

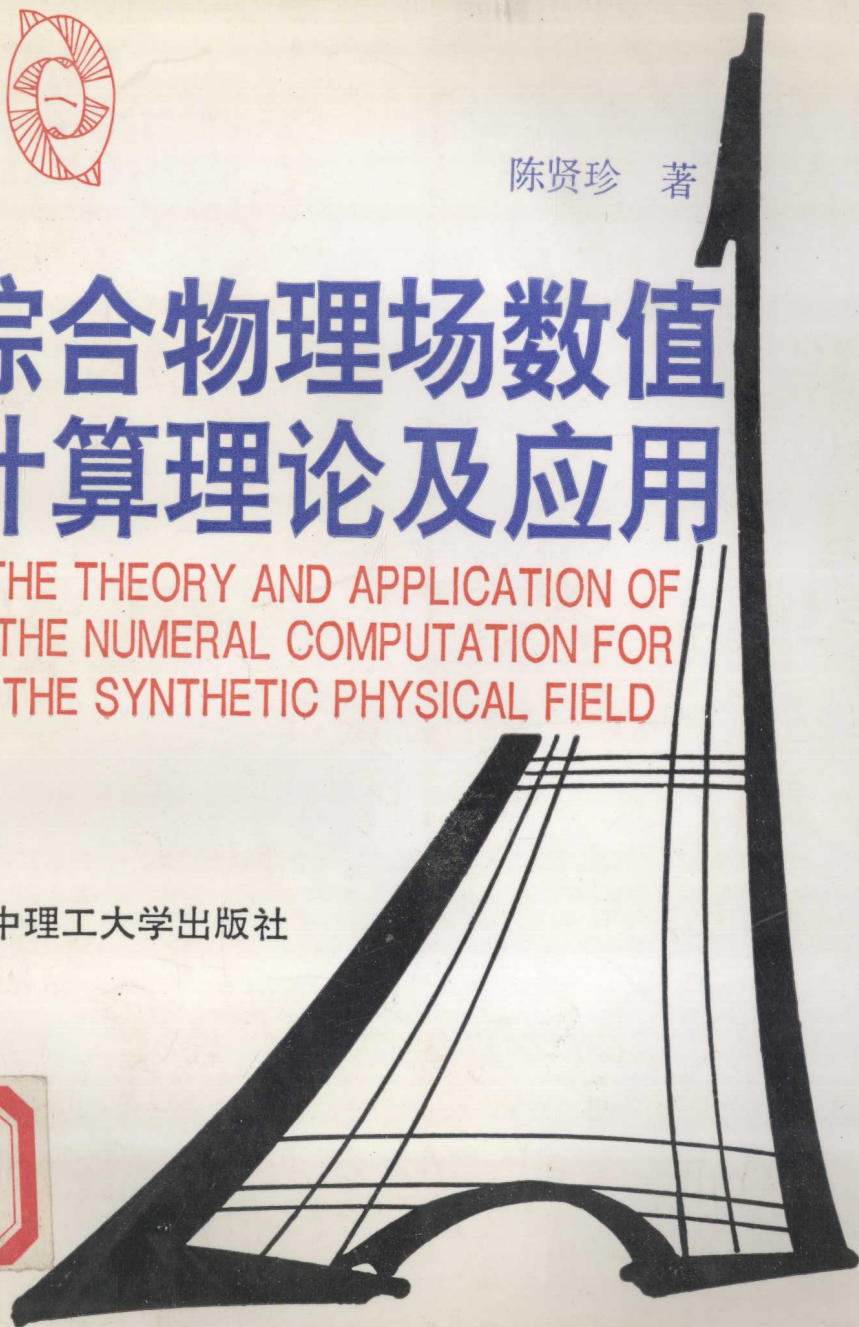


陈贤珍 著

综合物理场数值 计算理论及应用

THE THEORY AND APPLICATION OF
THE NUMERICAL COMPUTATION FOR
THE SYNTHETIC PHYSICAL FIELD

华中理工大学出版社



综合物理场数值计算 理论及应用

陈贤珍 著

0212.3
C599

华中理工大学出版社

(鄂)新登字第 10 号

图书在版编目(CIP)数据

综合物理场数值计算理论及应用 / 陈贤珍 著
武汉: 华中理工大学出版社, 1997 年 5 月

ISBN 7-5609-1132-3

I. 综…

Ⅱ. 陈…

Ⅲ. 场论-数值计算

N.O412.2

综合物理场数值计算理论及应用

陈贤珍 著

责任编辑 徐世仁 姜新祺

华中理工大学出版社出版发行

(武昌喻家山 邮编: 430074)

