的加法；

⑤$G=\{$虚数$\}$，$\oplus$为复数的乘法．

其中 G 关于运算为"融洽集"的是________．(写出所有"融洽集"的序号)．

【解析】 ①对，满足两个条件．②错，不满足条件(2)．③对，满足两个条件．④错，不满足条件(1)，如 $a=x^2+y^2+x,b=-x^2-y^2-x$．⑤错，不满足条件(1)，如 $a=3\mathrm{i},b=4\mathrm{i}$．综上可知，应填①③．

点评：挖掘定义，合理选择求解方案，是求解这类"新定义型"填空题的关键，本题同时也是一道多选型填空题．

七、信息给予型填空题

这类填空题具有背景较新，信息量大的特点，快速发现规律是求解关键．

例 7 在德国不莱梅举行的第 48 届世乒赛期间，某商场橱窗里用同样的乒乓球堆成若干堆"正三棱锥"形的展品，其中第一堆只有一层，就一个球；第 2，3，4，…堆最底层（第一层）分别按图 1-7 所示方式固定摆放．从第二层开始，每层的小球自然垒放在下一层之上，第 n 堆第 n 层就放一个乒乓球．

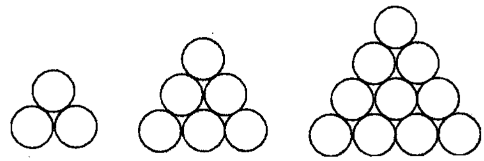


图 1-7

以 $f(n)$ 表示第 n 堆的乒乓球总数，则 $f(5)=$________；$f(n)=$________（答案用 n 表示）．

【解析】 $f(1)=1$，观察可知 $f(2)=4,f(3)=10,f(4)=20$，下一堆的个数是上一堆的个数加上其最底层（第一层）的个数，而最底层（第一层）的个数分别满足 1，3，6，10，…，其通项公式是$\frac{n(n+1)}{2}$，所以 $f(5)=f(4)+15=35$．

因为 $f(1)=1=\frac{1(1+1)(1+2)}{6}$；

$f(2)=4=\frac{2(2+1)(2+2)}{6}$；

$f(3)=10=\frac{3(3+1)(3+2)}{6}$；

$f(4)=20=\frac{4(4+1)(4+2)}{6}\cdots$，

所以可归纳得 $f(n)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$．

专题三 集合及其运算

专题高考剖析

高考对本专题的考查以选择题、填空题为主，且都是基础题，难度不大，综合题目少，属于高考中的"送分题"，总分值约 4～5 分．

考点主要有三个：(1)考查对集合概念与集合运算的认识和理解，如元素与集合的关系、集合与集合的关系等；(2)以集合为载体考查其他知识（不等式、函数、三角函数、解析几何等），突出考查同学们使用数学语言的能力和使用数形结合思想解决问题的能力；(3)以集合语言为背景的应用性、开放性试题，主要考查同学们对数学问题的"观察、猜测、抽象、概括、证明"及创

造性地解决问题的能力.

解题规律详解

一、集合概念及其基本运算型

解答此类题目的一般策略是:①弄清集合中的元素是什么,即弄清楚集合的元素特性;②一般抽象集合问题往往借助于 Venn 图求解,数集之间的运算常用数轴表示,有限集问题常用穷举法求解;③因集合运算的题目多以选择题的形式出现,所给集合又常是非具体的集合,因此特例法是解决此类问题的常用方法之一.

例 1 设集合 $U=\{1,2,3,4\}$,$A=\{1,2\}$,$B=\{2,4\}$,则 $\complement_U(A\cup B)$等于 ( )

(A)$\{2\}$　　(B)$\{3\}$

(C)$\{1,2,4\}$　　(D)$\{1,4\}$

【解析】 因为 $A\cup B=\{1,2,4\}$,

所以 $\complement_U(A\cup B)=\{3\}$,故选(B).

点评: 本题主要考查集合的运算.解答此类题目的关键是明确集合中的元素及正确把握集合间的运算关系.

