普通高等院校

电子信息类系列教材

DianCiChang Yu DianCiBo

电磁场与电磁波

◎ 马海武 毛力 编著

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

普通高等院校电子信息类系列教材

电磁场与电磁波

马海武　毛　力　编著

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

电磁场与电磁波 / 马海武，毛力编著.—北京：人民邮电出版社，2009.9
（普通高等院校电子信息类系列教材）
ISBN 978-7-115-19816-7

I. 电… II. ①马…②毛… III. ①电磁场－高等学校－教材②电磁波－高等学校－教材 IV. O441.4

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第075087号

内 容 提 要

本书是编者在总结长期教学实践经验的基础上，为通信及电子信息类专业编写的专业基础课教材。本书全面讲述了电磁场与电磁波的基本规律、基本概念和分析方法，主要内容包括矢量分析、静电场、恒定电流的电场、恒定电流的磁场、静态场边值问题的解、时变电磁场、平面电磁波、导行电磁波、电磁波的辐射等。各章后均附有习题。

本书可作为高等院校通信与电子信息类以及相关专业本科或研究生的教材，也可作为相关工程技术人员学习电磁场基础理论及应用的参考书。

普通高等院校电子信息类系列教材

电磁场与电磁波

◆ 编　著　马海武　毛　力
　责任编辑　蒋　亮
◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市崇文区夕照寺街 14 号
　邮编　100061　电子函件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京楠萍印刷有限公司印刷
◆ 开本：787×1092　1/16
　印张：19
　字数：463 千字　　2009 年 9 月第 1 版
　印数：1-3 000 册　　2009 年 9 月北京第 1 次印刷

ISBN 978-7-115-19816-7/TN

定价：32.00 元

读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

前言

现代电子技术和通信技术发展迅速，门类诸多，但都离不开电磁波的发射、传播、接收和控制。因此，电磁场理论是电类各专业技术人员必须掌握的基础理论之一，“电磁场”课程是高等院校通信与电子信息类专业学生必修的专业基础课。本书根据 2007 年 4 月召开的高等学校信息类系列教材编审工作会议审定的编写大纲进行编写。编写的宗旨就是使读者获得足够的电磁场基础理论知识。

本书共 9 章，通信工程及电子信息专业本科教学参考学时数为 64 学时。全书重点讲述了电磁场与电磁波的基本规律、基本概念和分析方法。第 1 章是矢量分析与场论，它是学习本课程的数学基础知识；第 2、3、4、5 章为静态场，主要介绍静电场、恒定电流的电场和磁场的基本概念、分析与计算方法；第 6 章是时变电磁场，是本书的核心，全面论述了电磁理论中的基本方程及其边界条件；第 7 章研究均匀平面电磁波在无界媒质中的传播特性和均匀平面电磁波在平面分界面的反射、折射等特性；第 8 章研究导行电磁波的特性以及波导、谐振腔等；第 9 章是电磁波的辐射和散射。各章后都附有大量的习题。通过对本教材中各部分内容的学习，读者对电磁场基本理论有一个整体的概念。本书也渗透着编者多年的教学心得，希望能为该类专业的教学和发展起到一些作用。

对于本教材的内容，本科生、研究生可以根据不同的教学要求灵活选用。另外，可根据自身的教学条件，结合实验和仿真技术，通过多媒体教学使学生对这些理论有更加深刻的理解和认识。

本书由马海武任主编。马海武编写第 1、6、7、8、9 章，毛力编写第 2、3、4、5 章。全书由马海武统编定稿。

在本书的编写过程中，得到了许多相关人士的大力协助和支持，在此表示诚挚的谢意。特别感谢王民、王慧琴、王稚慧等给予的支持和帮助，他们为本书的编写提供了许多教学心得。

限于编者的水平，书中不妥和错误之处在所难免，敬请广大读者及同行批评指正。

作　者

2009 年 4 月

目　录

第 1 章 矢量分析与场论

1.1 矢量代数

这一节复习矢量的代数运算。在这里不讨论细节，只介绍与以后讨论矢量分析相关的内容。

经常遇到的量可分为两类：一类完全由数值决定，例如面积、温度、时间、质量等，这一类量称为标量；另一类量，不仅要知道数值的大小，而且要说明它的方向，例如力、速度、加速度等，这一类量称为矢量（或向量）。仅表示矢量大小的数值称为矢量的模。如果去掉矢量的具体性质，矢量可以用一条有向线段表示，它的正方指向矢量的方向，它的长度等于矢量的模。表示矢量的符号是一个上面带着箭头的拉丁字母，如$\vec{a}$、$\vec{b}$、…，或用黑体字母 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、…来表示。有时为了表示出它的起点和终点，便用 $\boldsymbol{OM}$、$\boldsymbol{AB}$、…来表示，其第一个字母表示矢量的起点，第二个字母表示矢量的终点。矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模用 $|\boldsymbol{a}|$ 表示。

