面向新课标高考
面向报考重点大学的考生

王连笑

高考数学

专题复习讲座

王连笑　编著

华东师范大学出版社

面向新课标高考
面向报考重点大学的考生

王连笑 高考数学专题复习讲座

王连笑 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

王连笑高考数学专题复习讲座/王连笑编著.—上海：华东师范大学出版社，2009
ISBN 978-7-5617-6782-5

Ⅰ.王…　Ⅱ.王…　Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 039089 号

王连笑高考数学专题复习讲座

编　　著　王连笑
项目编辑　李　雯
审读编辑　曹祖红
装帧设计　黄惠敏

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电话总机　021-62450163 转各部门　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　昆山亭林彩印厂
开　　本　787×1092　16 开
印　　张　28
字　　数　968 千字
版　　次　2009 年 6 月第一版
印　　次　2009 年 6 月第一次
书　　号　ISBN 978-7-5617-6782-5/G·3923
定　　价　39.80 元

出 版 人　朱杰人

写在前面

许多应届和往届高中毕业生都有一个美好的愿望——考上第一类本科大学，甚至名牌大学.因此他们都希望能够在考场上出色地展示自己的全面素质、发挥自己的最高水平，以考出好成绩.而要达到这样的目的，就必须在平时努力学习的基础上，在高考复习时，提高复习质量，提升复习层次，特别是在一些关键问题上，例如思想方法、思维能力、重点知识等方面加深理解，认识规律，学好学活.这就需要有一本高层次的复习指导书.

作者从事数学教学工作40多年来，特别能够体会高中毕业生的这种需求，也曾多次根据他们的需要做专题讲座，收到比较好的效果.今天摆在同学们面前的这本书就是应这样的需要而出版的.

这本书根据新课程标准的考试大纲，将数学思想、数学能力和主干知识等内容分成若干个专题进行讲解.考试大纲指出："数学科的命题，在考查基础知识的基础上，注重对数学思想方法的考查，注重对数学能力的考查，展现数学的科学价值和人文价值，同时兼顾试题的基础性、综合性和现实性，重视试题间的层次性，合理调控综合程度，坚持多角度、多层次的考查，努力实现全面考查综合数学素养的要求"，这就是本书的依据.

本书讲述了高考考查的七个数学思想，介绍了它们的考查方式、思维程序和操作程序；讲述了高考考查的七个数学能力，介绍了对它们的考查要求；讲述了高考重点考查的七个主干知识，并分专题对思维规律、解题规律做了讲解；此外，在高考复习时还有七个不可忽视的问题，例如易混、易错问题，选择题的解法问题，新题型问题，应用问题，审题和细节问题等，本书也作为专题进行讲述.

正因为本书的目标在于抓住重点，抓住高层次，所以，特别基础的知识和特别容易的题目就不再出现在本书之中.本书也没有追求覆盖面，例如算法、积分、排列组合与二项式定理等就没有设专题讲解.因而本书不是一个全面的复习资料.所以，建议本书的读者，读本书时一定要边读，边练，边反思；一定要脑勤手勤，多想多练；一定要跟着学校的复习节奏全面复习.一定不要忽视基础，一定不要眼高手低，一定不要只做难题.此外，本书没有顺序之分，读者可以根据需要选择其中的内容，也可以把每一讲化整为零，分几次读练.

当然，作者也希望本书对担任高三数学复习阶段教学任务的青年教师有一些参考价值.如果本书能够对同学们的高考和青年教师的教学有一点儿帮助，作者也就十二分地满足了.

本书可能会有很多错误和疏漏之处，作者所求之不得的是读者能够给予批评和指正.

目录

第一篇 七个数学思想

第1讲 指导解题的七个数学思想

（一）指导数学解题的七个数学思想

常常遇到这样的场面：在解某一道题目时，同学甲是构造一个函数解决的，而同学乙没能解出来，当同学甲向同学乙介绍自己的解法时，同学乙会感慨地说："我怎么没有想到呢?"；在解一道选择题时，同学丙是通过计算解出来的，用了三分钟，而同学丁则是通过画图解决的，用了一分钟，这时，同学丙也会感慨地说："我怎么没有想到呢?"，这里的想到和没想到，本质上就是具备不具备数学思想，会不会用数学思想指导解题. 同学乙实际上是没有考虑到用函数思想解题，没有用函数和变量去思考，而同学丙则是对数形结合的数学思想不能运用自如. 这两个同学都是在解题中没有去注意数学的本质，没有用数学的基本思想去分析题目，指导解题.

数学思想是数学的基本观点，是对数学概念、数学方法和数学发现等的本质认识，在解题中主要运用的数学思想有函数与方程的思想，数形结合的思想，分类与整合的思想，化归与转化的思想，特殊与一般的思想，有限与无限的思想和或然与必然的思想等.

这些数学思想的名称与通常学习的数学概念或数学方法的名称有一些虽然相同，但是，数学概念和数学方法本身并不等于数学思想，它们之间有联系，又有区别，这些区别主要表现在不同的层次上. 例如，学习了函数的定义和性质，并能基本运用，并不一定具备函数思想，当题目明确了所研究的对象是函数时，你可能会想到运用这个函数的性质去解决问题，如果没有明确所研究的对象是函数的时候，你是否想到用函数与变化的观点去思考与解决问题呢？又如，解方程中的消元法，恒等变形中的配方法，三角函数中的诱导公式，几何中的割补法等都是把问题向简单方向转化的具体方法，是化归与转化思想的具体体现，但是，化归与转化思想相对于消元法，配方法，诱导公式和割补法等来说，具有较高的层次. 这就是说，数学中的一些具体方法都是在数学思想的指导下产生的，我们在解题的时候，如果能够站在数学思想的高度，抓住数学中最本质的东西去思考，就能高屋建瓴，就会使解题更加科学与合理，就会使解题从被动变为主动，就会形成较为完善的解题系统.

