普通高等教育"十一五"国家级规划教材

统计信号处理

Statistical Signal Processing

罗鹏飞　编著

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

统计信号处理

罗鹏飞　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内容简介

本书为普通高等教育“十一五”国家级规划教材。

本书系统地论述了统计信号处理的基本理论，包括估计理论、最佳滤波理论和信号检测理论。

本书共10章，第1章为引言，介绍统计信号处理的基本概念和发展历史。第2章介绍统计信号处理的数学基础，复习本书将用到的数学知识。第3章介绍估计理论，包括估计的基本概念和信号处理实例。第4章介绍维纳滤波，包括最佳滤波的基本概念等。第5章介绍卡尔曼滤波的基本概念、算法推导等及其在雷达数据处理中的应用。第6章介绍非线性滤波，包括线性化卡尔曼滤波和扩展的卡尔曼滤波及其应用。第7章介绍匹配滤波器，包括输出信噪比最大的最佳线性滤波器、匹配滤波器、广义匹配滤波器及离散时间的匹配滤波器。第8章介绍判决理论，包括假设检验的基本概念等。第9章介绍离散时间信号的检测。第10章介绍连续时间信号的检测。每章最后都附有大量的习题。

本书可作为普通高等院校电子信息类专业的研究生和高年级本科生教材或教学参考书，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

统计信号处理/罗鹏飞编著. —北京：电子工业出版社，2009.4

ISBN 978-7-121-08417-1

Ⅰ. 统… Ⅱ. 罗… Ⅲ. 统计信号—信号处理—高等学校—教材 Ⅳ. TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第030096号

责任编辑：冉哲
印　　刷：北京机工印刷厂
装　　订：三河市鹏成印业有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路173信箱　邮编 100036
开　　本：720×1000　1/16　印张：19　字数：416千字
印　　次：2009年4月第1次印刷
印　　数：4000册　　定价：30.00元

凡购买电子工业出版社的图书，如有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至dbqq@phei.com.cn。

服务热线：(010)88258888。

前　言

“统计信号处理”是一门研究从噪声背景中提取有用信息的理论和方法的学科专业基础课程，其基本内容包括信号检测、估计和最佳滤波理论，在通信、雷达、卫星导航、自动控制、图像处理、气象预报、生物医学、地震信号处理等领域有着广泛的应用。随着信息技术的发展，统计信号处理的理论和应用将日益广泛和深入。

本教材是作者在多年讲授“统计信号处理”课程讲稿的基础上，根据电子信息类学科专业人才培养方案，结合教学体会和相关科研工作的成果编写的。本教材的编写目的是使读者通过本教材的学习，系统地掌握信号检测、估计和滤波的基本理论和方法，从而为后续专业课程的学习以及开展相关的科研工作打下牢固的基础。

本教材在编写思路上，本着“厚基础、重实践、理论与工程应用相结合”的教学理念，精心提炼学科核心的基础理论，强调对核心基础理论的基本概念的阐述，减少烦琐的公式推导过程，给出了许多信号处理的实例，通过具体的例子和应用实例来说明统计信号处理中抽象难懂的概念。每章最后都给出了大量的习题，其中部分习题是教材中公式、定理的补充证明。因此，在学完每章内容后，完成每章的习题，既是对所学内容的巩固，同时也是对教材内容的补充和扩展。

本书可作为普通高等院校电子信息类专业的研究生和高年级本科生教材或教学参考书，教学参考学时为54～60学时。本教材提供配套教学课件和习题解答，可通过华信教育资源网(http:\\www. huaxin. edu. cn)免费下载或向作者本人直接索取。

在教材的编写过程中，在读的研究生张剑、李刘才、于宵晖等参与了教材的资料收集、整理、图形绘制等工作，在此表示感谢。教材的编写得到了电子工业出版社的大力支持，冉哲编辑在教材的编写思路上与作者进行了反复的沟通，马岚编辑也给作者提出了许多宝贵意见，在此表示诚挚的谢意。

作者

2009年3月

目　　录

第1章 引 言

1.1 基本概念

统计信号处理是信号处理的一个分支，它是从噪声背景中提取有用信息的最佳理论和方法，它的基本内容包括信号检测、估计和最佳滤波理论及其应用。由于有用的信息通常是以信号作为载体的，信号在产生、传输和处理过程中会叠加上一定的噪声，而噪声是随机的，因此，统计信号处理的对象是随机信号，对随机信号的处理需要用到概率论、数理统计、线性代数、信号与系统以及数字信号处理的理论。

