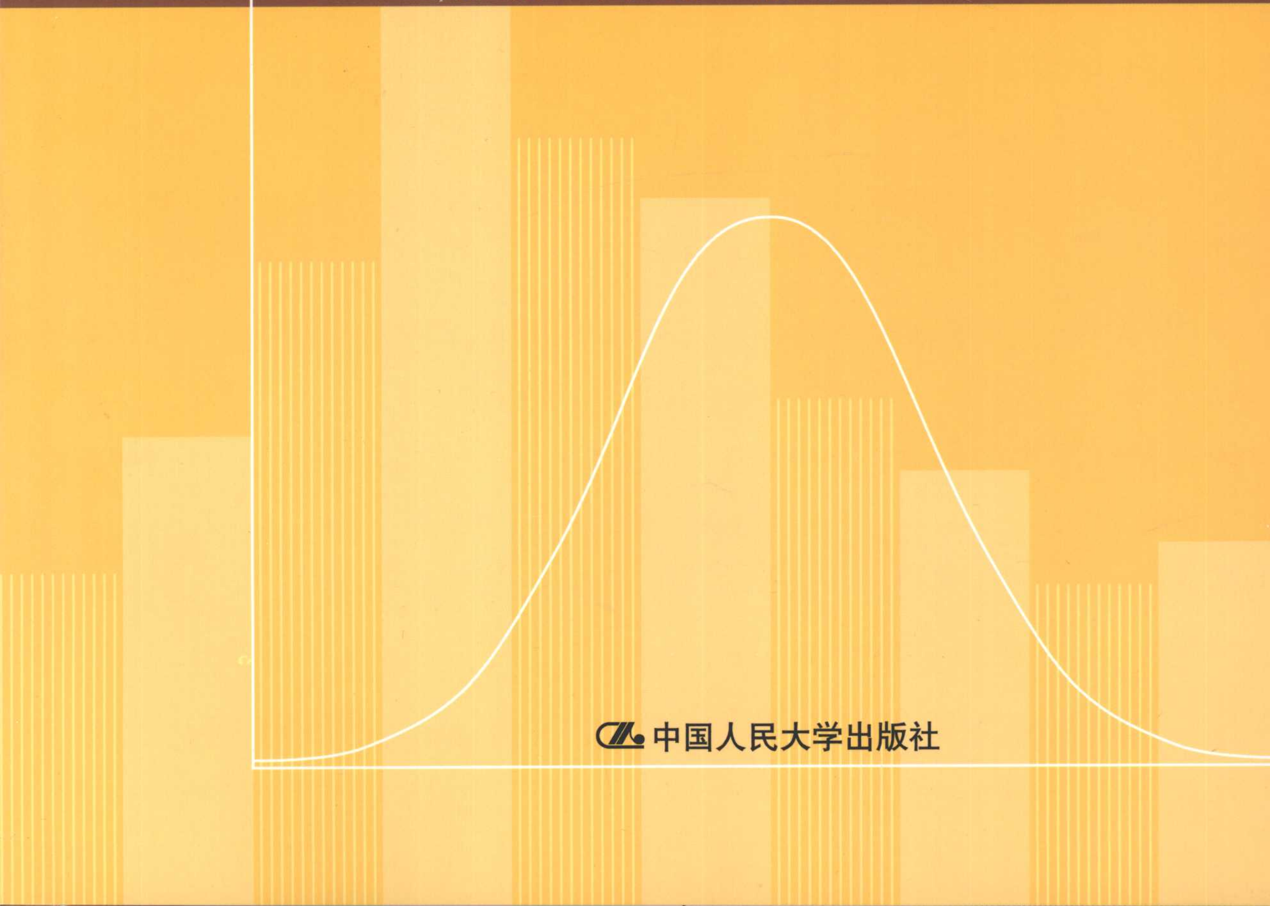
21世纪统计学系列教材

应用随机过程

（第二版）

张波　商豪　编著



中国人民大学出版社

21世纪统计学系列教材

应用随机过程

（第二版）

张波 商豪 编著

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

应用随机过程/张波，商豪编著. 2 版.
北京：中国人民大学出版社，2009
（21 世纪统计学系列教材）
ISBN 978-7-300-11044-8

Ⅰ. 应…
Ⅱ. ①张…②商…
Ⅲ. 随机过程-高等学校-教材
Ⅳ. O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 128266 号

