21世纪高等教育本科规划教材

数 学 系 列

丛书主编 郑玉美

高等数学（上）

GAODENG SHUXUE（SHANG）

（第二版）

主 编 赵国石 张清平
毕重荣

教育部直属师范大学
华中师范大学出版社

21世纪高等教育本科规划教材·数学系列

丛书主编　郑玉美

高等数学(上)

（第二版）

主　　编　赵国石　张清平
毕重荣
副 主 编　尤正书　杜洪艳
马　军　赵学芳

华中师范大学出版社

内 容 提 要

本教材以“三用”即“够用、管用、会用”为原则，以“三凸现”即“凸现数学与文化、凸现数学的现代化、凸现数学的应用”为特点编写而成.全书共分五章，分别是函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用.

本教材适用于普通高等院校本科高等数学课程的教学，也可以作为科技工作者的参考书.

新出图证(鄂)字10号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学(上)/赵国石　张清平　毕重荣主编.—2版.
—武汉:华中师范大学出版社,2009.6(2009.8重印)
(21世纪高等教育本科规划教材·数学系列)
ISBN 978-7-5622-3943-7
Ⅰ.高…　Ⅱ.①赵… ②张… ③毕…　Ⅲ.高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.O13
中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第069470号

高等数学(上)
(第二版)

主编:赵国石　张清平　毕重荣
责任编辑:杨发明　　**责任校对**:刘　峥　　**封面设计**:梦　娜
编辑室:第二编辑室　　**电话**:027－67867362
出版发行:华中师范大学出版社©
社址:湖北省武汉市珞喻路152号
电话:027-67863040　67863426　67867076(发行部)　027-67861321(邮购)
传真:027-67863291
网址:http://www.ccnupress.com　　**电子信箱**:hscbs@public.wh.hb.cn
印刷:湖北孝感日报印刷厂　　**督印**:章光琼
字数:385千字
开本:787mm×1092mm　1/16　　**印张**:16.5
版次:2009年6月第2版　　**印次**:2009年8月第2次印刷
印数:6001－9100　　**定价**:28.00元
欢迎上网查询、购书

21世纪高等教育本科规划教材·数学系列

21 世纪高等教育本科规划教材·数学系列

丛书主编　郑玉美

《高等数学》(上)编写委员会

主　　编　赵国石(中国地质大学江城学院)
张清平(武汉生物工程学院)
毕重荣(中国地质大学江城学院)

副 主 编　尤正书(湖北大学知行学院)
杜洪艳(武汉科技大学中南分校)
马　军(江汉大学文理学院)
赵学芳(武汉生物工程学院)

编　　者　(以姓氏笔画为序)
马　军(江汉大学文理学院)
孙旭东(武汉工业职业技术学院)
杜洪艳(武汉科技大学中南分校)
张清平(武汉生物工程学院)
宋　翌(武汉生物工程学院)
胡佳德(中国地质大学江城学院)
赵学芳(武汉生物工程学院)
赵国石(中国地质大学江城学院)

第 2 版

前　言

Ban 2

教材建设是一项长期的、艰巨的工作.一部好的教材必须经过师生反复施教、施学,不断探索,精益求精,集思广益,长期积累,不断完善,才能达到我们所追求的目标.

本系列教材自 2006 年出版以来,对它的使用进行了科学的实验和持续的跟踪调查,为修订做了充分的准备,力争将其打造成一套为社会所公认的精品.主要做了如下工作:

一是在部分学校开展了对比教学实验,即选择一到两种目前大家认为编写较好的教材,由同一位老师或不同的老师在不同的班级进行对比教学实验,并组织师生进行研讨,以发现我们的教材及对比教材的优缺点,为修订提供依据.

二是规定编者及使用者在实施教学的过程中,要注意发现并收集教材中的不足及错误,为修订做准备.

三是定期召开教材使用情况汇报研讨会,总结使用情况,收集使用信息.

有了以上准备,并在多方收集本系列教材使用情况的基础上,召开了由系列教材主编及部分使用教师参加的研讨会,认真听取了来自各方面的意见及建议,制订了本次修订的原则及修订内容,主要有以下几个方面:

1. 在保持并增强原有的“三用”原则及“三凸现”特色的基础上,特别注重在学生的数学素质和文化素养的培养上下工夫.