高考是选拔性考试，对中学生数学素养的要求体现在高考考试大纲上，无论是原来的考试大纲还是新课程标准的考试大纲，对中学生掌握数学思想的考查要求都是很高的.

高考对数学思想方法的考查要求

1.《考试大纲》的提法

"数学科的命题，在考查基础知识的基础上，**注重对数学思想和方法的考查**，注重对数学能力的考查."

"对数学思想和方法的考查是对数学知识在更高层次的抽象和概括的考查，考查时必须要与数学知识相结合，通过数学知识的考查，反映考生对数学思想和方法的理解. 要从学科整体意义和思想价值立意，注意通性通法，淡化特殊技巧，有效地检测考生对中学数学知识中所蕴涵的数学思想和方法的掌握程度."

2. 高考评价报告的提法

"数学在培养和提高人的思维能力方面有着其他学科所不可替代的独特作用，这是因为数学不仅仅是一种重要的'工具'或者'方法'，更重要的是一种思维模式，表现为数学思想. 高考数学科提出'以能力立意命题'，正是为了更好地考查数学思想，促进考生数学理性思维的发展. 因此，要加强如何更好地考查数学思想的研究，特别是要研究试题解题过程的思维方法，注意考查不同思维方法的试题的协调和匹配，使考生的数学理性思维能力得到较全面的考查."（《2002年普通高考数学科试题评价报告》(教育部考试中心)）

3. 考试中心对教学与复习的建议

考试中心在对数学复习的建议中指出：**"数学思想方法较之数学基础知识有更高的层次，具有观念性的地位.** 如果说数学知识是数学内容，可用文字和符号来记录和描述，那么数学思想方法则是数学意识，只能领会、运用，属于思维的范畴，用以对数学问题的认识、处理和解决."

“数学思想方法与数学基本方法常常在学习、掌握数学知识的同时获得，与此同时又应该领会它们在形成知识中的作用，到了复习阶段应该对数学思想方法和数学基本方法进行疏理、总结，逐个认识它们的本质特征、思维程序或者操作程序，逐步做到自觉地、灵活地施用于所要解决的问题. 近几年来，高考的每一道数学试题几乎都考虑到数学思想方法或数学基本方法的运用，目的也是加强这些方面的考查. 同样，这些高考试题也成为检验数学知识，同时又是检验数学思想方法的良好素材，复习时可以有意识地加以运用.”

数学思想方法的三个层次

数学基本方法，包括：

待定系数法，换元法，配方法，割补法，反证法等；

数学逻辑方法（或思维方法），包括：

分析与综合，归纳与演绎，比较与类比，具体与抽象等；

数学思想，包括：

函数与方程的思想，数形结合的思想，分类与整合的思想，化归与转化的思想，特殊与一般的思想，有限与无限的思想，或然与必然的思想等.

在高考复习时，要充分认识数学思想在提高解题能力方面的重要性，有意识地在复习中渗透数学思想，提升数学思想.

（二）例题选讲

1. 函数与方程的思想

考试中心对考试大纲的说明中指出：**“高考把函数与方程的思想作为七种思想方法的重点来考查，使用选择题和填空题考查函数与方程思想的基本运算，而在解答题中，则从更深的层次，在知识的网络的交汇处，从思想方法与相关能力相综合的角度进行深入考查.”**

什么是函数和方程思想？

我们先从两个例题谈起.

【例 1】 已知两条曲线：

椭圆 C_1：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 和圆 C_2：$x^2+(y+1)^2=r^2\ (r>0)$，若两条曲线没有公共点，求 r 的取值范围.

【分析及解】 一般的解法是：从 C_1 和 C_2 的方程中消去一个未知数，比如消去 x，得到一个关于 y 的方程

$$-\frac{5}{4}y^2+2y+10-r^2=0. \qquad ①$$

因为两条曲线没有公共点，所以方程①没有实数根，即判别式小于零，即

$$\Delta=4-4\left(-\frac{5}{4}\right)(10-r^2)<0,$$

解得 $r>\sqrt{\frac{54}{5}}$ 或 $r<-\sqrt{\frac{54}{5}}$ $\left(\text{由 } r>0,\ r<-\sqrt{\frac{54}{5}} \text{ 舍去}\right)$.

这就是说，若两条曲线没有公共点，r 的取值范围为 $r>\sqrt{\frac{54}{5}}$.

这个结果是否正确呢？我们可以画一个图来观察，如图 1－1，以 $(0,-1)$ 为圆心，$0<r<1$ 为半径的圆 C_2 与椭圆 C_1 没有公共点，但是 $0<r<1$ 这一结果在上面的计算中，并没有出现，显然，这种解法出了毛病！

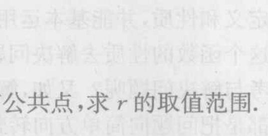

图 1－1

我们换一个思路：

思路 1：用函数思想来思考.

由方程①变形为：

$$r^2=-\frac{5}{4}y^2+2y+10.$$

把 $r^2=-\frac{5}{4}y^2+2y+10$ 看作 y 的函数.

由椭圆 C_1 可知，$-2\leqslant y\leqslant 2$，因此，求使圆 C_2 与椭圆 C_1 有公共点的 r 的集合，等价于在定义域为 $y\in$

$[-2, 2]$ 的情况下，求函数 $r^2 = f(y) = -\frac{5}{4}y^2 + 2y + 10$ 的值域.

由 $f(-2) = 1$, $f(2) = 9$, $f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{54}{5}$,可得 $f(y)$ 的值域是 $r^2 \in \left[1, \frac{54}{5}\right]$,即 $r \in \left[1, \sqrt{\frac{54}{5}}\right]$,它的补集就是圆 C_2 与椭圆 C_1 没有公共点的 r 的集合,因此，两条曲线没有公共点的 r 的取值范围是 $0 < r < 1$ 或 $r > \sqrt{\frac{54}{5}}$.

思路 2：用方程思想来思考.

两条曲线没有公共点,等价于方程 $-\frac{5}{4}y^2 + 2y + 10 - r^2 = 0$ 或者没有实数根，或者两个根 y_1, $y_2 \notin [-2, 2]$.