需要说明的是，本书所讲的矢量均指自由矢量，就是当两个矢量的方向相同，模相等时，就认为它们是相等的。因此，一个矢量经过平移后仍旧是原来的矢量。

1.1.1 矢量的加、减法

1. 加法

设有几个矢量，例如 4 个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{d}$。任取一点 O，作矢量 $\boldsymbol{a}$，由它的终点 A 作矢量 $\boldsymbol{b}$，再由矢量 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 作矢量 $\boldsymbol{c}$，其余类推，如图 1.1 所示，这样直至取尽所有的矢量为止。结果就得到折线$OABCD$，该折线的封闭线 OD 就称为所给矢量之和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$。

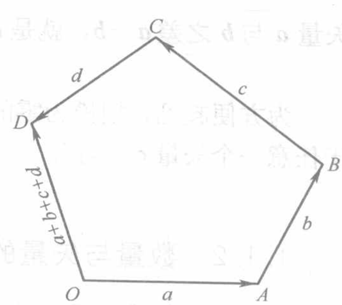

图 1.1 矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 之和

特别是，两个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是以 $\boldsymbol{a}$ 的起点 O 为起点，以 $\boldsymbol{b}$ 的终点 B 为终点所构成的矢量 $\boldsymbol{OB}$，如图 1.2 所示。

由图 1.3 和图 1.4 可知，矢量和具有加法的交换律和结合律，即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$$

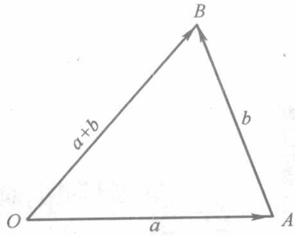

图 1.2　矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之和

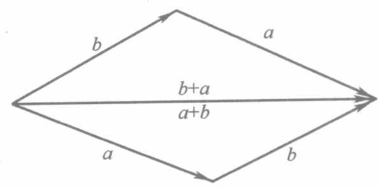

图 1.3　矢量的交换律

2. **减法**

矢量的减法定义为加法的逆运算，如果矢量 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{M}=\boldsymbol{a}$，则称矢量 $\boldsymbol{M}$ 为矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$$

求矢量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的几何方法如下：

由矢量 $\boldsymbol{a}$ 的终点作一矢量 $\boldsymbol{c}$，让 $\boldsymbol{c}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等，方向相反，则以矢量 $\boldsymbol{a}$ 的起点为起点，以矢量 $\boldsymbol{c}$ 的终点为终点的矢量 $\boldsymbol{M}$（如图 1.5 所示）满足关系式

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{M}=\boldsymbol{a}$$

故矢量 $\boldsymbol{M}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差。

与矢量 $\boldsymbol{N}$ 大小相等方向相反的矢量，称为与 $\boldsymbol{N}$ 相逆的矢量，记作 $-\boldsymbol{N}$。由图 1.5 可知，

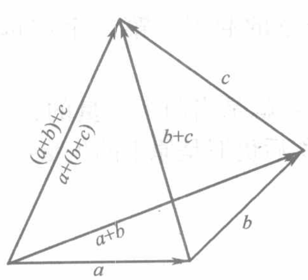

图 1.4　矢量的结合律

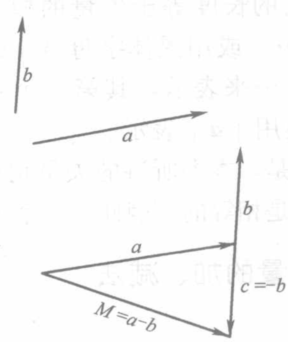

图 1.5　矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$ 之和，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