高等数学不仅是一种工具,而且是一种思维模式,它包含着处理连续变量的基本理论和众多的科学思维方法,既是学习其他自然科学的重要基础,也是培养理性思维的理想载体;高等数学不仅是一种知识,而且是一种素养和文化.培养学生运用高等数学的观念去进行定量思维,切实解决工作中遇到的实际问题,是学习高等数学的目的之一.为达到上述目的,在第二版中,加强了数学与文化、数学与社会、数学与历史的联系和理解,从中不仅可以使学生加深对数学概念与理论的理解,而且可从它们产生的历史背景、产生的过程及对社会发展的影响中吸取丰富的数学文化,提高文化素养.

2. 对第一版中存在的部分不够严谨的定义、定理进行了科学的、严密的、精雕细刻式的订正与改写.

随着高等学校办学层次的多样化,为适应不同层次的教学需要,针对不同层次出版了较多的教材.现行的很多高等数学教材中对较为艰深的定理进行了通俗化的改写,使之便于教学,便于学生理解,这无疑是一个进步.但部分教材中这种改写不够严谨,存在严重的缺陷:一是加强了条件,使其实用面变窄;二是放宽了条件,导致定理在某些情况下失效、不真.为避免上述问题,我们对照经典著作,对教材中的每一个定义、定理进行了逐字逐句的斟酌修改,消除了上述问题,使教材处在一个科学、严密的体系之中.

3. 面对考研内容的变化,增加完备了考研必备的内容,以满足部分学生考研的需要.

4. 进一步强化了数学语言的应用,更正了书中一些知识性和科学性错误.

5. 为了使本系列教材具有更强的针对性和更广泛的代表性,本次修订调整并增加了部分主编和作者,他们为本书的修订提出了许多宝贵的建议,并对修订付出了辛勤的、创造性的劳动.

通过本次修订,本系列教材将有一个质的飞跃.但教材建设是一项长期的工作,不可能一蹴而就,还需要我们进一步努力探索.我们相信,通过我们的不懈努力,本套教材必定会成为社会所公认的精品教材.

编委会

2009 年 4 月 21 日

第1版

前　言

Ban 1

步入新世纪，中国的高等教育出现了崭新的格局.一大批独立院校相继成立，加入到传统的高等本科教育大军之阵线，它们常以"三本"的面目出现，正在成为高等教育的一支重要力量.这批新军(独立院校"三本"的学子们)在传统的教师们率领下手抱着传统的教材以传统的方式苦战了好几个春秋，无论是独立院校的执教者还是勤奋的学子们都盼望能有适合于这批规模巨大的新型的独立院校的教材，这是势在必行，又是势在必得的时代所需.郑玉美教授在成功推出《21世纪高等职业教育规划教材·数学系列》后，吸纳了湖北大学知行学院、武汉科技大学中南分校、武汉科技大学城市学院、中国地质大学江城学院、江汉大学文理学院、中南民族大学工商学院、武汉生物工程学院、武汉工程大学、武汉工业职业技术学院以及武汉职业技术学院(本科部)等独立院校一批经验丰富的教育专家又编写一套具有"三用、三凸、一独"的《21世纪独立院校本科规划教材·数学系列》，以满足独立院校教学之急需.这套教材具有以下特点：

1. 以"三用"为原则

(1) 够用　删去传统本科教材中难而繁的内容，保留理、工、农、医、管各本科专业的最基本的内容，达到满足本科高度所必需的最低限度，够用即可.

(2) 管用　增添以往传统教材中没有的同时又是必需的知识内容，使教材适合三类本科各专业之需要，达到管用的效果.

(3) 会用　淡化传统本科教材偏重理论的倾向，删去理论性较强的内容，强调数学知识的应用，力求学以致用、学后会用，增强学生学习数学的信心与兴趣.

2. 以"三凸现"为特色

(1) 凸现数学与文化的联系　对重要的数学概念与理论，着重讲解它们的历史背景、产生的过程及影响，同时有机地结合一些有趣的数学故事及有影响力的数学家的逸事进行讲解，尽量让学生全面了解数学，达到提高学生的综合素质的目的.

(2) 凸现数学现代化教学手段的应用　将数学软件的使用有机地融合进教材中，不盲目追求运算技巧，着力于培养学生解决实际问题的能力.

(3) 凸现数学的应用性　如把有重要应用的"微元法"贯穿在整个高等数学教材中.

3. 体现独立院校的"独"字

全套教材从知识的分量、难易程度、结构分布等方面要适合独立院校"三本"之需要.如高等数学以一元微积分、多元微积分为主线，而多元微积分浓缩为多元微分学与多元积分学两大块，将微分方程、无穷级数放在一元微积分学之后，这样使"三本"学生们易于接受掌握.