若没有实数根，则 $\Delta = 4 - 4\left(-\frac{5}{4}\right)(10 - r^2) < 0$,

解得 $r > \sqrt{\frac{54}{5}}$ 或 $r < -\sqrt{\frac{54}{5}}$ $\left(由 r > 0, r < -\sqrt{\frac{54}{5}} 舍去\right)$.

若两个根 y_1, $y_2 \notin [-2, 2]$,设 $\varphi(y) = -\frac{5}{4}y^2 + 2y + 10 - r^2$,

则 $\begin{cases} \varphi(2) = 9 - r^2 > 0, \\ \varphi(-2) = 1 - r^2 > 0, \end{cases}$ 解得 $0 < r < 1$.

因此，两条曲线没有公共点的 r 的取值范围是 $0 < r < 1$ 或 $r > \sqrt{\frac{54}{5}}$.

【例 2】 已知集合 $M = \{(x, y) \mid (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1\}$,则集合 M 表示的图形是(　　).

A. 直线　　　　B. 线段　　　　C. 抛物线　　　　D. 圆

【分析及解】 初看此题,可能不知如何下手,会进行平方等运算,然而会发现,运算较为复杂,我们放弃繁琐的运算,而用函数和变量来思考.

思路 1：把式子中的字母 x, y 看作变量,把等式中出现的代数式看作函数.

等式化为 $x + \sqrt{x^2 + 1} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2 + 1}} = -y + \sqrt{y^2 + 1}$.

构造函数 $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ $(x \in \mathbf{R})$,则上式就是 $f(x) = f(-y)$.

由于函数 $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ $(x \in \mathbf{R})$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，则 $x = -y$,即 $x + y = 0$. 所以，集合 M 表示的图形是直线. 故选 A.

这个问题的解决是函数思想的胜利.

我们还可以用另一种函数来思考.

思路 2：构造一个常见的函数 $g(x) = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$ $(x \in \mathbf{R})$,则 $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，且为奇函数.

又已知等式可化为

$$g(x) + g(y) = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \lg(y + \sqrt{y^2 + 1}) = \lg 1 = 0,$$

于是有 $g(x) = -g(y) = g(-y)$,因此 $x = -y$,即 $x + y = 0$.

所以，集合 M 表示的图形是直线. 故选 A.

思路 3：以方程的知识为切入点.

设 $s = x + \sqrt{x^2 + 1}$, $t = y + \sqrt{y^2 + 1}$,

则 $s' = x - \sqrt{x^2 + 1}$, $t' = y - \sqrt{y^2 + 1}$,

于是，s、t 分别是方程 $s^2 - 2xs - 1 = 0$, $t^2 - 2yt - 1 = 0$ 的正根.

由此可得 $s - 2x - \frac{1}{s} = 0$, $t - 2y - \frac{1}{t} = 0$,相加并注意到 $st = 1$,

于是，$s + t - 2(x + y) - \frac{s + t}{st} = 0$,即 $x + y = 0$.

所以，集合 M 表示的图形是直线. 故选 A.

从以上两个例题可以认识到函数和方程思想的基本内涵.

F. 克莱因有一句名言："**一般受教育者在数学课上应该学会的重要事情是用变量和函数来思考.**"函数思想，就是学会用变量和函数来思考，就是从函数各部分内容的内在联系和整体角度考虑问题、研究问题和解决问题，就是使用函数的方法研究和解决函数的问题以及构建函数关系式来研究和解决非函数问题.

方程思想，就是学会转化已知与未知的关系、解方程的过程就是求函数的零点的过程，通过对解方程的研究和对方程的根的研究考虑问题和解决问题.

对函数和方程思想的考查，主要是考查能不能用函数和方程思想指导解题，在用函数和方程思想指导解题时要经常思考下面一些问题.

(1) 是不是想到把字母看作变量或把代数式看作函数

【例 1】 (2008 全国Ⅱ卷，理)设 $a>1$，则双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{(a+1)^2}=1$的离心率 e 的取值范围是(　　).

A. $(\sqrt{2},\ 2)$　　B. $(\sqrt{2},\ \sqrt{5})$　　C. $(2,\ 5)$　　D. $(2,\ \sqrt{5})$

【分析及解】 $e^2=\left(\frac{c}{a}\right)^2=\frac{a^2+(a+1)^2}{a^2}=1+\left(1+\frac{1}{a}\right)^2$.

把 $g(a)=1+\left(1+\frac{1}{a}\right)^2$ 看作函数，因为$\frac{1}{a}$是减函数，所以当 $a>1$ 时，$0<\frac{1}{a}<1$，所以 $2<e^2<5$，即 $\sqrt{2}<e<\sqrt{5}$. 故选 B.

【例 2】 (2005 江西卷，理)已知数列$\{a_n\}$的各项都是正数，且满足

$$a_0=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n(4-a_n),\ n\in\mathbf{N}^*.$$

(Ⅰ) 证明：$a_n<a_{n+1}<2$，$n\in\mathbf{N}^*$；

(Ⅱ) 求数列$\{a_n\}$的通项公式 a_n.

【分析及解】 (Ⅰ) 这是一个以递推公式为背景的数列不等式，但是把递推公式看作一个函数，就可以获得一个很简单的解法.

把 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n(4-a_n)$，$n\in\mathbf{N}^*$ 看作一个函数，其中把 a_n 看作自变量，把 a_{n+1} 看作 a_n 的函数，即设 $f(x)=\frac{1}{2}x(4-x)$.

由此启发得，

$$a_{k+1}=\frac{1}{2}a_k(4-a_k)=\frac{1}{2}[4-(a_k-2)^2]=-\frac{1}{2}(a_k-2)^2+2<2.$$

于是 $a_k<2$.

又因为 $a_{k+1}-a_k=-\frac{1}{2}a_k^2+2a_k-a_k=-\frac{1}{2}a_k(a_k-2)>0$，

所以 $a_{k+1}>a_k$.