为方便起见，把模为零的特殊矢量，称为零矢量，记作 $\boldsymbol{0}$，零矢量的方向是任意的。对于任意一个矢量 $\boldsymbol{a}$，均有

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$$

1.1.2　数量与矢量的乘积

若有一个数量 m 和一个矢量 $\boldsymbol{a}$，那么数量 m 和矢量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $m\boldsymbol{a}$（或 $\boldsymbol{a}m$），是一个矢量。它的模等于 $|m||\boldsymbol{a}|$；它的方向，当 $m>0$ 时方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同，$m<0$ 时方向与 $\boldsymbol{a}$ 相反，

$m=0$时模为零矢量，方向是任意的。

位于平行线上的矢量，称为共线矢量。设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是两个非零矢量，如果两矢量共线，则它们具有相同或相反的方向，由数量与矢量乘积的定义知，两矢量间存在关系式

$$\boldsymbol{b}=m\boldsymbol{a}$$

反之，若两矢量具有关系式 $\boldsymbol{b}=m\boldsymbol{a}$，则矢量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 具有相同或相反的方向，因此矢量 $\boldsymbol{b}$ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 共线。

根据以上的讨论可知，对于任何两个非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，它们共线的充要条件是存在一个不等于零的数量 m，使等式 $\boldsymbol{b}=m\boldsymbol{a}$ 成立。

模为 1 的矢量，称为单位矢量。矢量 $\boldsymbol{a}$ 的单位矢量是方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同、且模为 1 的矢量，记作 $\boldsymbol{a}^0$。显然，任何矢量 $\boldsymbol{a}$ 均可写成

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$$

上面的式子把矢量 $\boldsymbol{a}$ 分成两部分，分别表示该矢量的模 $|\boldsymbol{a}|$ 和它的方向 $\boldsymbol{a}^0$。

1.1.3　矢量的投影

在解析几何中研究过线段在轴上投影的基本原理，这里讨论矢量在轴上投影的基本定理。这些定理容易由解析几何中有关投影的定理得到，下面将不加证明地叙述其主要内容。

定义　设有一矢量 $\boldsymbol{a}$ 及一轴 l，过矢量 $\boldsymbol{a}$ 的起点 A 和终点 B 分别作平面 P、Q 垂直于轴 l，且交轴于 A' 和 B'，如图 1.6 所示，称轴 l 上的有向线段 $\overline{A'B'}$ 的值（记作 $A'B'$）为矢量 $\boldsymbol{a}$ 在轴 l 上的投影，记作 $\mathrm{prj}_l\boldsymbol{a}$，即

$$\mathrm{prj}_l\boldsymbol{a}=A'B'$$

关于矢量的投影有下面的基本定理。

(1) 矢量 $\boldsymbol{a}$ 在轴 l 上的投影等于矢量 $\boldsymbol{a}$ 的模与矢量 $\boldsymbol{a}$ 及轴 l 间夹角 φ 的余弦的积，即

$$\mathrm{prj}_l\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$$

(2) 矢量和在任何轴上的投影等于各项矢量在同轴上的投影之和，即

$$\begin{aligned}&\mathrm{prj}_l(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})\\&=\mathrm{prj}_l\boldsymbol{a}+\mathrm{prj}_l\boldsymbol{b}+\mathrm{prj}_l\boldsymbol{c}+\mathrm{prj}_l\boldsymbol{d}\end{aligned}$$

设矢量 $\boldsymbol{OM}$ 的起点是坐标原点 O，而终点 M 的坐标是 (x,y,z)，如图 1.7 所示，由矢量的加法得

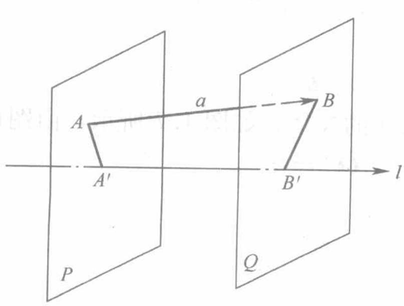

图 1.6　矢量的投影

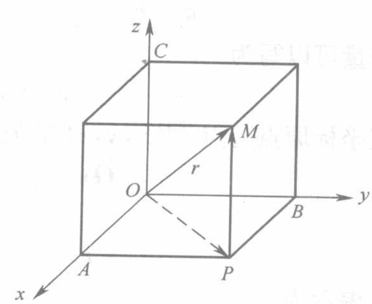

图 1.7　矢量坐标

$$\boldsymbol{OM}=\boldsymbol{OP}+\boldsymbol{PM}$$

而

$$\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{AP}$$

因 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{OB}$，$\boldsymbol{PM}=\boldsymbol{OC}$，所以

$$\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{OA} + \boldsymbol{OB} + \boldsymbol{OC}$$

