高等学校教学用書

高等数学習題集

第三卷

H. M. 肯傑尔, P. O. 庫茲明著

高等教育出版社

高等学校教学用書

高等数学習題集

第三卷

H. M. 肯傑尔，P. O. 庫兹明著
赵根榕譯

高等教育出版社

本書系根据苏联国立技术理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的肯傑尔(Н. М. Гюнтер)和庫茲明(Р. О. Кузьмин)合著的“高等数学習題集”(Сборник задач по высшей математике)第三卷1951年第四版修正本譯出的。原書經苏联高等教育部审定为高等学校教学参考書。

本書共三卷，本卷由西北大学赵根榕翻譯。

高等数学習題集

第三卷

Н. М. 肯傑尔, Р. О. 庫茲明著

赵根榕譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市书刊出版业营业許可証出字第054号)

商务印书館上海厂印刷 新华书店发行

統一书号 13010·408 开本 850×1168 1/32 印张 8 6/16

字数 184,000 印数 8,001—16,000 定价(4) ¥0.80

1954年4月商務初版(共印8,500册)

1958年3月新1版 1960年2月上海第5次印刷

原書第三版序

與前兩卷比較，這一卷中的習題總起來說內容是比較難的。應當注意，這一卷的某幾章所關涉到的科學分支的特徵是內容非常豐富。例如，這兒講到複變函數論，就與它有關的問題來說，它是極爲廣泛的。因此，第三卷的修改工作按問題的性質來說是非常困難的。這一版只將關於級數、近似算法與複變函數論的前三章加以較大的修改。爲了使讀者少依賴於他所有的有關的參考書，加入了一系列理論性的知識。在習題的安排與措辭方面，好多地方我都儘量地使內容比較容易接受。爲更全面地說明所研究的問題的範圍起見，加入了許許多多的新問題。雖然如此，前兩卷的序中所說的那些原則，在這一卷中，甚至就是在它修改以後，畢竟也不能像前兩卷許多章節中那樣全面地實現出來，這部分地是由於問題的巨大的困難性所致。但我仍然希望這本書多少能做到容易瞭解與容易使用，並希望它的內容能達到非常豐富的境地。