由以上，有 $a_n<a_{n+1}<2$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(Ⅱ) 略.

【例 3】 (2005 山东卷，理)已知 $x=1$ 是函数 $f(x)=mx^3-3(m+1)x^2+nx+1$ 的一个极值点，其中 m，$n\in\mathbf{R}$，$m<0$.

(Ⅰ) 求 m 与 n 的关系式；

(Ⅱ) 求 $f(x)$的单调区间；

(Ⅲ) 当 $x\in[-1,\ 1]$ 时，函数 $y=f(x)$ 的图象上任意一点的切线斜率恒大于 $3m$，求 m 的取值范围.

【分析及解】 (Ⅰ) $n=3m+6$.

(Ⅱ) 由(Ⅰ)知，
$$\begin{aligned}f'(x)&=3mx^2-6(m+1)x+3m+6\\&=3m(x-1)\left[x-\left(1+\frac{2}{m}\right)\right].\end{aligned}$$

当 $m<0$ 时，有 $1>1+\frac{2}{m}$，当 x 变化时，$f(x)$与 $f'(x)$的变化如下表：

x	$\left(-\infty, 1+\dfrac{2}{m}\right)$	$1+\dfrac{2}{m}$	$\left(1+\dfrac{2}{m}, 1\right)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	<0	0	>0	0	<0
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增	极大值	单调递减

故当 $m<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty, 1+\dfrac{2}{m}\right)$ 上单调递减，在 $\left(1+\dfrac{2}{m}, 1\right)$ 上单调递增，在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

（Ⅲ）由已知得 $f'(x)>3m$，即 $mx^2-2(m+1)x+2>0$.

又 $m<0$，所以 $x^2-\dfrac{2}{m}(m+1)x+\dfrac{2}{m}<0$，

即 $x^2-\dfrac{2}{m}(m+1)x+\dfrac{2}{m}<0$，$x\in[-1, 1]$.　①

设 $g(x)=x^2-\dfrac{2}{m}(m+1)x+\dfrac{2}{m}=x^2-2\left(1+\dfrac{1}{m}\right)x+\dfrac{2}{m}$.

由题意知①式恒成立，这等价于 $[g(x)]_{\max}<0$，

所以 $\begin{cases} g(-1)<0, \\ g(1)<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+2+\dfrac{2}{m}+\dfrac{2}{m}<0, \\ -1<0. \end{cases}$

解得 $-\dfrac{4}{3}<m$，又 $m<0$，所以 $-\dfrac{4}{3}<m<0$.

即 m 的取值范围为 $\left(-\dfrac{4}{3}, 0\right)$.

（2）是不是想到运用函数和方程的性质

【例 1】 解方程 $3^x+4^x+5^x=6^x(x\in\mathbf{R})$.

【分析及解】 不难验证，$3^3+4^3+5^3=6^3$，即 $x=3$ 是方程的一个解.

但是，方程还有没有其他的解呢？这个问题可以运用函数的性质来解决.

原方程可化为 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+\left(\dfrac{5}{6}\right)^x=1$，

把方程的左边看作函数，设 $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+\left(\dfrac{5}{6}\right)^x$.

我们研究当 $x\neq 3$ 时，函数 $f(x)$ 的性质.

由于 $y=a^x$ 对于 $0<a<1$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，

则当 $x<3$ 时，有

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{5}{6}\right)^x>\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^3=1;$$

当 $x>3$ 时，有

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{5}{6}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^3=1.$$

所以，当 $x\neq 3$ 时，函数 $f(x)\neq 1$，即方程没有 $x=3$ 以外的解.

在本题解决的过程中，运用了函数的单调性.

【例 2】 求函数 $y=x+\sqrt{x-1}$ 的值域.

【分析及解】 **解法 1：通过方程的根求值域.**

函数化为 $y-x=\sqrt{x-1}$，两边平方得

$$x^2-(2y+1)x+y^2+1=0. \qquad ①$$

由于函数的定义域为 $\{x\mid x\geqslant 1\}$，则方程①至少有一个不小于 1 的根，这相当于解不等式组（Ⅰ）与（Ⅱ），并求解集的并集.

$$（Ⅰ）\begin{cases} \Delta=(2y+1)^2-4(y^2+1)=4y-3\geqslant 0, \\ x_1=\dfrac{2y+1-\sqrt{4y-3}}{2}\geqslant 1, \\ y-x_1=y-\dfrac{2y+1-\sqrt{4y-3}}{2}\geqslant 0. \end{cases}$$

(Ⅱ)$\begin{cases}\Delta=(2y+1)^2-4(y^2+1)=4y-3\geqslant 0,\\ x_2=\dfrac{2y+1+\sqrt{4y-3}}{2}\geqslant 1,\\ y-x_2=y-\dfrac{2y+1+\sqrt{4y-3}}{2}\geqslant 0.\end{cases}$

解得 $y\geqslant 1$,所以函数的值域为$\{y\mid y\geqslant 1\}$.

解法 2:通过换元转化成二次函数,运用函数的单调性求解.

由于函数的定义域为 $\{x\mid x\geqslant 1\}$,所以设 $t=\sqrt{x-1}\ (t\geqslant 0)$,则函数化为

$$y=\varphi(t)=t^2+t+1\ (t\geqslant 0).$$

由 $y=\varphi(t)=t^2+t+1=\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\ (t\geqslant 0)$,则函数 $\varphi(t)$ 在$[0,+\infty)$ 上是增函数.

于是,$y=\varphi(t)\geqslant\varphi(0)=\left(0+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}=1$.

所以函数的值域为 $\{y\mid y\geqslant 1\}$.

解法 3:直接用函数的性质求解.

由于函数的定义域为 $\{x\mid x\geqslant 1\}$,且函数 $y=f(x)=x+\sqrt{x-1}$ 在$[1,+\infty)$ 上是增函数,所以,$y=f(x)\geqslant f(1)=1+\sqrt{1-1}=1$,即函数的值域为$\{y\mid y\geqslant 1\}$.