统计信号处理的应用领域包括通信、雷达、声呐、导航、自动控制、语音信号处理、图像处理、生物医学、地震信号处理、天气预报等。所有这些应用领域都有一个共同的特点，就是要确定感兴趣的事件在什么时候发生，以及得到该事件中更多的信息。

下面以通信系统和雷达系统为例说明统计信号处理的概念。

在通信系统中，关键的问题是信息的传输问题，通常把待传输的数据或资料称为消息。为了能使消息远距离传输，需要对消息进行变换、编码并调制成相应的信号，然后加到信道中进行传播，接收系统在接收到信号后再经过解调、译码、反变换还原信息，送给接收系统终端或使用者，从而完成信息传输的任务，如图 1.1 所示。

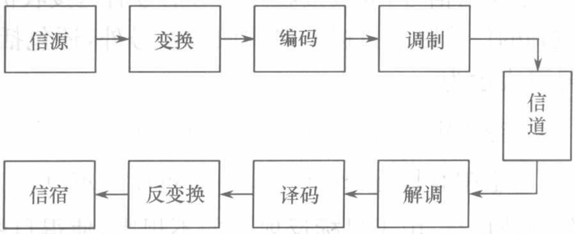

图 1.1 通信系统的简化框图

对通信系统的要求主要集中在两个方面：① 系统如何有效地传输信息，称为系统的有效性问题；② 系统如何可靠地传输信息，称为系统的可靠性问题。使系统可靠性下降的原因无外乎如下几个方面：外部干扰和内部噪声、信息传输过程中信号的畸变、技术设备的不完善。干扰是不可避免的，且是随机的，事先无法确知的，这对信息的传输是不利的，它大大降低了传输的可靠性。为了保障信息的可靠传输，就必须同干扰进行斗争。图 1.2 给出了一个典型的二元相移键控(BPSK) 通信系统。待传输的信息转换成二进制数字(比特)“0” 和“1” 序列，每个数字位首先进行调制，调制器将数字“0” 调制成 $\cos 2\pi f_0 t$，将数字“1” 调制成 $\cos(2\pi f_0 t + \pi) = -\cos 2\pi f_0 t$，即

$$0\cdots\cdots\ s_0(t)=\cos 2\pi f t_0 \qquad 0\leqslant t\leqslant T$$

$$1\cdots\cdots\ s_1(t)=-\cos 2\pi f t_0 \qquad 0\leqslant t\leqslant T$$

调制后的信号如图 1.3 所示。信号的相位表明了数字源发送的是“0”还是“1”，调制的信号加到信道中传播，信号在信道传播时通常会发生畸变，并且会叠加上噪声。在接收端，首先进行解调，去掉载波信号形成基带脉冲波形，然后由检测器确定发送的是“0”还是“1”，这是一个噪声中信号的检测问题。此外，为了消除信道造成的信号畸变，通常需要采用均衡技术使信号复原，这是一种最佳滤波问题。

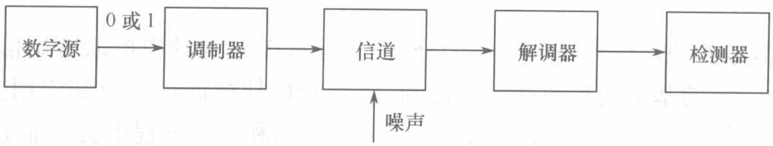

图 1.2　二进制数字通信系统简化框图

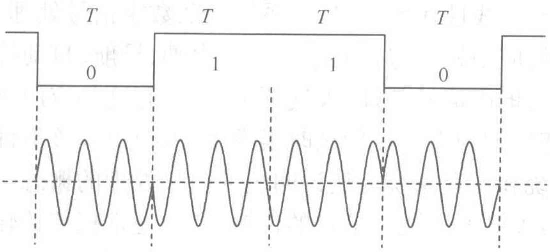

图 1.3　二元相移键控信号

在雷达系统中，如图 1.4 所示，发射机产生发射信号，通过天线向空中辐射，发射的信号遇到目标后产生反射信号，天线接收到反射信号后送接收机进行处理。在实际应用中，接收机接收到的信号除了目标反射的回波信号外，还包括杂波和干扰信号，因此，接收到的信号可表示为

$$\begin{cases}\text{空中没有目标：}z(t)=c(t)+n(t)\\ \text{空中有目标：}z(t)=s(t)+c(t)+n(t)\end{cases}$$