为了使本套教材有更宽广的适应性，可供独立院校中的高等专科生选用，在保证科学性

和逻辑性的前提下,我们在编写时更注重培养学生的良好的学习习惯,提高学生的综合素质.为此,我们力求全套教材语言准确生动、简洁而清晰,思想有条有理、精练而富逻辑.在每章正文后附有本章小结,设计一个“本章知识结构导航图”,让读者们对全章主要内容一目了然;归纳小结“本章主要内容及重点、难点”,让同学们心中有一个全章小“仓库”.此外,还安排了全章综合练习,供学有余力的学生去品尝一下课外的套餐.

本套教材共六种:《高等数学》(上)、《高等数学》(下)、《高等数学全程辅导与提高》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《概率论与数理统计学习指导》.

全套书的框架结构、统稿定稿由郑玉美教授及各册的主编负责,齐民友、任德麟、邓宗琦教授认真审阅了全部教材的原稿,提出了许多建设性意见,在此对三位资深教授表示衷心的感谢.

参加《高等数学》(上)编写的有马军、孙旭东、杜洪艳、张清平、宋翌、陕勇、胡佳德、赵国石等.全书由赵国石、毕重荣、冉兆平统稿、定稿.

虽然各位编者十分努力,但由于我们的水平有限,成书时间又很仓促,本套教材还可能有不少缺点和错误,欢迎广大师生、读者批评指正.

编委会

2006年8月

目　　录

第 1 章

函数与极限

Zhang 1

历史使人聪明，诗歌使人机智，数学使人精细，哲学使人深邃，道德使人严肃，逻辑修辞使人善辩.

——培根

初等数学研究的对象基本上是常量，而高等数学研究的主要对象为变量. 高等数学的主要内容是微积分学，简称微积分. 微积分的创立是数学从初等数学进入高等数学划时代的里程碑. 微积分的诞生极大地推动了科学技术的发展，促进了社会的进步.

微积分学研究的主要对象是函数，主要研究方法是极限，它们贯穿于高等数学的始终. 本章将介绍函数、极限、函数的连续性等基本概念.

1.1 函 数

1.1.1 实数的绝对值与区间

1. 从有理数到实数

微积分学研究的函数都是实变量函数，即函数中涉及的变量都取**实数**. 实数是人类在对自然界的不断认知过程中产生的. 人们从“数数”、“计数”之需产生了自然数. 由数的“运算”又产生了整数，进而引出了度量问题中可公度量的概念. 例如：给一把长度为 3 的尺子 a，一把长度为 5 的尺子 b. 第一次用 a 去量 b 一次，剩下 $b-a=2$，再用 $b-a=2$ 去量 a 一次，剩下 $a-(b-a)=1$，最后用剩下的 $2a-b=1$ 去量 $b-a=2$，两次量尽. 我们说 a 与 b 是可公度的量.

大约在公元前 600 年 — 公元前 500 年，希腊著名的毕达哥拉斯学派发现可公度的量可以表示为“整数之比”，后人称之为**有理数**. 他们崇信“万物皆数”(有理数)，认为世间一切事物都可用数来描述. 随着“**勾股定理**”的发现，人们对“万物皆数”的理论产生了怀疑. 大约在公元前 400 年前后希腊学者希帕索斯发现了单位正方形的边长1 与对角线之长 $x(\sqrt{2})$ 不可公度，并证明了这个 x 不是“整数之比”，从而引出了现代数学中“**无理数**”的概念. 这一发现从根本上动摇了毕达哥拉斯学派的根基——“万物皆数”，从而引发了数学史上的“第一次数学危机”.

危机的出现成了数学发展的巨大动力，大约在公元前 300 年毕达哥拉斯学派的欧多克斯解决了不可公度问题. 无理数的发现开拓了数的领域，并将一切有理数及无理数统称为实数，实数集记为 $\mathbf{R}$. 实数与数轴上的点一一对应.

2. 实数的绝对值

绝对值的定义：实数 x 的绝对值为

$$|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

$|x|$ 的几何意义是：$|x|$ 表示数轴上的点 x 与原点 O 之间的距离，因而总有 $|x|\geqslant 0$.

绝对值有以下主要性质：

(1) $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$；

(2) $|x|\leqslant a \Leftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a\ (a>0)$；

(3) $|x|\geqslant a \Leftrightarrow x\leqslant -a$ 或 $x\geqslant a\ (a>0)$；

(4) $|x+y|\leqslant |x|+|y|$；

(5) $|x-y|\geqslant |x|-|y|$；

(6) $|xy|=|x||y|$；

(7) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}\ (y\neq 0)$.