比较这三个解法,解法 3 优于解法 2,解法 2 又优于解法 1.这是因为,解法 3 直接运用了函数的性质,解法 2 通过转化之后再运用函数的性质,可见,具备函数思想,用函数性质求解的优越之处.

【例 3】 (1997 全国卷)甲、乙两地相距 s 千米,汽车从甲地匀速行驶到乙地,速度不得超过 c 千米/小时,已知汽车每小时的运输成本(以元为单位)由可变部分和固定部分组成:可变部分与速度 v(千米/小时)的平方成正比,且比例系数为 b,固定部分为 a 元.

(Ⅰ) 把全程运输成本 y(元)表示为速度 v(千米/小时)的函数,并指出这个函数的定义域.

(Ⅱ) 为了使全程运输成本最小,汽车应以多大的速度行驶?

【分析及解】 (Ⅰ) 由题设,

$$y=a\cdot\frac{s}{v}+b\cdot\frac{s}{v}\cdot v^2=s\left(bv+\frac{a}{v}\right)\ (0<v\leqslant c).$$

(Ⅱ) 为了求 $y=s\left(bv+\dfrac{a}{v}\right)$的最小值,有的人选择了用均值不等式求解:

$$y=s\left(bv+\frac{a}{v}\right)\geqslant s\cdot 2\sqrt{bv\cdot\frac{a}{v}}=2s\sqrt{ab}.$$

从而,全程运输成本的最小值是 $2s\sqrt{ab}$.

这个解法有没有问题?我们来分析一下.

上面的不等式取得等号的条件是 $bv=\dfrac{a}{v}$,即 $v=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$,但是,函数的定义域是$(0,c]$,那么,$v=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 是否属于定义域呢?如果 $v=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\notin(0,c]$,用均值不等式的方法就不能求出全程运输成本的最小值.因此,这个方法并不完美.

而站在函数的角度,利用函数的性质,通过求函数值域的方法求最小值,是一个很好的选择.

函数可化为 $y=sb\left(v+\dfrac{\frac{a}{b}}{v}\right)\ (0<v\leqslant c)$.

(1) 当$\sqrt{\dfrac{a}{b}}>c$ 时,函数 $y=sb\left(v+\dfrac{\frac{a}{b}}{v}\right)$在 $0<v\leqslant c$ 时是减函数,

所以 $v=c$ 时有最小值 $y_{\min}=s\left(\dfrac{a}{c}+bc\right)$;

(2) 当$\sqrt{\dfrac{a}{b}}\leqslant c$时,函数 $y=sb\left(v+\dfrac{\frac{a}{b}}{v}\right)$在$0<v\leqslant\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 时是减函数,在$\sqrt{\dfrac{a}{b}}\leqslant v\leqslant c$时是增函数,

所以 $v=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 时有最小值 $y_{\min}=2s\sqrt{ab}$.

在本题解决的过程中,运用了函数 $y=x+\dfrac{a}{x}$ $(x>0)$ 的单调性和值域.

(3) 是不是想到构造函数

构造函数解题是函数思想在解题方法中的具体体现.

构造函数解题的特征是:原来的题目没有给出明确的函数,甚至不是一个函数问题,但是可以根据要解决的问题的特征及求解的目标,构造一个函数,然后通过研究所构造的函数的性质,解决问题.事实上,在前面所举的例题中,我们多次把代数式看作函数就是一个构造函数的过程.构造函数解题的思路有着广泛的应用.

【例 1】 (2007 全国Ⅰ卷,理)设函数 $f(x)=e^x-e^{-x}$.

(Ⅰ) 证明:$f(x)$ 的导数 $f'(x)\geqslant 2$;

(Ⅱ) 若对所有 $x\geqslant 0$,都有 $f(x)\geqslant ax$,求 a 的取值范围.

【分析及解】 (Ⅰ) $f(x)$的导数 $f'(x)=e^x+e^{-x}$.

由于 $e^x+e^{-x}\geqslant 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}=2$,故 $f'(x)\geqslant 2$(当且仅当 $x=0$ 时等号成立).

(Ⅱ) **构造函数 $g(x)=f(x)-ax$**,则 $g'(x)=f'(x)-a=e^x+e^{-x}-a$.

对所有 $x\geqslant 0$,都有 $f(x)\geqslant ax$ 等价于对所有 $x\geqslant 0$,都有 $g(x)\geqslant 0$,即等价于$x\in[0,+\infty)$ 时,$g(x)_{\min}\geqslant 0$.

① 若 $a\leqslant 2$,当 $x>0$ 时,$g'(x)=e^x+e^{-x}-a>2-a\geqslant 0$,

故 $g(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上为增函数,所以,$g(x)_{\min}=g(0)$.

所以,$x\geqslant 0$ 时,$g(x)\geqslant g(0)=0$,即 $f(x)\geqslant ax$.

② 若 $a>2$,方程 $g'(x)=0$ 的正根为 $x_1=\ln\dfrac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$.

此时,若 $x\in(0,x_1)$,则 $g'(x)<0$, $g(x)$ 在该区间为减函数;若 $x\in[x_1,+\infty)$,则 $g(x)$ 在该区间为增函数,所以 $g(x)_{\min}=g(x_1)$.

然而,$x\in(0,x_1)$ 时,$g(x)<g(0)=0$,即 $g(x)_{\min}=g(x_1)<0$,从而 $x\in(0,x_1)$ 时,$f(x)<ax$,与题设 $f(x)\geqslant ax$ 相矛盾.

综上所述,满足条件的 a 的取值范围是$(-\infty,2]$.

【例 2】 (1997 全国卷)设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a>0)$,方程 $f(x)-x=0$ 的两个实根 x_1, x_2 满足 $0<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$.

(Ⅰ) 当 $x\in(0,x_1)$ 时,证明 $x<f(x)<x_1$;

(Ⅱ) 设函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=x_0$ 对称,证明:$x_0<\dfrac{x_1}{2}$.