式中，$s(t)$ 为目标的回波信号。由于目标反射面的不规则，使得目标反射信号的幅度和相位产生随机的变化，因此，$s(t)$ 通常都是随机信号。$c(t)$ 为雷达周围地物、云雨或

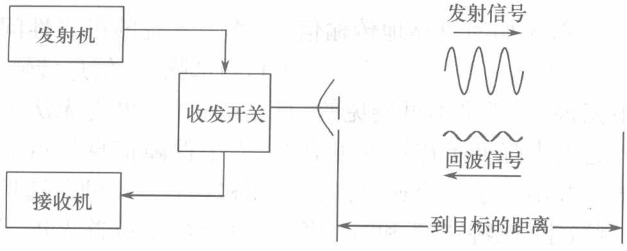

图 1.4　雷达的基本原理

海浪等产生的杂波。$n(t)$ 为接收机内部的噪声。杂波和噪声都是随机过程,统称为噪声,两者之和用 $w(t)$ 表示。

雷达接收机有两个基本的功能:一是根据接收信号确定目标存在与否;二是在确定有目标的情况下确定目标的位置。确定目标存在与否实际上就是根据接收波形对如下两个假设做出判决:

$$H_0: z(t) = w(t)$$

$$H_1: z(t) = s(t) + w(t)$$

判决是在噪声背景下进行的,这是一个信号检测问题。目标与雷达的距离 R 可根据目标的回波到达时间 t_R 来确定,可表示为 $R = ct_R/2$,其中 c 为光速。在噪声背景下提取目标回波到达时间参数是一个信号参数的估计问题。由于信号检测与参数估计都是在噪声环境下进行的,因此,只有充分地了解信号和噪声的统计特性,采用统计的处理方法,雷达接收机才能根据接收波形最佳的检测目标并提取目标的位置信息。

无论通信系统还是雷达系统,干扰和噪声总是存在的,这对信息的提取很不利。统计信号处理的理论就是在同这些不利因素进行斗争的过程中发展起来的。与干扰作斗争实际上就是在充分了解干扰统计特性的基础上,建立起最佳处理方法,抑制干扰的影响,提取有用信息。

所谓信号检测,是指从含有噪声的信号中判断是否有感兴趣的信号存在或者区分几种不同的信号;而估计是指从含有噪声的数据或信号中提取信号的某些参数;最佳滤波是指根据对系统的观测最佳地估计系统的状态。

1.2 发展历史

统计信号处理的理论是在统计推断(Statistical Inference)的假设检验(Hypothesis Testing)理论的基础上发展起来的。最早的统计推断方法大概是贝叶斯(Thomas Bayes,1702—1761 年)提出的方法。

概率论中的贝叶斯定理是这样描述的:设 $A_i \in \Omega\ (i = 1, 2, \cdots, n)$,$A_i \cap A_j = \varnothing\ (i \neq j)$ 且 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$,则对任意的事件 $B \in \Omega\ (P(B) > 0)$,有

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(B \mid A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i)}$$

贝叶斯定理暗示了如下统计推断方法:如果知道事件 B 已经发生,就可以对所有的原因 A_i 计算其后验概率 $P(A_i \mid B)$,比较后找出使其值最大的原因 A^*,即 $A^* = \max\limits_{A_i}\{P(A_i \mid B)\}$,由此可推断出 A^* 为 B 的原因,也即认为 B 的发生是事件 A^* 引起的。贝叶斯是英国著名的数学家,他在数学方面主要研究概率论,1758 年发表了《机

会的学说概论》，书中提到许多统计学的术语被沿用至今。他将归纳推理法用于概率论基础理论，创立了贝叶斯统计理论，1763 年发表了这方面的论著，对于统计决策函数、统计推断、参数估计等做出了贡献，对于现代概率论和数理统计都有很重要的作用。在统计信号处理中大量使用贝叶斯方法和非贝叶斯方法的概念，其主要差别在于是否利用先验信息，先验信息的使用需要用到贝叶斯公式。

拉普拉斯(P. S. Laplace，1749—1827 年) 和高斯(C. F. Gauss，1777—1855 年) 应用贝叶斯方法讨论了参数的估计问题。拉普拉斯在他的研究中，把参数 θ 与估计量 t 的距离的单调函数 $w(|t-\theta|)$ 当作衡量估计量好坏的标准，特别讨论了 $w=|t-\theta|$ 的情形。其合理性是比较好理解的，因为 $|t-\theta|$ 越小，说明 t 越接近真值 θ，估计越准确，反之则相反。高斯也仿照拉普拉斯方法考虑了 $w(|t-\theta|)$。他注意到，取 $w=(t-\theta)^2$，在数学上能得到许多重要的结论。1794 年，高斯从这种考虑出发创立了最小二乘法。1801 年，高斯在计算小行星谷神星轨道时应用了最小二乘法，并得到了比较精确的结果。最小二乘法现在仍然是一种实用的方法。