二、集合与函数结合型

解答此类题目时要注意以下几点:①解答集合与函数的综合题时,要注意灵活运用集合的相关知识,掌握函数定义域、值域的求法及图象与性质的应用;②要充分利用数形结合的数学思想;③要弄清集合中的元素是什么?(自变量值 x、函数值 y,还是图象的点);④对于含参数的函数问题,一般需要对参数进行讨论,要特别注意检验集合中的元素是否满足"三性",还要提防"空集"这一隐性陷阱.

例 2 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$的定义域为 M,$g(x)=\ln(1+x)$的定义域为 N,则 $M\cap N$ 等于 ( )

(A)$\{x|x>-1\}$　　(B)$\{x|-1<x<1\}$

(C)$\{x|x<1\}$　　(D)$\varnothing$

【解析】 首先将集合 M 与 N 具体化,即集合 $M=\{x|1-x>0\}=\{x|x<1\}$,集合 $N=\{x|1+x>0\}=\{x|x>-1\}$,则 $M\cap N=\{x|-1<x<1\}$,故选(B).

点评: 此题主要考查集合的运算、函数的定义域及不等式的解法.解答此题的步骤:①通过解不等式求出函数的定义域以确定集合 M,N;②根据交集的运算法则求出 $M\cap N$.

三、集合与不等式结合型

解答此类题目的主要策略有以下几点:①能化简的集合先化简,以便使问题进一步明朗化,同时掌握求解各类不等式解集的方法,如串根法、零点分区间法、平方法、转化法等;②在进行集合的运算时,不等式解集端点的合理取舍是难点之一,可以采用验证的方法进行取舍;③如果集合中的元素具有一定的几何意义,则可合理运用数形结合思想.在明确了集合中元素的几何意义后,可分别用 Venn 图、数轴或坐标平面表示出相应集合;④解决含参数不等式与集合的综合问题时,合理运用数轴来表示集合是解决此类问题的重要技巧.

例 3 已知集合 $S=\{x|\log_2(x+1)>0\}$,$T=\left\{x\left|\dfrac{2-x}{2+x}<0\right.\right\}$,则 $S\cap T$ 等于 ( )

(A)$(0,2)$　　(B)$(-1,2)$

(C)$(-1,+\infty)$　　(D)$(2,+\infty)$

【解析】 因为 $\log_2(x+1)>0\Leftrightarrow x+1>2^0$,

所以 $S=\{x|x>0\}$.

又 $T=\{x|x<-2$ 或 $x>2\}$,

则 $S\cap T=\{x|x>2\}$,故选(D).

点评: 本题主要考查集合的运算、不等式的解法.在高考中,集合与不等式知识交汇的选择、填空题通常是考查的重点,此类题型只要能正确解出各个不等式,再结合数轴就比较容易解决了.

四、集合与三角函数结合型

此类题型主要考查三角函数的图象、性质及变换与集合的概念及运算.解答此类题型的主要策略:①明确集合的元素是什么?(角、函数值、交点或参数的值等);②用三角公式进行转化,一般转化为只有一种三角函数且次数为一的三角函数形式,如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$等,再利用三角函数的性质求得满足条件的集合;③在进行集合交、并、补的运算时,要合理运用数形结合思想,用数轴或单位圆表示出相应集合,同时要注意角的表达式中"k"的讨论技巧.

例 4 设集合 $A=\{(x,y)\mid y=2\sin 2x\}$，集合 $B=\{(x,y)\mid y=x\}$，则 ( )

(A)$A\cap B$ 中有 3 个元素

(B)$A\cap B$ 中有 1 个元素

(C)$A\cap B$ 中有 2 个元素

(D)$A\cup B=\mathbf{R}$

【解析】 由图象知 $y=2\sin 2x$ 与 $y=x$ 有 3 个交点，因此，$A\cap B$ 中有 3 个元素. 故选(A).

点评：本题主要考查三角函数的图象及直线的应用，充分体现了数形结合思想的应用.

五、以整数为元素的集合问题

例 5 设 $a,b\in\mathbf{R}$，集合 $\{1,a+b,a\}=\left\{0,\frac{b}{a},b\right\}$，则 $b-a$ 等于 ( )

(A)1 (B)-1 (C)2 (D)-2

【解析】 由条件得 $a\neq 0,a\neq 1$，且 $b\neq 0$，

则 $\begin{cases}a+b=0,\\ b=1.\end{cases}$ 解得 $a=-1,b=1$.