【分析及解】 (Ⅰ) 由于 x_1, x_2 是方程 $f(x)-x=0$ 的两个实根,所以可以从整体上考虑 $f(x)-x$,为此,构造函数 $F(x)=f(x)-x$.

设 $F(x)=f(x)-x=a(x-x_1)(x-x_2)$.

要证明 $x<f(x)<x_1$,就需要证明$\begin{cases}F(x)=f(x)-x>0,\\ x_1-f(x)=x_1-x-F(x)>0.\end{cases}$

当 $x\in(0,x_1)$ 时,因为 $0<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$,则 $a>0$, $x-x_1<0$, $x-x_2<0$.

因此 $f(x)-x=a(x-x_1)(x-x_2)>0$,即 $x<f(x)$.

又 $x_1-f(x)=x_1-x-F(x)=(x_1-x)-a(x-x_1)(x-x_2)=(x_1-x)(1+ax-ax_2)$,

由 $x_2<\dfrac{1}{a}$,即 $1-ax_2>0$,且 $x_1-x>0$,

得 $x_1-f(x)>0$,即 $f(x)<x_1$,

所以,$x<f(x)<x_1$.

(Ⅱ) 要证明 $x_0<\dfrac{x_1}{2}$,仍需要用函数思想来解决,这是因为变量 x_0 和 x 涉及到函数 $f(x)$ 和 $F(x)$.

由 $x=x_0$ 是函数 $f(x)$ 的图象的对称轴，则 $x_0=-\dfrac{b}{2a}$；

由 x_1，x_2 是方程 $f(x)-x=0$ 的两个实根，且

$$F(x)=f(x)-x=ax^2+(b-1)x+c=0,$$

则有 $x_1+x_2=\dfrac{1-b}{a}$.

于是，$x_0=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{ax_1+ax_2-1}{2a}=\dfrac{x_1}{2}+\dfrac{ax_2-1}{2a}<\dfrac{x_1}{2}$.

【例 3】（2001 全国卷）已知 i，m，n 是正整数，且 $1<i\leqslant m<n$.

（Ⅰ）略；

（Ⅱ）证明：$(1+m)^n>(1+n)^m$.

【分析及解】 研究第（Ⅱ）问.

$$(1+m)^n>(1+n)^m\Leftrightarrow n\ln(1+m)>m\ln(1+n)$$
$$\Leftrightarrow\frac{\ln(1+m)}{m}>\frac{\ln(1+n)}{n}.$$

这时，不等式的两边有共同的结构. 为此，可以构造函数 $g(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ $(x\geqslant 2)$，只要证明 $g(x)$ 为减函数就可以了.

由 $g'(x)=\dfrac{x[1-\ln(1+x)]-\ln(1+x)}{x^2(1+x)}<0$，得 $g(x)$ 为减函数，

又 $2\leqslant m<n$，则 $g(m)>g(n)$，

即 $\dfrac{\ln(1+m)}{m}>\dfrac{\ln(1+n)}{n}$.

于是，$(1+m)^n>(1+n)^m$ 成立.

【例 4】（2006 湖南卷，理）已知函数 $f(x)=x-\sin x$，数列 $\{a_n\}$ 满足：

$$0<a_1<1,\ a_{n+1}=f(a_n),\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

证明：（Ⅰ）$0<a_{n+1}<a_n<1$；

（Ⅱ）$a_{n+1}<\dfrac{1}{6}a_n^3$.

【分析及解】（Ⅰ）先用数学归纳法证明 $0<a_n<1$，$n=1$，2，3，…

① 当 $n=1$ 时，由已知显然结论成立.

② 假设当 $n=k$ 时结论成立，即 $0<a_k<1$.

因为 $0<x<1$ 时，$f'(x)=1-\cos x>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数.

又 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，从而 $f(0)<f(a_k)<f(1)$，即 $0<a_{k+1}<1-\sin 1<1$. 故 $n=k+1$ 时，结论成立.

由①，②可知，$0<a_n<1$ 对一切正整数都成立.

又因为 $0<a_n<1$ 时，$a_{n+1}-a_n=a_n-\sin a_n-a_n=-\sin a_n<0$，所以 $a_{n+1}<a_n$.

综上所述，$0<a_{n+1}<a_n<1$.

（Ⅱ）构造函数 $g(x)=\sin x-x+\dfrac{1}{6}x^3$，$0<x<1$.

由（Ⅰ）知，当 $0<x<1$ 时，$\sin x<x$，

从而 $g'(x)=\cos x-1+\dfrac{x^2}{2}=-2\sin^2\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2}>-2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\dfrac{x^2}{2}=0$.

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上是增函数. 又 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $g(0)=0$，

所以当 $0<x<1$ 时，$g(x)>0$ 成立.

于是 $g(a_n)>0$，即 $\sin a_n-a_n+\dfrac{1}{6}a_n^3>0$.

故 $a_{n+1}<\dfrac{1}{6}a_n^3$.

【例5】 求证:对任意实数 a, b,不等式 $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$ 成立.

【分析及解】 这个不等式中的每一项的形式都相同,这就促使我们用一个共同的式子来统一,即**构造函数**

$$f(x)=\frac{x}{1+x}\ (x\geqslant 0).$$

容易证明, $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ 是 $[0,+\infty)$ 上的增函数.

又 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$,因此, $f(|a+b|)\leqslant f(|a|+|b|)$,即

$$\begin{aligned}\frac{|a+b|}{1+|a+b|}&\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\\&\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.\end{aligned}$$

(4) 是不是想到了把等式看作为一个含未知数的方程,是不是想到了对这个方程的根(例如根的虚实,正负,范围等)有什么要求.

【例1】 已知 α, β, γ 都是锐角,且满足

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1.$$

求 $\alpha+\beta+\gamma$ 的值.