英国统计与遗传学家费希尔(Sir Ronald Aylmer Fisher，1890—1960 年) 于 20 世纪 20 年代提出了显著性检验的概念，成为假设检验的先驱。1925 年，其所著《Statistical Methods for Research Workers》被认为是 20 世纪对统计学最有影响力的著作之一。费希尔还提出了极大似然法，这种方法不需要假定先验概率信息，其意义非常重大。此外，费希尔还提出了充分性(sufficiency) 和费希尔信息(Fisher information) 等统计概念。

1933 年，纽曼(Jerzy Neyman，1894—1981 年) 和皮尔逊(Karl Pearson，1857 — 1936 年) 发展了假设检验的数学理论，在“On the Problem of the Most Efficient Tests of Statistical Hypotheses”一文中，建议去寻找使错误机会最小的检验。

1939 年，瓦尔德(Abraham Wald，1902—1950 年)，提出了代价和风险的概念，他认为做出错误的判决是要付出代价的，不同的错误类型，付出的代价不同。他认为，应寻找使代价最小的检验。瓦尔德还把统计理论与对策论结合起来，在统计学中引入了极大极小原理。

统计学在工程领域的应用大概起始于 1941 年。当时，维纳(Norbert Wiener，1894—1963 年) 在 MIT 开展反飞机武器的自动瞄准装置的设计研究，尽管这项研究并未取得满意的结果，但提出了两个重要的思想：其一是把信息的通信看作一个统计学的问题；其二是提出了最佳准则，使性能能够计算，这对后来的最佳滤波理论的建立产生了深远的影响。人们注意到，消息中往往混杂着噪声，可以设想，用一个算子作用到被混杂的消息上，以便恢复出原来的消息，这个算子的最佳设计取决于消息和噪声各自及相互的统计特性。维纳从最小均方误差准则出发，得到了线性滤波器的最佳传输函数的表达式。维纳在 1949 年发表的“Extrapolation，Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series，with Engineering Applications”的报告中，对维纳滤波器进行了详细的阐述。1960 年，卡尔曼(Rudolf E. Kalman) 发表了一篇题

为“A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems”的著名论文，讨论了随机离散线性系统的状态估计问题，随后，卡尔曼和布西(R. S. Bucy)又联合发表了“New Results in Linear Filtering and Prediction Theory”一文，将问题扩展到连续时间系统的状态估计问题。这两篇论文创立了一种新的滤波理论——卡尔曼滤波理论，卡尔曼滤波理论将维纳滤波问题扩展到了非平稳的多输入多输出系统，其应用范围更广。近半个世纪以来，卡尔曼滤波理论在各个技术领域中获得了广泛应用。

信号检测理论的研究始于第二次世界大战中对雷达目标检测的研究，最初的设计准则就是使信噪比最大。1943 年，诺茨(D. O. North)提出了匹配滤波理论，这种理论从噪声与信号的统计特性出发，以输出信噪比最大为准则，得出了在白噪声环境下，最佳线性滤波器的传递函数应为输入信号频谱的复共轭，即

$$H(\omega) = cS^{*}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$

匹配滤波器是信号检测系统中最重要的部分。在这段时间内，人们为了在噪声中有效地检测信号，研究了许多方法。相关接收法是其中重要的方法之一。根据随机过程的理论，周期信号的自相关函数仍是周期的，而噪声的相关时间较短，利用周期信号与噪声自相关函数的不同可以有效地检测信号。雷达信号一般是周期的，所以相关接收法在检测周期性雷达信号时特别有效。后来人们又发现，随着观测时间增加 n 倍，信号功率与噪声功率之比也增加 n 倍，这就可以在强杂波下检测周期性雷达信号。人们还发现，相关接收机可以用匹配滤波器实现，这样就解决了相关接收机的实现问题。