新华书店湖北发行所经销

华中理工大学出版社照排室排版

武汉市新华印刷厂印刷

开本: 850×1168 1/32 印张: 6.5 字数: 155 000

1997 年 5 月第 1 版 1997 年 5 月第 1 次印刷

印数: 1—1 000

ISBN 7-5609-1132-3/O · 168

定价: 8.00 元

(本书若有印装质量问题, 请向出版社发行部调换)

内 容 简 介

随着计算机技术的发展,各类物理场的数值计算在工程上被广泛研究和应用。在电工装置和设备中,常常遇到电磁场、温度场和应力场综合作用的情况,解耦合场的问题,日益成为需要。本书着重从综合和统一角度来研究各式各样的场的边值问题、能量泛函和条件变分;研究统一的有限元离散格式及数值解法。

本书可供高等院校高年级学生及研究生学习和参考,也可作为工程技术人员和有关研究人员的参考书。

前 言

近十几年来,工程电磁场的数值计算得到了广泛应用,电、磁场与其它物理场的综合作用和解物理场的问题日趋重要。例如,在电工装置和设备中就常常遇到电磁场、温度场、电动力和应力场综合作用的情况,需要对它们进行仔细研究和计算。

本书从综合和统一的角度来研究物理场。首先,从机电动力学观点出发,利用相似理论、对偶和类比方法,按照物理场间内在的规律,推导了物理场的 N 维方程,该方程把电磁场、温度场、力场(电磁力、应力等)归纳为统一的表达形式;然后,从综合和统一的角度来研究各式各样的场的边值问题、能量泛函和条件变分,研究统一的有限元离散格式和数值解法。

本书第一章和第二章首先介绍了所涉及的数学、力学等基础知识;第三章和第四章阐述了 N 维综合物理场方程及条件变分的推导过程,并以典型的物理场为示例对方程进行了证明,此外,还对各类场进行了类比,总结归纳出了一系列的类比表格;第五章重点介绍了定常情况下二维及三维有限元数值计算的具体过程和统一格式,以及计算技术;第六章介绍了瞬态解的方法;第七章以电机中的电磁场、温度场、电磁力和应力等的综合计算作为实例,介绍了综合物理场方程数值解的应用;第八章介绍了综合物理场数值计算软件;第九章介绍了各类物理场综合有限元数值计算的类比及基本算式。

作者自80年代以来,一直从事机电能量转换和电机电磁场数值计算的教学及研究工作,1983年至1986年在德国慕尼黑工业大学进行超导电机电磁屏蔽系统的数值计算研究;1987年至今,主持承担了巨型电机端部绕组电磁场、电动力的数值计算的研究

工作。本书即是试图对这些实践进行总结,围绕本书的主题,就个人浅见进行综合,作为多年学习的心得提出来与读者共同探讨。

本书能够完成和出版,有周克定教授的培养、支持和帮助,他细心和周到地多次为我评审有关论文和本书的内容;汤蕴璆教授在我国最早开出“机电能量转换”的课程,我曾参加听课,受益匪浅;陈世坤教授、倪光正教授及华中理工大学电机教研室林金铭、许实章等许多教授都对我有过帮助,在此一并致以衷心的感谢。