【分析及解】 这是一个与三角函数有关的求值题,表面上看,不是一个方程问题,但是,如果我们想到把这个等式看作一个关于 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 中的某一个的二次方程,例如看作关于 $\cos\alpha$ 的一元二次方程,问题就容易解决得多.

$$\cos^2\alpha+(2\cos\beta\cos\gamma)\cos\alpha+(\cos^2\beta+\cos^2\gamma-1)=0,$$
$$\Delta=4\cos^2\beta\cos^2\gamma-4(\cos^2\beta+\cos^2\gamma-1)=4\sin^2\beta\sin^2\gamma.$$

所以, $\cos\alpha=\dfrac{-2\cos\beta\cos\gamma\pm\sqrt{4\sin^2\beta\sin^2\gamma}}{2}=-\cos(\beta\pm\gamma)$.

因为 α, β, γ 都是锐角,所以, $\cos\alpha=-\cos(\beta-\gamma)$ 应舍去.

因此, $\cos\alpha=-\cos(\beta+\gamma)$.

又因为 $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta+\gamma<\pi$,所以, $\alpha=\pi-(\beta+\gamma)$,即 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

【例2】 已知: a, b 均为正实数,且 $\dfrac{\sin^4x}{a}+\dfrac{\cos^4x}{b}=\dfrac{1}{a+b}$.

求证: $\dfrac{\sin^8x}{a^3}+\dfrac{\cos^8x}{b^3}=\dfrac{1}{(a+b)^3}$.

【分析及解】 本题是由已知的三角等式证明另一个三角等式的问题,我们同样可以把已知等式化作关于某个字母的方程.

$$(a+b)b\sin^4x+(a+b)a\cos^4x=ab,$$
$$(\cos^4x)a^2+b(\sin^4x+\cos^4x-1)a+b^2\sin^4x=0. \quad ①$$

计算它的判别式:

$$\begin{aligned}\Delta&=[b(\sin^4x+\cos^4x-1)]^2-4b^2\cos^4x\sin^4x\\&=b^2(\sin^4x+\cos^4x-1+2\sin^2x\cos^2x)(\sin^4x+\cos^4x-1-2\sin^2x\cos^2x)\\&=b^2[(\sin^2x+\cos^2x)^2-1][(\sin^2x-\cos^2x)^2-1]=0.\end{aligned}$$

方程①的解为 $a=\dfrac{-b(\sin^4x+\cos^4x-1)}{2\cos^4x}$,即 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{\sin^2x}{\cos^2x}$.

从而 $\sin^2x=\dfrac{a}{a+b}$, $\cos^2x=\dfrac{b}{a+b}$,

所以 $\dfrac{\sin^8x}{a^3}+\dfrac{\cos^8x}{b^3}=\dfrac{\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^4}{a^3}+\dfrac{\left(\dfrac{b}{a+b}\right)^4}{b^3}=\dfrac{a+b}{(a+b)^4}=\dfrac{1}{(a+b)^3}$.

在解题的过程中,利用方程的性质,求出 a 和 $\dfrac{a}{b}$ 的表达式是解题的关键.

【例 3】 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=10$，且$a_n=15a_{n-1}+2\cdot 5^n$，求这个数列的通项公式.

【分析及解】 先对递推式进行变形，

$$\frac{a_n}{5^n}=\frac{15a_{n-1}}{5^n}+2\text{，即}\frac{a_n}{5^n}=3\cdot\frac{a_{n-1}}{5^{n-1}}+2.$$

设$b_n=\dfrac{a_n}{5^n}$（$n\in\mathbf{N}^*$），则$b_n=3b_{n-1}+2$. ①

引入待定系数α，β，使α，β满足$b_n-\beta=\alpha(b_{n-1}-\beta)$. ②

展开②式得，$b_n=\alpha b_{n-1}-\alpha\beta+\beta$. ③

对照③式和①式，可得方程组$\begin{cases}\alpha=3,\\-\alpha\beta+\beta=2.\end{cases}$

解得$\alpha=3$，$\beta=-1$.

即数列$\{b_n+1\}$是以$b_1+1=\dfrac{a_1}{5}+1=\dfrac{10}{5}+1=3$为首项，3为公比的等比数列.

所以$b_n+1=3\cdot 3^{n-1}=3^n$，$b_n=3^n-1$.

于是，$b_n=\dfrac{a_n}{5^n}=3^n-1$，$a_n=15^n-5^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

【例 4】 （2007 广东卷，理，文）已知a是实数，函数$f(x)=2ax^2+2x-3-a$. 如果函数$y=f(x)$在区间$[-1,1]$上有零点，求a的取值范围.

【分析及解】 函数$y=f(x)$在区间$[-1,1]$上有零点，等价于方程$f(x)=2ax^2+2x-3-a=0$在$[-1,1]$上有解.

当$a=0$时，方程$f(x)=0$是一次方程$2x-3=0$，解为$x=\dfrac{3}{2}\notin[-1,1]$，不符合题意；

当$a\neq 0$时，方程$f(x)=0$是二次方程.

方程$f(x)=0$在$[-1,1]$上有解，对解的要求是：

(1) $f(x)=0$在$[-1,1]$上有一个解（另一个解不属于区间$[-1,1]$），这时应满足

$$f(-1)\cdot f(1)\leqslant 0.$$

(2) $f(x)=0$在$[-1,1]$上有两个解，这时应满足$\begin{cases}af(-1)\geqslant 0,\\af(1)\geqslant 0,\\\Delta=4+8a(3+a)\geqslant 0,\\-1\leqslant-\dfrac{1}{2a}\leqslant 1.\end{cases}$

由(1)得$f(-1)\cdot f(1)=(a-1)(a-5)\leqslant 0$，即$1\leqslant a\leqslant 5$.

解(2)的不等式组得$a\leqslant\dfrac{-3-\sqrt{7}}{2}$或$a\geqslant 5$.

由(1)和(2)得$a\leqslant\dfrac{-3-\sqrt{7}}{2}$或$a\geqslant 1$. 所以实数$a$的取值范围是$a\leqslant\dfrac{-3-\sqrt{7}}{2}$或$a\geqslant 1$.