21 世纪统计学系列教材
应用随机过程（第二版）
张波　商豪　编著

出版发行 中国人民大学出版社			
社　　址 北京中关村大街 31 号		**邮政编码** 100080	
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	三河汇鑫印务有限公司	**版　　次**	2001 年 5 月第 1 版
规　　格	170 mm×228 mm　16 开本		2009 年 11 月第 2 版
印　　张	14.75 插页 1	**印　　次**	2009 年 11 月第 1 次印刷
字　　数	269 000	**定　　价**	22.00 元

总　序

改革开放以来，高等统计教育有了很大的发展。随着课程设置的不断调整，有不少教材出版，同时也翻译引进了一些国外优秀教材。作为培养我国统计专门人才的摇篮，中国人民大学统计学系自 1952 年创建以来，走过了风风雨雨，一直坚持着理论与应用相结合的办学方向，培养能够理论联系实际、解决实际问题的高层次人才。随着新知识经济和网络时代的到来，我们在教学科研的实践中，深切地感受到，无论是自然科学领域、社会科学领域的研究，还是国家宏观管理和企业生产经营管理，甚至人们的日常生活，信息需求量日益增多，信息处理技术更加复杂，作为信息技术支柱的统计方法，越来越广泛地应用于各个领域。

面对新的形势，我们一直在思索，课程设置、教材选择、教学方式等怎样才能使学生适应社会经济发展的客观需要。在反复酝酿、不断尝试的基础上，我们决定与统计学界的同仁，共同编写、出版一套面向 21 世纪的统计学系列教材。

这套系列教材聘请了中科院院士、中国科技大学陈希孺教授，上海财经大学数量经济研究院张尧庭教授，中国科学院数学与系统科学研究所冯士雍研究员等作为编委。他们长期任中国人民大学的兼职教授，一直关心、支持着统计学系的学科建设和应用统计的发展。中国人民大学应用统计科学研究中心 2000 年已成为国家级研究基地，这些专家是首批专职或兼职研究人员。这一开放性研究基地的运作，将有利于提升我国应用统计科学研究的水平，也必将进一步促进高等统计教育的发展。

这套教材是我们奉献给新世纪的，希望它能促进应用统计教育水平的提高。

这套教材力求体现以下特点：

第一，在教材选择上，主要面向经济类统计学专业。选材既包括统计教材也包括风险管理与精算方面的教材。尽管名为统计学系列教材，但并不求大、求全，而是力求精选。对于目前已有的内容较为成熟、适合教学需要、公认的较好的教材，并未列入本次出版计划。

第二，每部教材的内容和写作，注意广泛吸收国内外优秀教材的成果。教材力求简明易懂、内容系统和实用，注重对统计方法思想的阐述，并结合大量实际数据和实例说明统计方法的特点及应用条件。

第三，强调与计算机的结合。为着力提高学生运用统计方法分析解决问题的能力，教材所涉及的统计计算，要求运用目前已有的统计软件。根据教材内容，选择使用 SAS、SPSS、TSP、STATISTICA、EViews、MINITAB、Excel 等。

感谢中国人民大学出版社的同志们，他们怀着发展我国应用统计科学的热情和提高统计教育水平的愿望，经过反复论证，使这套教材得以出版。感谢参与教材编写的同行专家、统计学系的教师。愿大家的辛勤劳动能够结出丰硕的果实。我们期待着与统计学界的同仁，共同创造应用统计辉煌的明天。