所以 $b-a=2$，故选(C).

点评：本题主要考查集合相等的条件. 但要注意对两个集合中元素对应关系的讨论及对集合互异性的验证.

六、以方程的根为元素的集合问题

例 6 已知全集 $U=\mathbf{Z}$，$A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x\mid x^2=x\}$，则 $A\cap(\complement_U B)$ 等于 ( )

(A)$\{-1,2\}$ (B)$\{-1,0\}$

(C)$\{0,1\}$ (D)$\{1,2\}$

【解析】 因为 $B=\{0,1\}$，所以 $\complement_U B=\{\cdots,-2,-1,2,3,\cdots\}$，所以 $A\cap(\complement_U B)=\{-1,2\}$，选(A).

点评：本题主要考查集合的交集、补集运算及一元二次不等式的解法，要注意集合 B 的补集是无限集.

七、以不等式的解集为元素的集合问题

例 7 已知集合 $A=\{x\mid |x-a|\leqslant 1\}$，$B=\{x\mid x^2-5x+4\geqslant 0\}$. 若 $A\cap B=\varnothing$，则实数 a 的取值范围是__________.

【解析】 简化集合 A,B：$A=\{x\mid a-1\leqslant x\leqslant a+1\}$，$B=\{x\mid x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 4\}$.

因为 $A\cap B=\varnothing$，结合数轴知 $\begin{cases}a-1>1,\\ a+1<4.\end{cases}$

解得 $2<a<3$.

点评：本题主要考查集合交集的运算及空集概念、一元二次不等式的求解.

八、与集合有关的创新型问题

例 8 设 S 是至少含有两个元素的集合，在 S 上定义了一个二元运算“$*$”(即对任意的 $a,b\in S$，对于有序元素对 (a,b)，在 S 中有唯一确定的元素 $a*b$ 与之对应). 若对任意的 $a,b\in S$，有 $a*(b*a)=b$，则对任意的 $a,b\in S$，下列等式中不恒成立的是 ( )

(A)$(a*b)*a=a$

(B)$[a*(b*a)]*(a*b)=a$

(C)$(b*b)*b=b$

(D)$(a*b)*[b*(a*b)]=b$

【解析】 因为 $[a*(b*a)]*(a*b)=b*(a*b)=a$；$(b*b)*b=b$；$(a*b)*[b*(a*b)]=(a*b)*a=b$，所以(B)，(C)，(D)均正确，而 $(a*b)*a=b$，故选(A).

点评：解答本题要抓住两个关键：一是新运算反映的映射关系；二是新运算 $a*(b*a)=b$ 反映的实质.

例 9 设集合 $S=\{A_0,A_1,A_2,A_3\}$，在 S 上定义运算为：$A_i\oplus A_j=A_k$，其中 k 为 $i+j$ 被 4 除的余数，$i,j=0,1,2,3$. 满足关系式 $(x\oplus x)\oplus A_2=A_0$ 的 $x(x\in S)$ 的个数为 ( )

(A)1 (B)2 (C)3 (D)4

【解析】 当 $x=A_0$ 时，$(x\oplus x)\oplus A_2=(A_0\oplus A_0)\oplus A_2=A_0\oplus A_2=A_2$，不满足；

当 $x=A_1$ 时，$(x\oplus x)\oplus A_2=(A_1\oplus A_1)\oplus A_2=A_2\oplus A_2=A_0$，满足；

当 $x=A_2$ 时，$(x\oplus x)\oplus A_2=(A_2\oplus A_2)\oplus A_2=A_0\oplus A_2=A_2$，不满足；

当 $x=A_3$ 时，$(x\oplus x)\oplus A_2=(A_3\oplus A_3)\oplus A_2=A_2\oplus A_2=A_0$，满足.

所以，满足关系式 $(x\oplus x)\oplus A_2=A_0$ 的 $x(x\in S)$ 的个数为 2，故选(B).

点评：解答本题必须抓住等式 $A_i\oplus A_j=A_k$ 中的 i,j,k 的关系，对 $(x\oplus x)\oplus A_2$ 进行逐层运算. 由于 $x\in S$，因此必须对 S 中的元素进行逐个验算，从而得到满足条件的 x 的个数.