证 [只证(4)、(5)，并假设(1)、(2)、(3) 均已证明]

先证明(4). 由(1) 有

$$\begin{cases}-|x|\leqslant x\leqslant |x|,\\ -|y|\leqslant y\leqslant |y|.\end{cases}$$

两式相加，得

$$-(|x|+|y|)\leqslant x+y\leqslant |x|+|y|,$$

由(2) 有

$$|x+y|\leqslant |x|+|y|.$$

证毕.

再证(5). 因为

$$|x|=|(x-y)+y|,$$

由(4) 有

$$|(x-y)+y|\leqslant |x-y|+|y|,$$

即

$$|x|\leqslant |x-y|+|y|,$$

所以

$$|x-y|\geqslant |x|-|y|.$$

证毕.

关于性质(6)、(7)，可以直接用绝对值的定义证得.

下面介绍一个在数学分析中常用的关于绝对值的不等式. 设 a 为一定点，r 为任意给定的正数，则对任意实数 x，有

$$|x-a|<r \Leftrightarrow a-r<x<a+r.$$

上述不等式的几何意义是：到点 a 的距离小于 r 的点 x 都在 $a-r$ 和 $a+r$ 两点之间；反之，在 $a-r$ 和 $a+r$ 两点间的点 x 到 a 的距离都小于 r.

3. 区间和邻域

区间是一类常用的实数集. 设 a 和 b 均为实数，且 $a<b$. 以下为各种区间与数集的对应关系：

开区间　$(a,b)=\{x \mid a<x<b, x\in \mathbf{R}\}$.

闭区间　$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b, x\in \mathbf{R}\}$.

半闭半开区间　$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b, x\in \mathbf{R}\}$,

$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b, x\in \mathbf{R}\}$.

无穷区间　$(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$,

$(a,+\infty)=\{x \mid x>a, x\in \mathbf{R}\}$,

$[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a, x\in \mathbf{R}\}$,

$(-\infty,b)=\{x \mid x<b, x\in \mathbf{R}\}$,

$(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b, x\in \mathbf{R}\}$.

邻域也是一个常用的概念，以 x_0 为中心的任何开区间称为点 x_0 的邻域，记作 $U(x_0)$，特殊地，称开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 为点 x_0 的一个 δ 邻域（δ 是给定的正数），记作 $U(x_0,\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x \mid |x-x_0|<\delta\}.$$

由于

$$|x-x_0|<\delta \Leftrightarrow x_0-\delta<x<x_0+\delta,$$

所以点 x_0 的 δ 邻域的两个端点关于 x_0 对称，其中 x_0 确定了邻域的位置，称作邻域的中心，δ 确定了邻域的大小，称为邻域的半径，如图 1-1 所示.

将邻域的中心 x_0 去掉所得的数集

$$\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\},$$

称为点 x_0 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta).$$

如图 1-2 所示.

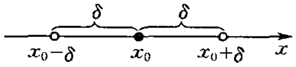

图 1-1

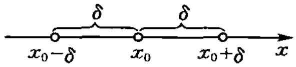

图 1-2

有时把 $(x_0-\delta,x_0)$ 和 $(x_0,x_0+\delta)$ 分别称为 x_0 的左邻域和右邻域.

1.1.2　函数的定义

1. 函数的概念

定义 1.1　设数集 $D\subset \mathbf{R}$，则称映射 $f: D\to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的函数，通常记为

$$y=f(x), x\in D.$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为函数 $f(x)$ 的定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$.

在函数的定义中，对每个 $x\in D$，按对应法则 f，总有 $\mathbf{R}$ 中唯一确定的值 y 与之对应，这个值称为 f 在 x 处的**函数值**，记作 $y=f(x)$. 自变量 x 与因变量 y 之间的依赖关系称为**函数关系**，y 的取值范围称为函数 f 的值域，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y \mid y=f(x), x\in D\}.$$

函数的符号可根据需要任意选取，函数除了常用 f 表示外，还可以用"F"，"g"，"φ"等字母表示. 相应地，函数可记作 $y=F(x)$，$y=g(x)$，$y=\varphi(x)$ 等. 但在同一问题中，讨论到几个不同的函数时，为表示区别，应用不同的记号来表示它们.

需要指出的是，按上述定义，记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的：f 表示自变量 x 和因变