易丹辉

于中国人民大学

前　言

近几十年来，由于实际需要和数学工作者的努力，随机过程无论在理论上还是在应用上都有了蓬勃的发展。它的基本知识和方法，不仅是数学、概率统计专业所必需的，也是通信、控制、生物、社会科学、工程技术及经济领域的应用与研究所需要的。总之，随机分析方法越来越受到人们的重视，高等院校的学生、工程技术人员、金融工作者更迫切需要学习和掌握有关随机过程的知识。本书参考国内外相关文献编写而成。随机过程这门学科发展十分迅速，其内容十分丰富，作为一本大学本科教材，本书不可能包括其全部内容，因此，本书根据经济类统计学专业本科教学的需要选择素材。为适应更广泛的读者，本书着重于对随机过程的基本知识和基本方法的介绍，特别是注重实际应用，尽量回避测度论水平的严格证明，只有第 8 章不可避免地用到稍多一点的测度论知识，这一章初学者可以不学，有测度论基础或对数理金融有兴趣的读者可以选学。一般读者只要具有高等数学及概率论的基础知识便可阅读和理解本书的大部分内容。本书各章都配有一些与社会、经济、管理以及生物等专业相关的例子和习题，以帮助学生加深对基本理论的理解，提高应用随机过程解决问题的能力。为了便于有兴趣的读者进一步学习，书后列出了一些参考文献。

全书可分为三个部分。第一部分（1，2，3，5 章）是预备知识和随机过程最基本的内容，一般教材都包含这部分内容；第二部分是更新过程，这一内容在许多教材中都没有单独讨论，考虑到它在应用中的重要性，特别是在人口和保险论中的应用，故将它放在第 4 章讲授；其余为第三部分，考虑到在经济和金融方

面应用的需要，分别介绍鞅、Brown 运动与随机积分及其应用。

此次再版，除了改正印刷错误以及更新一些符号，主要从以下几个方面进行了调整。扩充了第 1 章预备知识的内容，对测度论的基本知识做了精要的概括。因为本书的初衷是面向更广泛的非数学专业学生，因而尽量回避了测度论的观念。但为了方便对第 8 章有兴趣的读者，我们做了这个概括工作。在 Poisson 过程、更新过程、Markov 链这几章增加了丰富且有趣的例子，有助于强化读者对基本概念的理解，以期读者通过丰富的例子真正认识到随机过程在实际问题中的重要作用。本书在第 8 章中增加了随机微分方程一节，简要地介绍了随机微分方程的概念及存在唯一性定理，在最后一节 Black-Scholes 模型中补充了对期权、未定权益等基本概念的介绍。书末附上了全部习题的详细解答，供读者参考。

笔者得以完成本书，首先要感谢许多同仁的鼓励、支持和帮助。特别是易丹辉教授、顾岚教授、张景肖副教授在百忙之中审阅了初稿并提出了许多宝贵意见，纠正了一些不妥之处。

特别感谢肖宇谷老师的修正意见。徐美萍博士为本次修订倾注了大量的心血，挑选新例题，反复验算习题，字斟句酌，在此亦表示诚挚的谢意！

编著者

目　　录

第1章 预备知识

随机过程通常被视为概率论的动态部分。在概率论中研究的随机现象，都是一个或有限多个随机变量的规律性。在讨论中心极限定理时也不过是对随机变量序列的讨论。但在实际问题中，我们还需要研究一些随机现象的发展和变化过程，即随时间不断变化的随机变量，而且所涉及的随机变量通常是无限多个，这就是随机过程的研究对象。随机过程以概率论作为其主要的基础知识，为此，我们首先对本书中经常用到的概率论基本知识作简要的回顾。

1.1 概率空间

随机试验是概率论的基本概念，试验的结果事先不能准确地预言，但具有如下三个特征：

(1) 可以在相同的条件下重复进行；

(2) 每次试验的结果不止一个，但预先知道试验的所有可能的结果；

(3) 每次试验前不能确定哪个结果会出现。

随机试验的可能结果称为样本点或基本事件，记为 ω。样本点的全体称为样本空间，记为 Ω。样本空间 Ω 称为必然事件，空集 $\varnothing$ 称为不可能事件。Ω 的子集 A 由基本事件组成，通常称为事件。但是在实际问题中，人们通常不是对样本空间的所有子集都感兴趣，而是关心某些事件及其发生的可能性大小。我们用

下面的概念来刻画这种事件。

定义 1.1.1 设 Ω 是一个样本空间（或任意一个集合），$\mathscr{F}$ 是 Ω 的某些子集组成的集合族。如果满足

（1）$\Omega \in \mathscr{F}$；

（2）若 $A \in \mathscr{F}$，则 $A^c = \Omega \setminus A \in \mathscr{F}$；

（3）若 $A_n \in \mathscr{F}$（$n=1, 2, \cdots$），则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$。