限于个人水平,难免有不妥之处,请读者予以批评指正。

陈贤珍

1995年3月于武汉

目 录

第一章 基本理论概论	(1)
1.1 变分原理	(1)
1.1.1 泛函	(1)
1.1.2 泛函的变分和欧拉方程	(3)
1.2 动力学中的运动方程	(5)
1.2.1 广义坐标、广义速度	(5)
1.2.2 达朗贝尔-拉格朗日原理	(7)
1.2.3 保守系统的拉格朗日方程	(8)
1.2.4 非保守系统的拉格朗日方程	(8)
1.3 数学物理中的场方程	(9)
1.3.1 偏微分方程的分类	(9)
1.3.2 典型的物理问题及方程	(10)
第二章 相似与对偶理论	(16)
2.1 电系统与机械系统的相似	(16)
2.2 不同电路间的对偶关系	(17)
2.3 电路与磁路的对偶	(19)
第三章 综合物理场方程	(22)
3.1 综合物理场方程的导出	(22)
3.1.1 欧拉-拉格朗日方程的第一次推广 ——非保守系统下的拉格朗日方程	(22)
3.1.2 非保守系统下拉格朗日方程的推广 ——综合物理场方程	(23)
3.2 二维及三维综合物理场的边值问题	(26)
3.2.1 二维综合物理场的边值问题	(26)

3.2.2	三维综合物理场的边值问题	(28)
3.3	N 维统一场方程的边值问题	(31)
3.3.1	$\sigma = \text{常数}$ 时的电磁场	(32)
3.3.2	$A-\varphi$ 表达的涡流电磁场	(35)
3.4	综合物理场方程应用于温度场的分析	(37)
3.4.1	二维及三维标量场边值问题	(37)
3.4.2	时变情况和初边值问题	(38)
3.5	综合物理场方程应用于力学应力场分析示例	(38)
3.6	综合物理场应用于流体力学的分析示例	(39)
3.7	典型物理场与综合物理场方程的类比	(39)
第四章	综合物理场方程边值问题等价的条件变分	(48)
4.1	综合物理场能量泛函与条件变分	(48)
4.1.1	三维标量场条件变分的导出	(48)
4.1.2	典型物理场-标量场应用实例	(50)
4.2	三维矢量场能量泛函与条件变分	(52)
4.2.1	三维综合场-矢量场能量泛函与 条件变分的导出	(52)
4.2.2	矢量位电磁场($\sigma = \text{常数}$ 时)	(52)
4.3	N 维综合场有限元条件变分	(54)
4.3.1	在正弦稳态情况下 $\sigma = \text{常数}$ 时的 矢量电磁场	(55)
4.3.2	$A-\varphi$ 表达的涡流电磁场	(55)
第五章	综合物理场有限元数值计算	(57)
5.1	综合物理场方程的数值解法	(57)
5.1.1	变分直接法	(57)
5.1.2	有限单元法	(59)
5.2	直角坐标系中综合物理场方程	(66)
5.2.1	静态场	(67)
5.2.2	时变场	(67)

5.2.3	三维矢量位电磁场的各种情况	(68)
5.3	二维综合物理场有限单元法	(68)
5.3.1	边值问题与条件变分	(68)
5.3.2	离散化	(69)
5.4	三维综合物理场有限单元法	(75)
5.4.1	边值问题与条件变分	(75)
5.4.2	三维有限元形函数	(76)
5.4.3	综合离散格式	(82)
5.4.4	三维矢量位电磁场有限单元法	(88)
第六章	综合物理场时变场的有限元数值解	(94)
6.1	初边值问题	(94)
6.2	积分变换法	(95)
6.2.1	付氏变换法	(95)
6.2.2	通过离散的付氏数值反变换求解	(96)
6.2.3	拉氏变换法	(97)
6.3	利用边界单元法进行时间增量的时间积分	(97)
6.4	有限单元法	(98)
6.4.1	概述	(98)
6.4.2	时间离散	(100)
第七章	综合物理场方程数值解的应用	(104)
7.1	概述	(104)
7.2	超导电机电磁屏蔽效应与结构件中的损耗研究	(104)
7.2.1	计算的数学物理模型	(105)
7.2.2	条件变分式	(107)
7.2.3	剖分和位函数	(108)
7.2.4	单元分析和单元特征式	(109)
7.2.5	边界条件与总体合成	(113)
7.2.6	解线性方程组	(114)