如蒙指出本書的優點與缺點，提出它的合乎願望的修改意見，則作者不勝感激。

P. 庫茲明

第三卷目錄

原書第三版序

第十二章　級數……511

§1．級數的收斂性的研究……511

§2．有限和與無限級數的直接求和法……516

§3．用微分法以求級數的和的方法．幾個級數展開式……523

§4．三角級數……527

§5．雜題……536

第十三章　近似算法……544

§1．內插法．誤差論……544

§2．積分的近似算法……550

§3．尤拉-麥克勞林公式與類似的方法……553

§4．級數收斂性的加強……555

§5．藉助於級數的積分計算法……560

§6．數字方程的解法……563

§7．微分方程的近似積分法……564

第十四章　複變函數……569

§1．高希-黎曼方程……569

§2．函數的奇點……570

§3．留數及其應用……573

§4．函數零點的分佈……579

§5．將函數展開爲最簡分式與無限乘積法……582

§6．其它的級數展開法……586

§7．引導函數與特殊多項式……590

§8．共形變換……593

§9．模的極大值原理……598

§10．複變量微分方程……603

§11．對數學物理問題的應用……609

第十五章　數學物理方程……………………………………………………………618

§1. 列二階偏微分方程法……………………………………………………………618

§2. 二階線性方程之化爲標準形式…………………………………………………624

§3. 特徵線法…………………………………………………………………………625

§4. 黎曼方法…………………………………………………………………………630

§5. 福利變方法………………………………………………………………………633

§6. 積分方程…………………………………………………………………………646

第十六章　變分法……………………………………………………………………658

§1. 尤拉-拉格朗日方程 ……………………………………………………………658

§2. 變分法的最簡問題的必要與充分條件…………………………………………661

§3. 積分的參變形狀. 斜截性 ………………………………………………………664

§4. 哈密爾頓-雅谷比方程 …………………………………………………………666

§5. 依賴高階導函數或幾個函數的積分……………………………………………670

§6. 不連續解. 一邊變分 ……………………………………………………………674

§7. 重積分……………………………………………………………………………677

§8 等周問題…………………………………………………………………………684

§9. 雜題………………………………………………………………………………688

第十七章　概率論……………………………………………………………………691

§1. 基本定理的應用. 巴葉斯公式…………………………………………………691

§2. 數學期望. 有限差與生產函數的方法…………………………………………697

§3. 白爾努利定理. 切貝謝夫不等式………………………………………………701

§4. 拉普拉斯與梁甫諾夫-馬爾考夫定理 …………………………………………703

§5. 幾何概率與概率的分佈定律……………………………………………………707

§6. 統計觀察的數學加工(處理)……………………………………………………714

答案……………………………………………………………………………………726

第十二章　級數

§1. 級數的收斂性的研究

如果 $|u_n|\leqslant v_n$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收斂，則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收斂。下列兩個收斂性的判別準則常常是有效的。

達郎倍爾判別準則。如果 $0<q<1$ 而且對於所有的 $n>n_0$ 都有 $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<q$，則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收斂。但如對於所有的 $n>n_0$，$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|>1$，則級數發散。

高希-麥克勞林判別準則。如 $u_n=f(n)$ 是 n 的正下降函數，則在當 $n\to\infty$，$\int_1^n f(x)dx\to$ 確定的有限極限時，級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收斂。在 $\int_1^n f(x)dx\to\infty$ 時，級數發散。

項的符號不相同的級數，縱使由項的絕對值所成的級數發散，也可能收斂。當研究它們的收斂性時，亞貝爾-狄里赫列判別準則往往是有效的：如果當 $N\to\infty$ 時 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是有界的，而數 v_n 當 $n\to\infty$ 時下降而且 $\to 0$，則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 收斂。

試證定理：

1. 如 $|u_n|<\frac{c}{n^a}$，其中 c 是常量，則當 $a>1$ 時級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收斂。

2. 如 $u_n>\frac{c}{n^a}$，其中 $c>0$ 是常量，$a\leqslant 1$，則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 發散。

3. 如 $|u_n|<\frac{c}{n(\ln n)^a}$，其中 $a>1$，則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收斂；但如 $u_n>\frac{c}{n(\ln n)^a}$，其中 $a\leqslant 1$，則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 發散。

4. 記 $\ln\ln n=\ln_2 n$，$\ln\ln\ln n=\ln_3 n$，$\cdots$，這時如 $|u_n|<\frac{c}{n\ln n\ln_2 n\cdots\ln_{m-1} n(\ln_m n)^a}$，$a>1$ 則級數 $\sum u_n$ 收斂；如 $u_n>\frac{c}{n\ln n\ln_2 n\cdots\ln_{m-1} n(\ln_m n)^a}$，$a\leqslant 1$，則發散。

5. 愛爾馬科夫判別準則。假設當 $x>x_0$ 時，$f(x)$ 是正的下降函數。如對於那些 x 有不等式

$$\frac{e^x f(e^x)}{f(x)}\leqslant \lambda,$$

其中 $\lambda<1$，則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收斂，其中 $u_n=f(n)$。如果在同樣條件下但 $\frac{e^x f(e^x)}{f(x)}\geqslant 1$，則級數 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 發散。

提示 容易證明不等式：

在第一種情形下 $$\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f(t)dt\leqslant\lambda\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(t)dt,$$

在第二種情形下 $$\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} f(t)dt\geqslant\int_{x_{\nu-1}}^{x_\nu} f(t)dt。$$

這兒 $x_1=e^{x_0}$，$x_2=e^{x_1}$，$x_3=e^{x_2}$，$\cdots$。

6. 枯莫爾定理。如果對於已知的正數級數 $\sum u_n$ 能找到這樣的一個正數序列 c_n，使得對於所有的 n 有 $c_n u_n-c_{n+1}u_{n+1}>\rho u_{n+1}$，其中 $\rho>0$ 是常量，則級數 $\sum u_n$ 收斂。