则称 $\mathscr{F}$ 为 Ω 上的一个 σ 代数，$(\Omega, \mathscr{F})$ 称为可测空间。

如果 $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的一个 σ 代数，则

（1）$\varnothing \in \mathscr{F}$；

（2）若 $A_n \in \mathscr{F}$（$n=1, 2, \cdots$），则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$。

以 Ω 的某些子集为元素的集合称为（Ω 上的）集类。对于 Ω 上的任一非空集类 $\mathscr{C}$，存在包含 $\mathscr{C}$ 的最小 σ 代数，即 $\{\bigcap \mathscr{H} | \mathscr{H}$ 为包含 $\mathscr{C}$ 的 σ 代数$\}$，称为由 $\mathscr{C}$ 生成的 σ 代数，记为 $\sigma(\mathscr{C})$。

定义 1.1.2 设 $\Omega = \mathbb{R}$。由所有半无限区间 $(-\infty, x)$，$x \in \mathbb{R}$ 生成的 σ 代数称为 $\mathbb{R}$ 上的 Borel σ 代数，记为 $\mathscr{B}(\mathbb{R})$，其中的元素称为 Borel 集合。类似地，可定义 $\mathbb{R}^n$ 上的 Borel σ 代数 $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$。

定义 1.1.3 设 $\{A_n, n=1, 2, \cdots\}$ 为一集合序列。令

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k; \quad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

分别称其为 $\{A_n\}$ 的上极限和下极限（上极限有时也记为 $\{A_n, i.o.\}$）。显然有

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{w | \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geqslant n, 使\ w \in A_k\} = \{w | w\ 属于无穷多个\ A_n\}$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{w | \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant n, 有\ w \in A_k\} = \{w | w\ 至多不属于有限多个\ A_n\}$$

从而恒有

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$$

若

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

则称 $\{A_n\}$ 的极限存在，并用 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ 表示，即令

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$$

特别地，若对每个 n，有 $A_n \subset A_{n+1}$（相应地，$A_n \supset A_{n+1}$），则称 $\{A_n\}$ 为单调增（相应地，单调降）。对单调增或单调降序列 $\{A_n\}$，我们分别令 $A = \bigcup_n A_n$ 或 $A = \bigcap_n A_n$，称 A 为 $\{A_n\}$ 的极限，通常记为 $A_n \uparrow A$ 或 $A_n \downarrow A$。

下面我们来看一个例子。

例 1.1.1 设某人在反复地投掷硬币，观察硬币朝上的面是正面还是反面。Ω=｛所有由投掷结果“正面”和“反面”组成的序列｝，$\mathscr{F}$=｛Ω 的所有子集｝，记 A_n 为第 n 次投掷的是“正面”的事件，则

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \{\text{有无限多个投掷结果是“正面”}\}$$
$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \{\text{除有限多个外，投掷结果都是“正面”}\}$$

定义 1.1.4 设 $(\Omega, \mathscr{F})$ 是可测空间，$P(\cdot)$ 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的实值函数。如果

(1) $P(\Omega) = 1$；

(2) $\forall A \in \mathscr{F}$，$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

(3) 对两两互不相容事件 A_1，A_2，…，（即当 $i \neq j$ 时，$A_i \cap A_j = \varnothing$）有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 P 是 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的概率，$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 称为概率空间，$\mathscr{F}$ 中的元素称为事件，$P(A)$ 称为事件 A 的概率。

由定义易见事件的概率有如下性质：

(1) 若 A，$B \in \mathscr{F}$，则 $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$。

(2) 若 A，$B \in \mathscr{F}$，且 $A \subset B$，则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$（可减性）。

(3) 若 A，$B \in \mathscr{F}$，且 $A \subset B$，则 $P(A) \leqslant P(B)$（单调性）。

(4) 若 $A_n \in \mathscr{F}$，$n \geqslant 1$，则 $P\left(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n\right) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} P(A_n)$（次 σ 可加性）。

(5) 若 $A_n \in \mathscr{F}$ 且 $A_n \uparrow A$，则 $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$（从下连续）。

(6) 若 $A_n \in \mathscr{F}$ 且 $A_n \downarrow A$，则 $P(A) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$（从上连续）。