矢量 $\boldsymbol{OA}$、$\boldsymbol{OB}$ 和 $\boldsymbol{OC}$ 称为矢量 $\boldsymbol{OM}$ 在坐标轴上的分矢量。点 M 的坐标 $x=OA$，$y=OB$，$z=OC$，因此 OA、OB 和 OC 正是矢量 $\boldsymbol{OM}$ 在坐标轴上的投影。在坐标轴的正向作单位矢量，以 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 表之，这样引进的 3 个两两互相垂直的单位矢量，称为基本单位矢量。于是

$$\boldsymbol{OA} = x\boldsymbol{i},\quad \boldsymbol{OB} = y\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{OC} = z\boldsymbol{k}$$

所以

$$\boldsymbol{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

式中 x，y，z 是矢量 $\boldsymbol{OM}$ 在坐标轴上的投影，在矢量的起点为坐标原点的情况下，x，y，z 也正好是矢量终点 M 的坐标。

上面公式，不但对于由原点出发的矢量是成立的，并且对于以空间任一点作起点的矢量也是成立的，即

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

其中 a_x，a_y，a_z 是矢量 $\boldsymbol{a}$ 在坐标轴上的投影。这个表示式称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 的投影表示式，简记为 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$。

矢量的投影表示式在矢量理论中有特别重要的意义，依靠它建立起矢量理论的两部分，即几何的和代数的两部分之间的联系。

设已知两个矢量

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k}$$

由投影的基本定理可得

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_x = a_x + b_x \qquad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_y = a_y + b_y \qquad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})_z = a_z + b_z$$

由此

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = (a_x+b_x)\boldsymbol{i} + (a_y+b_y)\boldsymbol{j} + (a_z+b_z)\boldsymbol{k}$$

也就是已知矢量的投影，在几何相加矢量时，必须将同名的投影分别相加，这样一个几何和归结为三个代数和。

仿之，几何差可以写为

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = (a_x-b_x)\boldsymbol{i} + (a_y-b_y)\boldsymbol{j} + (a_z-b_z)\boldsymbol{k}$$

数量乘矢量可以写为

$$m\boldsymbol{a} = ma_x\boldsymbol{i} + ma_y\boldsymbol{j} + ma_z\boldsymbol{k}$$

连接坐标原点与点 $M(x,y,z)$ 的矢量 $\boldsymbol{r}$ 称为点 M 的矢径，如图 1.7 所示，由图可知

$$\boldsymbol{OA} = x \qquad \boldsymbol{OB} = y \qquad \boldsymbol{OC} = z$$

或

$$r_x = x \qquad r_y = y \qquad r_z = z$$

这时 $\boldsymbol{r}$ 可表示为

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

且其模是

$$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

1.1.4　两矢量的标量积

1. 定义

两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的模和它们间夹角 φ 的余弦的乘积，称为两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的标量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$。即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi$$

由定义得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos 0=|\boldsymbol{a}|^2$$

如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^2$ 则上式可写成

$$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$$

2. 标量积的基本性质

（1）非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直的充要条件是

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

因为当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直时，$\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=0$ 从而

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$$

反之，如果 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，并且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 皆不为零矢量，则有

$$\cos(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0}$$

所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 互相垂直。

（2）由标量积的定义可知，标量积满足交换律，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$$

（3）标量积满足分配律，即

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$$

事实上，由标量积的定义有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cos(\boldsymbol{c}\hat{,}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{c}|\,\mathrm{prj}_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\end{aligned}$$

再由投影定理知

$$\mathrm{prj}_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{prj}_c\boldsymbol{a}+\mathrm{prj}_c\boldsymbol{b}$$

所以

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}&=|\boldsymbol{c}|\,\mathrm{prj}_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\\&=|\boldsymbol{c}|\,\mathrm{prj}_c\boldsymbol{a}+|\boldsymbol{c}|\,\mathrm{prj}_c\boldsymbol{b}\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