7. 枯莫爾收斂性判別準則。如果級數 $\sum u_n$ 的項是正的而且能求出這樣的一列正數 $c_1, c_2, c_3\cdots$，使得對於所有的 $n>n_0$，有不等式

$$c_n u_n-c_{n+1}u_{n+1}\geqslant a u_{n+1},$$

其中 $a>0$，則已知級數收斂。

但如對於所有的 $n>n_0$，有不等式

$$c_n u_n-c_{n+1}u_{n+1}\leqslant 0,$$

數 $c_1, c_2, c_3,\cdots$ 是正的，而級數 $\sum\frac{1}{c_n}$ 發散，則級數 $\sum u_n$ 也發散。

注意 在第一種情形，$u_2+u_3\cdots+u_n<\frac{c_1u_1}{a}$；而在第二種情形，容易證明 $u_{n+1}\geqslant\frac{c_1u_1}{c_{n+1}}$。

8. 拉別判別準則。如 $u_n>0$ 而且 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)>1$，則級數收斂。如果這個極限要 <1，那麼級數就發散。

9. 別爾特蘭關於級數 $\sum u_n$ 的判別準則，其中 $u_n>0$ 而且

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)-1\right]\ln n=A。$$

如 $A>1$，則級數收斂；但當 $A<1$ 時，它發散。

10. 高斯對於級數 $\sum u_n$ 當 $u_n>0$ 與

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^2}$$

時的判別準則，其中 λ 與 μ 是常量，而 θ_n 是有界的量，

如果 $\lambda>1$，則級數收斂；如果 $\lambda<1$，則發散。當 $\lambda=1$ 時，如 $\mu>1$，則級數收斂；如 $\mu\leqslant 1$，則發散。

試研究下列具有已知一般項的級數的收斂性。

11. $u_n=\dfrac{1}{x^n+1}$，$x>0$.　　**12.** $u_n=\dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$。

13. $u_n=\dfrac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$。

14. $u_n=\dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n+1}}$。　　**15.** $u_n=\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$。

16. $u_n=n!\left(\dfrac{x}{n}\right)^n$。　　**17.** $u_n=\dfrac{n^n}{n!}x^n$。

18. $u_n=\dfrac{x^{n^2}}{n!}$。　　**19.** $u_n=\dfrac{\sqrt{n^n}}{n!}x^n$。

20. $u_n=\dfrac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$。

21. $u_n=n\dfrac{a(a+1)\cdots(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n)}$；　$a>0$，$b>0$。

22. $u_n=\dfrac{(a+1)(2a+1)\cdots(na+1)}{(b+1)(2b+1)\cdots(nb+1)}$；　$a\geqslant 0$，$b\geqslant 0$。

23. $u_n=\dfrac{\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!}\cdot\dfrac{1}{n^\alpha}$；　$\alpha>0$，$\beta>0$。

24. $u_n=(2-\sqrt{e})(2-\sqrt[3]{e})\cdots(2-\sqrt[n]{e})$。

$\left[\text{注意 } e<\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\text{ 是有益的。}\right]$

25. $u_n=\ln\cos\frac{x}{n}$。　　　　**26.** $u_n=e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$。

27. $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{x\ln a}{n}\right)^n$。

28. $u_n=\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}$。

29. $u_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\cdot\frac{1}{2n+1}$。

30. $u_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}$。

31. $u_n=\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\right)^a$。

在最後三個問題中,爲方便計可應用不等式

$$\frac{1}{2\sqrt{2n}}<\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}<\frac{1}{\sqrt{2n}},$$

它們由顯明的不等式

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}<\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1}$$

可以得到。

32. 試研究超幾何級數

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\cdots$$

的收斂性。

33. 如果 $u_1=1$, 而

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{3}{4}+\frac{(-1)^n}{2},$$

試研究級數 $\sum u_n$ 的收斂性。

34. 試研究級數

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots$$

的收斂性。

35. 試研究級數 $\sum u_n^{-1}$ 的收斂性，其中 u_n 是非波納契數：

$$u_1=1,\ u_2=2,\ u_3=3,\ u_4=5,\ \cdots,\ u_{n+1}=u_n+u_{n-1}。$$

試研究級數的收斂性：

36. $1-\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}-\frac{1}{4a}+\cdots$。