从以上的发展过程我们看到，人们同噪声作斗争的过程实质上就是有意识地利用信号与噪声的统计特性来尽可能地抑制噪声、提取有用的信息的过程。

从统计学的观点来看，噪声中接收信号的过程可以看作一个统计判断的过程，即用统计判断的方法，根据所接收的混合波形来做出信号存在与否的判断。按照假设检验的观点，判断接收到的波形有无信号存在，即要对下面两个假设进行检验：

H_0 假设：噪声(无信号)

H_1 假设：信号＋噪声(有信号)

20世纪50年代初期，人们将统计的假设检验、参数估计、序列分析等统计数学方法用于信号检测问题，建立了信号检测与估计的统计理论，这是经典的统计信号处理的理论。

半个多世纪以来，统计信号处理理论的应用领域不断扩展，同时建立了许多新的理论与方法，例如，检测方面的非参量信号检测、CFAR 检测、Robust 检测、局部最佳检测，分布式检测、量子检测、混沌信号检测、基于高阶统计量的检测等；在估计方面，有卡尔曼滤波、谱估计、自适应滤波、数据融合、粒子滤波等。作为当前最为活跃的研究领域之一，统计信号处理的新理论不断出现，应用领域不断扩展，学科的发展方兴未艾。

1.3 内容安排

本书内容包括三个部分:估计理论、最佳滤波理论和信号检测理论。

第 2 章首先给出了统计信号处理将用到的数学基础,包括随机过程基础、随机动态系统、卡亨南一列维展开和蒙特卡洛仿真方法,而矩阵理论则放到本书的附录 A 中。

第 3 章介绍了估计理论,包括估计的基本概念、常用的估计准则以及评价估计量性能的指标和评价方法,最后给出了估计的应用实例。估计方法可粗略地划分为贝叶斯方法和非贝叶斯方法。贝叶斯方法利用被估计量的先验信息,如被估计量的概率密度和数字特征,常用方法有最小均方估计、最大后验概率估计、线性最小均方估计等。由于非贝叶斯方法对被估计量不做任何假定,因而应用范围更广泛,常用的方法有最大似然估计、最小二乘估计等。估计量性能通常从估计的无偏性、有效性、一致性等方面进行评价,而克拉美 — 罗(Cramer-Rao) 下限则给出了无偏估计量的性能边界,在性能评估中被广泛采用。

第 4、5、6 章介绍最佳滤波问题。最佳滤波也称为波形估计,即从噪声中提取信号波形,包括对信号(或数据) 的滤波、预测、平滑等。本书从线性最小均方误差准则出发,介绍了维纳滤波、卡尔曼滤波、非线性滤波等常用的滤波方法。维纳滤波适合于平稳的标量随机过程的估计,而卡尔曼滤波则适合于非平稳的矢量随机过程的估计,因此应用范围更为广泛。非线性滤波方法很多,本书仅介绍了线性化卡尔曼滤波和扩展的卡尔曼滤波。

第 7、8、9、10 章介绍了信号检测问题,包括匹配滤波器、统计判决理论、离散时间信号的检测、连续时间信号的检测。第 7 章介绍了以输出信噪比最大作为准则的最佳线性滤波器,分别讨论了白噪声和色噪声环境下的最佳线性滤波器,即匹配滤波器和广义匹配滤波器。匹配滤波器是信号检测系统的关键部件,它可以使输出信噪比达到最大,较高的信噪比是信号检测系统所必需的。第 8 章介绍了假设检验的基本概念、判决准则和判决性能的评价,包括简单假设检验、复合假设检验、多元假设检验以及序贯检验的概念。假设检验的理论是信号检测的基础。第 9、10 章围绕离散时间信号和连续时间信号的检测,分别介绍了高斯白噪声中确知信号的检测、高斯色噪声中确知信号的检测、具有未知参数的确定性信号的检测和随机信号的检测,非高斯噪声中信号的检测在第 9 章中也做了初步介绍。

第 2 章　统计信号处理的数学基础

2.1　随机过程基础

统计信号处理的研究对象是随机过程，首先简要回顾一下随机过程的基本理论。

2.1.1　随机过程的定义及其统计特性

1. 随机过程的定义

定义 2.1　设随机试验 E 的样本空间为 $S=\{e\}$，对其每一个元素 $e_i(i=1,2\cdots)$ 都以某种法则确定一个样本函数 $x(t,e_i)$，由全部元素 $\{e\}$ 所确定的一族样本函数 $x(t,e)$ 称为随机过程，简记为 $x(t)$。

由定义可看出，随机过程是时间 t 和随机试验结果 e 的二元函数。对于某个特定的时刻 t_i，$x(t_i,e)$ 是一个随机变量，因此，随机过程也可以看作随时间变化的随机变量。