如果概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 的 P 零测集（即零概率事件）的每个子集仍为事件，则称之为完备的概率空间。为了避免 P 零测集的子集不是事件的情形出现，我们把概率测度完备化。令 $\mathscr{N}$ 代表 Ω 的所有 P 零测集的子集的全体，由 $\{\mathscr{F}, \mathscr{N}\}$ 生成的 σ 代数（即包含 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{N}$ 的最小 σ 代数）称为 $\mathscr{F}$ 的完备化，记为 $\overline{\mathscr{F}}$。$\overline{\mathscr{F}}$ 中的每

个集合 B 都可以表示为 $B=A\cup N$，其中 $A\in\mathscr{F}$，$N\in\mathscr{N}$，且 $A\cap N=\varnothing$。定义

$$\bar{P}(B)=\bar{P}(A\cup N)=P(A)$$

则 P 就被扩张到 $\bar{\mathscr{F}}$ 上。

容易验证，$\bar{P}$ 是 $\bar{\mathscr{F}}$ 上的概率测度，集函数 $\bar{P}$ 称为 P 的完备化。本书总假定 P 是完备的概率测度。

1.2 随机变量与分布函数

定义 1.2.1 设（Ω，$\mathscr{F}$，P）是（完备的）概率空间，X 是定义在 Ω 上取值于实数集 $\mathbb{R}$ 的函数，如果 $\forall x\in\mathbb{R},\{w:X(\omega)\leqslant x\}\in\mathscr{F}$，则称 X 是 $\mathscr{F}$ 上的随机变量，简称为随机变量。函数

$$F(x)=P\{\omega:X(\omega)\leqslant x\},\quad -\infty<x<\infty$$

称为随机变量 X 的分布函数。

注：在上面的定义中，如果 X 是广义实值函数，即 X 可以取∞，则需要加上条件：X 是几乎处处有限的，即 $P\{\omega:|X(\omega)|=\infty\}=0$ 。否则，会出现按上面定义的分布函数是假分布的情况。

定义 1.2.2 两个随机变量 X 与 Y，如果满足 $P\{\omega\in\Omega:X(\omega)\neq Y(\omega)\}=0$，则称它们是等价的。

两个等价的随机变量可视为同一。

定理 1.2.1 下列命题等价：

（1）X 是随机变量；

（2）$\{\omega:X(\omega)\geqslant x\}\in\mathscr{F},\forall x\in\mathbb{R}$；

（3）$\{\omega:X(\omega)>x\}\in\mathscr{F},\forall x\in\mathbb{R}$；

（4）$\{\omega:X(\omega)<x\}\in\mathscr{F},\forall x\in\mathbb{R}$。

为简单起见，习惯上将 $\{\omega:X(\omega)\geqslant x\}$ 记为$\{X\geqslant x\}$，其他记号类似。

定理 1.2.2 （1）若 X，Y 是随机变量，则 $\{X<Y\}$，$\{X\leqslant Y\}$，$\{X=Y\}$ 及 $\{X\neq Y\}$ 都属于 $\mathscr{F}$；

（2）若 X，Y 是随机变量，则 $X\pm Y$ 与 XY 亦然；

（3）若 $\{X_n\}$ 是随机变量序列，则 $\sup\limits_n X_n$，$\inf\limits_n X_n$，$\limsup\limits_{n\to\infty}X_n$ 和$\liminf\limits_{n\to\infty}X_n$ 都是随机变量。

映射 $\boldsymbol{X}$：$\Omega\to\mathbb{R}^d$，表示为 $\boldsymbol{X}=(X_1, \cdots, X_d)$，若对所有的 $k(1\leqslant k\leqslant d)$，$X_k$ 都是随机变量，则称 $\boldsymbol{X}$ 为随机向量。

复值随机变量 Z 定义为两个实值随机变量 X 和 Y 的线性组合 $X+iY$。

给定随机变量 X，可以生成 Ω 上的 σ 代数，即包含所有形如 $\{X\leqslant x\}$，$x\in\mathbb{R}$ 的最小 σ 代数，记为 $\sigma(X)$。类似地，可定义由随机变量 $X_1, \cdots, X_n$ 生成的 σ 代数 $\sigma(X_1, \cdots, X_n)$。