解决这个题目的关键是明确二次方程$f(x)=0$在$[-1,1]$上有解，相当于这个方程在区间$[-1,1]$上有一个解或者有两个解，弄清这个要求，问题就容易解决了.

2. 分类讨论与整合思想

在解题时，我们常常遇到这样一种情况：解到某一步之后，不能再以统一的方法、统一的式子继续进行了，因为这时被研究的问题包含了多种情况，这就必须在条件所给出的总区域内，正确划分若干个子区域，然后分别在多个子区域内进行解题，这就是分类讨论的思想方法. 分类思想是以概念的划分、集合的分类为基础的思想方法，这里集中体现的是由大化小，由整体化为部分，由一般化为特殊的解决问题的方法，其研究方向基本是“分”，但分类解决问题之后，还必须把它们整合在一起，这种“合一分一合”的解决问题的过程，就是分类与整合的思想方法.

对分类讨论思想的考查，一方面，是考查有没有分类的意识，遇到应该分类的情况，是否想到要分类.

有哪些情况需要分类呢?

(1) 有些概念就是分类定义的，例如绝对值的概念，对$|x|$要分为$x>0$，$x=0$和$x<0$三类；又如三角形

可分为锐角三角形，直角三角形，钝角三角形三类；函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，当 $a=0$ 时是一次函数，当 $a\neq 0$ 时是二次函数等.

(2) 有的运算法则、定理、公式是分类给出的，例如等比数列的求和公式就分为 $q=1$ 和 $q\neq 1$ 两种情况；对数函数的单调性就分为 $a>1$，$0<a<1$ 两种情况；不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解又分为 $a\neq 0$，$a>0$ 时 $\Delta>0$，$\Delta=0$，$\Delta<0$ 及 $a<0$ 时 $\Delta>0$，$\Delta=0$，$\Delta<0$ 共七种情况；直线的斜率分为存在与不存在两种情况等.

(3) 图形位置的相对变化也会引起分类，例如两点在同一平面的同侧，异侧；二次函数图象的对称轴相对于定义域的不同位置；求不等式 $(x-1)(x-a)<0$ 时，在数轴上，要区别 a 在 1 的左侧，重合与右侧三种情况等.

(4) 对于一些题目如排列组合的计数问题，概率问题等又要按题目的特殊要求，分成若干情况研究.

(5) 涉及到整数或自然数的问题，或 $(-1)^n$ 时，可对整数分为奇数和偶数两类，或者把整数按以 3 或以 4，以 5 等为模的同余类分类.

所以，考查分类讨论思想的第一个内容就是想到想不到要分类；

第二方面则是如何分类，即要会科学地分类，分类要标准统一，不重不漏；

第三方面是分类之后如何研究，即如何在不同情况下进行讨论；

第四方面是如何把分类讨论的结果进行整合.

(1) 遇到概念的分类定义，是否想到分类

【例 1】 (2004 北京卷，理) 某段城铁线路上依次有 A、B、C 三站，$AB=5\ \text{km}$，$BC=3\ \text{km}$，在列车运行时刻表上，规定列车 8 时整从 A 站发车，8 时 07 分到达 B 站并停车 1 分钟，8 时 12 分到达 C 站. 在实际运行中，假设列车从 A 站正点发车，在 B 站停留 1 分钟，并在行驶时以同一速度 $v\ \text{km/h}$ 匀速行驶，列车从 A 站到达某站的时间与时刻表上相应时间之差的绝对值称为列车在该站的运行误差.

(Ⅰ) 分别写出列车在 B、C 两站的运行误差；

(Ⅱ) 若要求列车在 B，C 两站的运行误差之和不超过 2 分钟，求 v 的取值范围.

【分析及解】

(Ⅰ) 列车在 B，C 两站的运行误差(单位：分钟)分别是

$$\left|\frac{300}{v}-7\right| \text{和} \left|\frac{480}{v}-11\right|.$$

(Ⅱ) 由于列车在 B，C 两站的运行误差之和不超过 2 分钟，所以

$$\left|\frac{300}{v}-7\right|+\left|\frac{480}{v}-11\right|\leqslant 2.$$

该不等式是一个含绝对值符号的不等式，**要去掉绝对值符号就要根据 $\frac{300}{v}-7$ 和 $\frac{480}{v}-11$ 的正负进行分类.**

当 $\frac{300}{v}-7\geqslant 0$，即 $0<v\leqslant\frac{300}{7}$ 时，不等式变形为 $\frac{300}{v}-7+\frac{480}{v}-11\leqslant 2$，

解得 $39\leqslant v\leqslant\frac{300}{7}$；

当 $\frac{300}{v}-7<0$，且 $\frac{480}{v}-11\geqslant 0$，即 $\frac{300}{7}<v\leqslant\frac{480}{11}$ 时，不等式变形为 $7-\frac{300}{v}+\frac{480}{v}-11\leqslant 2$，

解得 $\frac{300}{7}<v\leqslant\frac{480}{11}$；

当 $\frac{480}{v}-11<0$，即 $v>\frac{480}{11}$ 时，不等式变形为 $7-\frac{300}{v}+11-\frac{480}{v}\leqslant 2$，

解得 $\frac{480}{11}<v\leqslant\frac{195}{4}$.

综上所述，v 的取值范围是 $\left[39,\ \frac{195}{4}\right]$.

【例 2】 (2005 浙江卷，理) 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象关于原点对称，且 $f(x)=x^2+2x$.

(Ⅰ) 求函数 $g(x)$ 的解析式；

(Ⅱ) 解不等式 $g(x)\geqslant f(x)-|x-1|$；

(Ⅲ) 若 $h(x)=g(x)-\lambda f(x)+1$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数，求实数 λ 的取值范围.

【分析及解】 (Ⅰ) 设函数 $y=f(x)$ 的图象上任一点 $Q(x_q,\ y_q)$ 关于原点的对称点为 $(x,\ y)$，