7.2.7	计算结果.....	(114)
7.3	巨型电机端部涡流电磁场与温度场的综合数值计算	(124)
7.3.1	数学、物理模型	(124)
7.3.2	有限元条件变分.....	(125)
7.3.3	综合离散格式.....	(127)
7.4	电磁场、电动力、应力的综合数值计算	(131)
7.4.1	有限单元法计算场.....	(131)
7.4.2	积分方程差分法计算场.....	(131)
7.4.3	巨型电机端部绕组电磁力的数值计算	(138)
7.4.4	应力的数值计算.....	(142)
第八章	综合物理场数值计算软件.....	(147)
8.1	综合物理场数值计算专家系统	(147)
8.2	三维有限元数值计算软件技术简介	(147)
8.3	巨型电机端部电磁场、损耗、绕组电磁力 综合数值计算软件包简介	(148)
第九章	各类物理场综合有限元数值计算的类比及基本算式	(152)
9.1	N 维综合物理场的边值问题与条件变分	(152)
9.1.1	综合物理场的边值问题在 N 维空间 坐标系中的表达.....	(152)
9.1.2	综合物理场的边值问题在直角坐标系中 的表达.....	(152)
9.1.3	综合物理场有限元条件变分.....	(154)
9.2	二维综合物理场	(155)
9.2.1	边值问题.....	(155)
9.2.2	条件变分.....	(155)
9.2.3	位函数.....	(156)

9.2.4	单元特征式	(156)
9.3	三维综合物理场	(158)
9.3.1	边值问题	(158)
9.3.2	条件变分	(159)
9.3.3	位函数	(159)
9.3.4	单元特征式	(159)
9.4	三维及 N 维矢量位电磁场	(161)
9.4.1	边值问题	(161)
9.4.2	条件变分	(162)
9.4.3	位函数	(163)
9.4.4	单元特征式	(163)
9.5	各类物理场综合有限元数值计算的类比	(166)
附录 1	拉格朗日方程的导出	(167)
附录 2	数值计算源程序	(170)
附 2.1	线性方程组数值解法源程序	(170)
附 2.2	各种规范打印、输出 FORTRAN77 源程序	(180)
参考文献		(191)

第一章 基本理论概论

1.1 变分原理

1.1.1 泛函

在考察物理系统时,常常需要进行线性变换,设 T 是 $x(t)$ 状态到 $y(t)$ 状态之间的变换,则它们之间的依赖关系式可写成

$$y = Tx. \quad (1-1)$$

在泛函分析中,将这种由空间到空间的变换(又称映像)叫算子,当算子的像集为数域时则称它为泛函。即泛函是由函数空间中的函数到数的映像。

具体地说,若对某一函数集 $[y(x)]$ 的每一个函数 $y(x)$, $J = J[y(x)]$ 有一个值与之对应,则称变量 J 是函数 $y(x)$ 的泛函, $y(x)$ 称为变元。所以泛函就是函数的函数。

例如,设 $y(x)$ 为定义在区间 $[x_1, x_2]$ 上的连续函数(见图 1.1),则 $y(x)$ 所描述的曲线的长度

$$\begin{aligned} J[y(x)] &= \int_{x_1}^{x_2} dl \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \end{aligned}$$

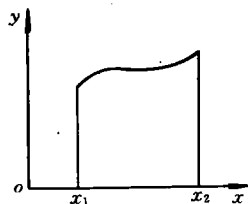


图 1.1

(1-2)

和 $y(x)$ 在区间 $[x_1, x_2]$ 曲边及 x 轴所围成的曲边梯形的面积

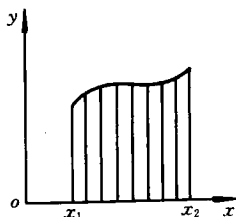


图 1.2

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} y(x) dx \quad (1-3)$$

都是依赖于函数 $y(x)$ 的泛函 (见图 1.2)。

又如, 若二元函数 $z(x, y)$ 描述一空间二维曲面, 如图 1.3 所示, 并设 $z(x, y)$ 具有连续的二阶偏导数, 则表达此曲面的面积的函数

$$I[z(x, y)] = \iint_D \sqrt{1 + \left[\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right]^2} dx dy \quad (1-4)$$

是依赖于二元函数 $z(x, y)$ 的泛函。

再如, 在两垂直坐标平面内给定两个点 p_1 和 p_2 , 如图 1.4 所示, 若使质点 Q 在自身重力作用下沿 p_1, p_2 之间任一轨迹运动, 求由 p_1 到达 p_2 所需最短时间。