在实际中，常用的随机变量有两种类型：离散型随机变量和连续型随机变量。

离散型随机变量 X 的概率分布用如下分布列描述：

$$p_k=P\{X=x_k\}, \quad k=1,2,\cdots$$

其分布函数为：

$$F(x)=\sum_{x_k\leqslant x}p_k$$

连续型随机变量 X 的概率分布用概率密度 $f(x)$ 描述，其分布函数为：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$$

对于随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1, \cdots, X_d)$，它的联合分布函数定义为：

$$F(x_1,\cdots,x_d)=P\{X_1\leqslant x_1,\cdots,X_d\leqslant x_d\}$$

这里 $d\geqslant 1$，$x_k\in\mathbb{R}(k=1, 2, \cdots, d)$。

定理 1.2.3　若 $F(x_1, \cdots, x_d)$ 是随机向量 $\boldsymbol{X}$ 的联合分布函数，则

(ⅰ) $F(x_1, \cdots, x_d)$ 对每个变量都是单调不减的；

(ⅱ) $F(x_1, \cdots, x_d)$ 对每个变量都是右连续的；

(ⅲ) 对 $i=1,2,\cdots,d$，$\lim\limits_{x_i\to-\infty}F(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_d)=0$，$\lim\limits_{x_1,\cdots,x_d\to\infty}F(x_1,\cdots,x_d)=1$。

如果 $f(x_1, \cdots, x_d)=\dfrac{\partial^d F}{\partial x_1\cdots\partial x_d}$ 对所有的 $(x_1, \cdots, x_d)\in\mathbb{R}^d$ 存在，则称函数 $f(x_1, \cdots, x_d)$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的联合概率密度函数，并且

$$F(x_1,\cdots,x_d)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_d}f(t_1,\cdots,t_d)\mathrm{d}t_d\cdots\mathrm{d}t_1$$

设 $F(x_1, \cdots, x_d)$ 为 $X_1, \cdots, X_d$ 的联合分布函数，$1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_n\leqslant d$，则 $X_1, \cdots, X_d$ 的边际分布函数定义为：

$$F_{k_1,\cdots,k_n}(x_{k1},\cdots,x_{kn})$$
$$=F(\infty,\cdots,\infty,x_{k_1},\infty,\cdots,\infty,x_{k_2},\infty,\cdots,\infty,x_{kn},\infty,\cdots,\infty)$$

下面是一些常见的分布。

1. **退化分布**：若随机变量 X 只取常数 c，即

$$P\{X=c\}=1$$

则 X 并不随机，但我们把它看作随机变量的退化情况更为方便，因此称之为退化分布，又称单点分布。

2. **Bernoulli 分布**：在一次试验中，设事件 A 出现的概率为 $p(0<p<1)$，不出现的概率为 $1-p$，若以 X 记事件 A 出现的次数，则 X 的可能取值仅为 0，1，其对应的概率为：

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},\quad k=0,1$$

这个分布称为 Bernoulli 分布，又称两点分布。

3. **二项分布**：在 n 重 Bernoulli 试验中，设事件 A 在每次试验中出现的概率均为 $p(0<p<1)$，以 X 记在 n 次试验中事件 A 出现的次数，则 X 的可能取值为 0，1，…，n，其对应的概率为：

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n$$

称之为以 n 和 p 为参数的二项分布，简记为 $X\sim B(n,\ p)$。

Bernoulli 分布可以看作 $n=1$ 时的二项分布，这是相应于一次独立试验的情形。

4. **Poisson 分布**：若随机变量 X 可取一切非负整数值，且

$$P\{X=k\}=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\quad k=0,1,\cdots$$

式中，$\lambda>0$，称 X 服从 Poisson 分布，记为 $X\sim P(\lambda)$。

5. **几何分布**：在 Bernoulli 试验序列中，设事件 A 在每次试验中出现的概率均为 $p(0<p<1)$，以 X 记事件 A 首次出现的试验次数，则 X 的可能取值为 1，2，…，其对应的概率为：

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1},\quad k=1,2,\cdots$$

称之为几何分布。

几何分布是一种等待分布，具有无记忆性。在离散型分布中，只有几何分布