2. 随机过程的概率分布

一维分布　对于任意时刻 t，$x(t)$ 是一个随机变量，设 x 为任意实数，定义

$$F(x,t)=P\{x(t)\leqslant x\} \tag{2.1.1}$$

为 $x(t)$ 的一维分布。随机过程的一维分布不仅是实数 x 的函数，也是时间 t 的函数。

如果 $F(x,t)$ 对 x 的一阶导数存在，则定义

$$p(x,t)=\frac{\partial F(x,t)}{\partial x} \tag{2.1.2}$$

为随机过程 $x(t)$ 的一维概率密度。

二维分布　对任意的两个时刻 t_1 和 t_2，$x(t_1)$ 和 $x(t_2)$ 是两个随机变量，因此可以用二维随机变量的概率分布来定义随机过程的二维分布。对于任意的两个时刻 t_1，t_2，以及任意的两个实数 x_1,x_2，定义

$$F(x_1,x_2,t_1,t_2)=P\{x(t_1)\leqslant x_1,x(t_2)\leqslant x_2\} \tag{2.1.3}$$

为随机过程 $x(t)$ 的二维概率分布。如果 $F(x_1,x_2,t_1,t_2)$ 对 x_1,x_2 的偏导数存在，则定义

$$p(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_2 \ \partial x_2} \tag{2.1.4}$$

为随机过程 $x(t)$ 的二维概率密度。

同理，对于任意的 $t_1, t_2, \cdots, t_N$ 时刻，$x(t_1), x(t_2), \cdots, x(t_N)$ 是一组随机变量，定义这组随机变量的联合分布为随机过程 $x(t)$ 的 N 维概率分布，即定义

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_N, t_1, t_2, \cdots, t_N) = P\{x(t_1) \leqslant x_1, x(t_2) \leqslant x_2, \cdots, x(t_N) \leqslant x_N\} \tag{2.1.5}$$

为随机过程 $x(t)$ 的 N 维概率分布；定义

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_N, t_1, t_2, \cdots, t_N) = \frac{\partial^N F(x_1, x_2, \cdots, x_N, t_1, t_2, \cdots, t_N)}{\partial x_1 \ \partial x_2 \cdots \ \partial x_N} \tag{2.1.6}$$

为随机过程 $x(t)$ 的 N 维概率密度。

N 维分布可以描述任意 N 个时刻状态之间的统计规律，比一维、二维分布含有更多的 $x(t)$ 的统计信息，对随机过程的描述也更趋完善。一般来说，要完全描述一个过程的统计特性，应该 $N \to \infty$，但实际上是无法获得随机过程的无穷维的概率分布的，在工程应用上，通常只考虑它的二维概率分布就够了。

3. 随机过程的数字特征

随机变量的数字特征有均值、方差、相关系数等，相应的，随机过程的数字特征常用的也是均值、方差、相关函数，它们都是从随机变量的数字特征推广而来的。不同的是，随机过程的数字特征一般不是常数，而是时刻 t(或 n) 的函数，因此随机过程的数字特征也常称为矩函数或示性函数。

均值　对于任意的时刻 t，$x(t)$ 是一个随机变量，把这个随机变量的均值定义为随机过程的均值，记为 $m_x(t)$，即

$$m_x(t) = E[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x, t) \mathrm{d}x \tag{2.1.7}$$

随机过程 $x(t)$ 的均值是时刻 t 的函数，也称为均值函数。统计均值就是对随机过程 $x(t)$ 中所有样本函数在时刻 t 的所有取值进行概率加权平均，所以又称为集合平均，它反映了样本函数统计意义下的平均变化规律。

方差　方差也是随机过程重要的数字特征之一，定义

$$\sigma_x^2(t) = E\{[x(t) - m_x(t)]^2\} \tag{2.1.8}$$

为随机过程 $x(t)$ 的方差。方差通常也可记为 $D_x(t)$，随机过程的方差也是时刻 t 的函数。由方差的定义可以看出，方差是非负函数，方差还可以表示为

$$\sigma_x^2(t) = E[x^2(t)] - m_x^2(t) \tag{2.1.9}$$

相关函数和协方差函数　均值和方差只描述了随机过程在某个特定时刻的统计特性，并不能反映随机过程在两个不同时刻状态之间的联系，而相关函数和协方差函数则可以描述随机过程在两个不同时刻的相关性。

设任意两个时刻 t_1, t_2，定义