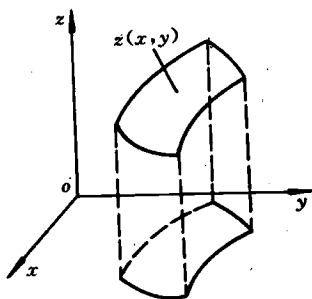


图 1.3

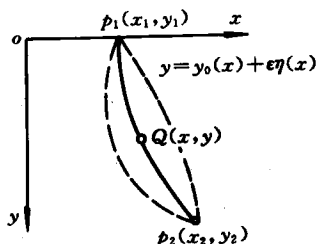


图 1.4

假定 p_1 和 p_2 处于不同的高度并忽略摩擦力, 则在重力作用下质点 Q 沿轨迹 $y = y(x)$ 运动的速度应满足

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}, \quad (1-5)$$

式中, g 是重力加速度。

由图 1.4 可知,

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \quad (1-6)$$

且

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2gy}} dx, \quad (1-7)$$

$$t_{12} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{y}} dx, \quad (1-8)$$

写成泛函形式,即

$$t_{12}[y(x)] = k \int_{x_1}^{x_2} F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx. \quad (1-9)$$

1.1.2 泛函的变分和欧拉方程

泛函求极值的问题(包括求极大值、极小值或更一般地说是求稳定值或驻值)称为变分问题,求解变分问题的方法称变分法。

1.1.1 节中图 1.4 所示的示例,求解泛函式(1-9)的极小值,就是一个最简单的二元变分问题。这里泛函只依赖于单个自变量 x 和函数 $y(x)$ 及其导数 $y'(x)$ 。下面讨论这一变分问题。

二元变分的普遍形式为

$$J[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx. \quad (1-10)$$

设其中 $y(x)$ 具有连续的二阶导数, $F(x, y, y')$ 对 x, y, y' 都是二次连续可导,则当函数 $y(x)$ 有微小变化 δy (δy 称为 y 的变分),即变为 $y + \delta y$ 时,泛函 $J(y)$ 将随着变化,其增量为 ΔJ ,将其被积函数用级数展开后,得

$$\Delta J = \int_{x_1}^{x_2} [F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')] dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x_1}^{x_2} \left\{ [F_y \delta y + F_{y'} \delta y'] + \frac{1}{2!} \right\} \times \{ [F_{yy} (\delta y)^2 + \\
&\quad 2F_{yy'} \delta y \delta y' + F_{y'y'} (\delta y')^2 + \dots] \} dx \\
&\approx \delta J + \delta^2 J + \dots \\
&\approx \delta J,
\end{aligned} \tag{1-11}$$

式中, $\delta y'$ 为 $y(x)$ 的导数的变分,

$$\begin{aligned}
F_y &= \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}, \quad F_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \\
F_{yy'} &= \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'}, \quad F_{y'y'} = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}, \\
\delta J &= \int_{x_1}^{x_2} [F_y \delta y + F_{y'} \delta y'] dx,
\end{aligned} \tag{1-12}$$

$$\delta^2 J = \int_{x_1}^{x_2} [F_{yy} (\delta y)^2 + 2F_{yy'} \delta y \delta y' + F_{y'y'} (\delta y')^2] dx, \tag{1-13}$$

式中, $\delta J, \delta^2 J \dots$ 分别称为泛函 $J(y)$ 的一次变分、二次变分..., 有时将泛函的一次变分 δJ 就简称为泛函 J 的变分。忽略二次及二次以上的变分时, 有 $\Delta J[y] \approx \delta J[y]$ 。

待求的给出泛函极值的函数, 称为极值函数。假设与极值函数 $y(x)$ 相邻近的函数为

$$y_1(x) = y(x) + \epsilon \eta(x), \tag{1-14}$$

其中, ϵ 是一个微小的参数, 当 $\epsilon=0$ 时, $y_1(x)$ 便是极值函数 $y(x)$ 。用 y_1 代替 y , 泛函 $J[y+\epsilon\eta]$ 成为 ϵ 的函数 $\Phi(\epsilon)$ 。