37. $1+\frac{1}{2a}-\frac{2}{3a}+\frac{1}{4a}+\frac{1}{5a}-\frac{2}{6a}+\cdots$。

38. $\sin x-\sin\sin x+\sin\sin\sin x-\cdots$。

39. $\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots$。

40. 試證：如 $x\neq 0$, $\sin x\neq 0$, 則當 $a>2$ 時級數 $\nu_0^a+\nu_1^a+\nu_2^a+\cdots$ 收斂而且當 $a\leqslant 2$ 時發散，其中 $\nu_0=x$, $\nu_1=\sin\nu_0$, $\nu_2=\sin\nu_1$, $\cdots$。

41. $\nu_1=\operatorname{arc\,tg} x$, $\nu_2=\operatorname{arc\,tg}\nu_1$, $\nu_3=\operatorname{arc\,tg}\nu_2$, $\cdots$。試研究當 $a>0$ 時級數 $\sum\nu_m^a$ 的收斂性。

42. 如級數 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n x^n$ 的項當 $x=x_0$ 與 $x=x_1$, $|x_1|>|x_0|$ 時是有界的，則當 $|x_0|<|x|<|x_1|$ 時級數收斂。試證明之。

43. 如果對於任意的 $m>0$, $n>0$ 有不等式

$$f\left(\frac{mx_1+nx_2}{m+n}\right)\leqslant\frac{mf(x_1)+nf(x_2)}{m+n},$$

則函數 $f(t)$ 叫做凸的。試證：當 $0<x_0<x<x_1$ 時收斂的級數 $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n x^n$ (這時 $a_n>0$) 的和是 $t=\ln x$ 的凸函數。

44. 試證亞培爾定理： 如 $a_n>0$ 而且當 $n\to\infty$ 時 $A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\to\infty$, 則級數 $\sum\frac{a_n}{A_n^\sigma}$ 當 $\sigma>1$ 時收斂而且當 $\sigma\leqslant 1$ 時發散。

45. 因爲正數的幾何均值不大於它們的算術均值，所以

$$a_{n-1}\,a_n^{p-1}\leqslant\frac{a_{n-1}^p+(p-1)a_n^p}{p};\ a_{n-1}>0;\ a_n>0。$$

試藉此以證明不等式

$$a_n^p-\frac{p}{p-1}a_n^{p-1}a_n\leqslant\frac{1}{p-1}[(n-1)a_{n-1}^p-na_n^p],$$

其中 $na_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，而數 $a_1, a_2,\cdots, a_n$ 是正的。

46. 在同樣的條件下，試證：

$$\sum_{n=1}^{m}a_n^p<\frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{m}a_n^{p-1}\,a_n。$$

47. 如果數 a_ν 與 $b_\nu>0$, $0<\lambda<1$; $\lambda+\mu=1$，則由赫爾提爾不等式，

$$\sum_{\nu=1}^{m}a_\nu b_\nu\leqslant\Big(\sum_{\nu=1}^{m}a_\nu^{\frac{1}{\lambda}}\Big)^\lambda\cdot\Big(\sum_{\nu=1}^{m}b_\nu^{\frac{1}{\mu}}\Big)^\mu。$$

試藉此與上面的結果以證明哈代與蘭道不等式：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\Big)^p\leqslant\Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p\sum_{n=1}^{\infty}a_n^p,$$

其中 $a_n>0$，而右邊的級數是收斂的。

48. 試證卡爾列滿不等式：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{u_1u_2\cdots u_n}\leqslant e\sum_{n=1}^{\infty}u_n,$$

其中 $u_n>0$，而右邊的級數收斂。

§2. 有限和與無限級數的直接求和法

如 $u_\nu=v_{\nu+1}-v_\nu$，則有恆等式 $\sum\limits_{\nu=0}^{n-1}u_\nu=v_\nu-v_0$。這個提示與非常近似的方法給出下列問題的解法。

試證恆等式：

49. $\sum\limits_{\nu=1}^{n}\nu^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$。