因设 $y(x)$ 使 $J(y)$ 取极值, 故函数 $\Phi(\epsilon)$ 应在 $\epsilon=0$ 时取极值, 其必要条件是

$$\frac{d\Phi(\epsilon)}{d\epsilon} = 0, \tag{1-15}$$

即

$$\begin{aligned}
\Phi'(0) &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial \epsilon} F(x, y + \epsilon \eta, y' + \epsilon \eta') dx \\
&= \int_{x_1}^{x_2} (F_y \eta + F_{y'} \eta') dx = 0.
\end{aligned} \tag{1-16}$$

利用分部积分,得

$$\Phi'(0) = F_y \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_y \right) \eta(x) dx. \quad (1-17)$$

因在 x_1, x_2 两个端点, $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, 所以上式右边第一项为零, 便有

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_y \right) \eta(x) dx = 0. \quad (1-18)$$

上式对任意的 $\eta(x)$ 都成立, 所以得

$$F_y - \frac{d}{dx} \cdot F_y = 0, \quad (1-19)$$

其展开式为

$$y'' F_{yy} + y' F_{yx} + F_{yx} - F_y = 0. \quad (1-20)$$

上式即是变分问题的解必须满足的必要条件——欧拉方程。欧拉方程是微分方程, 求解变分问题实际上可转化成求解微分方程。

不难看出 $\Phi' = 0$, 乘以 ϵ , 并令 $\epsilon \eta = \delta y$, 则 $\epsilon \eta' = \delta y'$, 式(1-16)变成一次变分为零, 即 $\delta J = 0$ 。

对于三元情况, 类似于二元, 设函数 $u = u(x, y, z)$,

$$J_1 = \iiint F(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z) dx dy dz,$$

其中, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, $u_z = \frac{\partial u}{\partial z}$ 。

可以推得相应的欧拉方程为

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial u_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial u_z} \right) = 0. \quad (1-21)$$

1.2 动力学中的运动方程

1.2.1 广义坐标、广义速度

广义坐标描述一个系统位形所需的独立参数, 或最少数量的

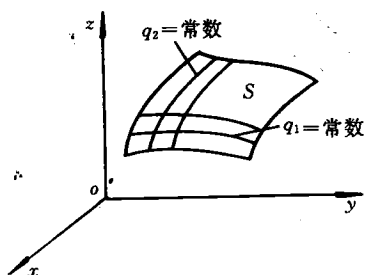


图 1.5

独立变量。它是由拉格朗日 (Lagrange) 提出来的。对于一个静力学系统,一般地可以用有 n 个变量的广义坐标 $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ 来描述它的即时状态, n 称为自由度。图 1.5 所示的非自由质点 M 被限制在固定曲面 S 上运动。 q_1, q_2 为二维曲线坐标, M 被 q_1, q_2 唯一

决定。故 q_1, q_2 称为质点 M 的广义坐标。

如图所示, 广义坐标与直角坐标的关系可以通过相应的函数来表达。这里:

$$x = x(q_1, q_2), \quad (1-22)$$

$$y = y(q_1, q_2), \quad (1-23)$$

$$z = z(q_1, q_2), \quad (1-24)$$

$$r = r(q_1, q_2). \quad (1-25)$$

当曲面 S 产生运动时, 对某一时刻, 可以先确定曲面 S 的空间位置, 再由 q_1, q_2 确定 M 的位置, 故此时 M 的位置将由 q_1, q_2 及时间 t 来确定。

这时 M 点的位置应是广义坐标及时间的函数, 即

$$x = x(q_1, q_2, t), \quad (1-26)$$

$$y = y(q_1, q_2, t), \quad (1-27)$$

$$z = z(q_1, q_2, t), \quad (1-28)$$

$$r_i = r_i(q_1, q_2, t), \quad (1-29)$$

式中, r_i 为系统中某一质点 M 的向径。在一般的情况下, 系统的位形需要有 n 个变量的广义坐标来描述, 则对每一质点满足

$$r_i = r_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t), \quad (1-30)$$

$$i = 1, 2, \dots, N。$$

如果式(1-30)中不显含 t , 则