50. $\sum_{\nu=1}^{n}\nu^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$。

51. $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{4n^3-n}{3}$。

52. $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3=2n^4-n^2$。

53. $\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu^2(n-\nu)^2=\frac{n^5-n}{30}$。

54. $1^4-2^4+3^4-\cdots+(-1)^{n-1}n^4=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n^4+2n^3-n}{2}$。

55. $s_5+s_7=2s_3^2$; $s_\nu=1^\nu+2^\nu+\cdots+n^\nu$。

試藉尤拉公式以求下列的和：

56. $1+\cos x+\cos 2x+\cdots+\cos(n-1)x$。

57. $\cos x+\cos 3x+\cdots+\cos(2n-1)x$。

58. $\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx$。

59. $\sin x-\sin 2x+\cdots-\sin 2nx$。

60. $\sin^2 x-\sin^2 3x+\cdots+(-1)^{n-1}\sin^2(2n-1)x$。

61. $x\sin a+x^2\sin 2a+\cdots+x^{n-1}\sin(n-1)a$。

試證等式

62. $x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots=\frac{x}{(1-x)^2}$; $|x|<1$。

63. $1-4x+9x^2-16x^3+\cdots=\frac{1-x}{(1+x)^3}$; $|x|<1$。

試證恆等式：

64. $$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\cdots+\frac{1}{(a+n+1)(a+n)}=$$
$$=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+n}。$$

65. $$\frac{1}{a(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)}+\cdots+$$
$$+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)(a+n+1)}=\frac{1}{2a(a+1)}-\frac{1}{2(a+n)(a+n-1)}。$$

66. $$\frac{1}{a(a+p)}+\frac{1}{(a+1)(a+p+1)}+\cdots+\frac{1}{(a+n-1)(a+p+n-1)}=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\cdots+\frac{1}{a+p-1}\right)-\frac{1}{p}\left(\frac{1}{a+n}+\frac{1}{a+n+1}+\cdots+\frac{1}{a+n+p-1}\right)。$$

試證等式:

67. $$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots=\frac{1}{2}。$$

68. $$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots=\frac{1}{3}。$$

69. $$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\cdots=\frac{11}{18}。$$

70. $$\frac{1}{1\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 9}+\frac{1}{5\cdot 11}+\cdots=\frac{23}{90}。$$

71. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\frac{1}{8}。$$

72. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1。$$

73. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{4}。$$

74. $$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\frac{1}{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}+\cdots=\frac{1}{90}。$$

75. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{5}{36}。$$

76. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(4n^2-1)}=2\ln 2-1。$$

77. $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n^2-1)^2}=\frac{1}{8}。$$

試藉恆等式

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a+n-1}-\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a+n}=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{b^2+(a+n)(a+n-1)},$$

以證明等式：

78. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2n^2}=\frac{\pi}{4}$。　　**79.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n^2+n+1}=\frac{\pi}{4}$。

試證當 $|x|<1$ 時的等式：

80. $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots=\frac{1}{1-x}$。

81. $\frac{x}{1+x}+\frac{2x^2}{1+x^2}+\frac{4x^4}{1+x^4}+\cdots=\frac{x}{1-x}$。

82. $\frac{x}{1-x^2}+\frac{x^2}{1-x^4}+\frac{x^4}{1-x^8}+\cdots=\frac{x}{1-x}$。

試證等式：

83. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{x}{8}+\cdots=\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}x$。

84. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}\cos^2\frac{x}{2^n}}=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}$。

試藉等式：

$$\int_0^1 t^{n-1}\,dt=\frac{1}{n},\quad \int_0^1 t^{n-1}(1-t)\,dt=\frac{1}{n(n+1)},$$

$$\frac{1}{2!}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^2dt=\frac{1}{n(n+1)(n+2)},$$ 以證明：

85. $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}+\ln 2\right)$。

86. $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\cdots=\frac{1}{4\sqrt{2}}[\pi+2\ln(\sqrt{2}+1)]$。

87. $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$。

88. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\cdots=\frac{5\pi}{12}$。

89. $\sum\limits_{n=1,3,5,\ldots}\frac{(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}}{n}=\frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}$。

90. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+\alpha)(n+\beta)}=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_0^1\frac{x^\alpha-x^\beta}{1-x}dx$; $\alpha>-1$, $\beta>-1$, $\alpha\neq\beta$。

91. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+3)}=\frac{\pi}{8}$。

92. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+m)}=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}\right)$。

93. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6\cdot7}+\cdots=\ln 2-\frac{1}{2}$。

94. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6\cdot7}-\cdots=\frac{1}{2}(1-\ln 2)$。

95. $\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5\cdot6\cdot7}+\frac{1}{7\cdot8\cdot9\cdot10}+\cdots=\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\ln 3+\frac{\pi}{12\sqrt{3}}$。

96. $\frac{1}{1^2\cdot3^2}+\frac{1}{3^2\cdot5^2}+\frac{1}{5^2\cdot7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$。

[這兒應用等式 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ 是有益的。]

97. $\frac{1}{1^2\cdot3^2\cdot5^2}+\frac{1}{3^2\cdot5^2\cdot7^2}+\frac{1}{7^2\cdot9^2\cdot11^2}+\cdots=\frac{3\pi^2}{256}-\frac{1}{9}$。

98. $\frac{1}{1^2\cdot2^2\cdot3^2}+\frac{1}{2^2\cdot3^2\cdot4^2}+\frac{1}{3^2\cdot4^2\cdot5^2}+\cdots=\frac{4\pi^2-39}{16}$。

99. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}=\frac{3}{4}-\frac{1}{2x}-\frac{(1-x)^2}{2x^2}\ln\frac{1}{1-x}$。

100. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}=\frac{5}{24x}-\frac{1}{8x^2}+\frac{(1-x)^2}{8x^2}\cdot R$;

如 $x>0$, 則 $R=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$; 如 $x<0$, 則

$$R=\frac{1}{\sqrt{-x}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{-x}。$$

101. 試藉牛頓二項式以證明:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}+\cdots=\frac{1}{\sqrt{2}}。$$

102. 試藉等式 $\int_0^1 t^{n-1}\,dt=\frac{1}{n}$, 以得

$$\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2n}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}=\int_0^1(1-t^2)^n\,dt,$$

並推出公式

$$\frac{2}{3}+\frac{2\cdot4}{3\cdot5}x+\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}x^2+\cdots=\int_0^1\frac{1-t^2}{1-x+xt^2}\,dt;\ |x|<1。$$

試證等式:

103. $\frac{2}{3}-\frac{2\cdot4}{3\cdot5}+\frac{2\cdot4\cdot6}{3\cdot5\cdot7}-\cdots=1-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})$。

104. $\frac{x^2}{3}+\frac{2x^4}{3\cdot5}+\frac{2\cdot4}{3\cdot5\cdot7}x^6+\cdots=1-\frac{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}{x};\ |x|<1$。

105. $\frac{1}{4}-\frac{1\cdot3}{4\cdot6}+\frac{1\cdot3\cdot5}{4\cdot6\cdot8}-\cdots=3-2\sqrt{2}$。

106. $\frac{1}{2\cdot4}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot6}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots=\frac{1}{2}$。

注意: $\int_0^1 t^{n-1}\ln t\,dt=-\frac{1}{n^2};\ \int_0^1 t^{n-1}\ln^2 t\,dt=\frac{2}{n^3};\ n>0,$

試證明等式:

107. $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5^2}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi}{2}\ln 2$。

108. $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5^3}+\cdots=\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{4}(\ln 2)^2$。

109. 試根據等式 $\frac{n!}{a(a+1)\cdots(a+n)}=\int_0^1(1-t)^{a-1}t^n\,dt,$

以證明

$$\frac{1}{a}+\frac{x}{a(a+1)}+\frac{x^2}{a(a+1)(a+2)}+\cdots=\int_0^1(1-t)^{a-1}e^{xt}dt;\ a>0。$$

110. 試證

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{a(a+1)(a+2)}+\cdots=$$
$$=e\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{1!\,(a+1)}+\frac{1}{2!\,(a+2)}-\cdots\right]。$$