（4）由标量积的定义易知，标量积与标量的乘积满足结合律，即

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})m=\boldsymbol{a}\cdot(m\boldsymbol{b})=m\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$$

3. 标量积的投影表示法

设有两个矢量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$，由上面所述标量积的基本性质得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= (a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}) \\ &= a_x\boldsymbol{i}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})+a_y\boldsymbol{j}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}) \\ &\quad +a_z\boldsymbol{k}\cdot(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k}) \\ &= a_xb_x\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_xb_y\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+a_xb_z\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+a_yb_x\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i} \\ &\quad +a_yb_y\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+a_yb_z\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}+a_zb_x\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}+a_zb_y\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}+a_zb_z\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 是互相垂直的单位矢量，故有

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=0,\quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=0,\quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$$

和

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=1,\quad \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=1,\quad \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$$

最后得到

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

这就是说，两个矢量的标量积等于它们在坐标轴上同名投影乘积的代数和。

特别是 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时得到

$$\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2$$

所以

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

4. 两矢量间的夹角

设两个矢量 $\boldsymbol{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{b_x,b_y,b_z\}$ 之间的夹角为 φ，则有

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

由两矢量标量积和矢量的模的投影表示式得到

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

1.1.5 两矢量的矢量积

1. 定义

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 的矢量积是这样的一个矢量 $\boldsymbol{c}$：

(1) 矢量 $\boldsymbol{c}$ 的模等于以矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所组成的平行四边形面积，即

$$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a}\overset{\wedge}{,}\boldsymbol{b})$$

(2) 矢量 $\boldsymbol{c}$ 同时垂直于矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，因而矢量 $\boldsymbol{c}$ 垂直于矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面。

(3) 矢量 $\boldsymbol{c}$ 的正向按"右手法则"来确定，如图 1.8 所示。

矢量 $\boldsymbol{a}$ 与矢量 $\boldsymbol{b}$ 的矢量积，用记号 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 表示，即

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$$

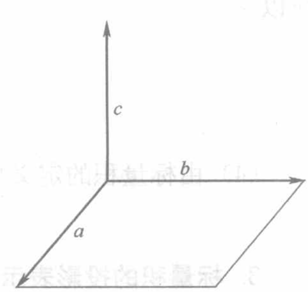

图 1.8 两矢量的矢量积

2. 矢量积的基本性质

(1) 两个非零矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是两矢量的矢量积

为零，即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$$

事实上，若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时，$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=0$ 或 π，这时 $\sin(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=0$，故得 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$。

反之，当 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 而 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$，$|\boldsymbol{b}|\neq 0$ 时，由 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=0$

推得

$$\sin(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=0$$

从而

$$(\boldsymbol{a}\hat{,}\boldsymbol{b})=0 \quad 或 \quad \pi$$

所以

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$$

(2) 由矢量积的定义得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$$

这说明矢量积不满足交换律，并且当矢量积的因子交换时变号。

(3) 由矢量积的定义证得

$$(m\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=m(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(m\boldsymbol{b})$$

即标量积的乘数可以提出并放在矢量积记号外面。

(4) 矢量积满足分配律，即

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$$

3. 矢量积的投影表示法

将上面研究的结果应用到基本单位矢量的矢量积，可得

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\mathbf{0},\quad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\mathbf{0},\quad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=-(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})=\boldsymbol{k}\qquad \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=-(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})=\boldsymbol{i}\qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=-(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})=\boldsymbol{j}$$

设 $\boldsymbol{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$ 和 $\boldsymbol{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=a_xb_x(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_xb_y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_xb_z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\&\quad+a_yb_x(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_yb_y(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+a_yb_z(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+a_zb_x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})\\&\quad+a_zb_y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+a_zb_z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})\end{aligned}$$

从而得到

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_z-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_z)\boldsymbol{k}$$

应用三阶行列式，则上式可表示为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$$

1.2 矢量分析

矢量分析是矢量代数的延续，主要内容是介绍矢性函数及其微分、积分等，是学习场论的基础。

1.2.1 矢性函数

1. 矢性函数的概念

矢量代数中讨论了模和方向都保持不变的矢量，这种矢量称为常矢，其中零矢量的方向为任意，是一个特殊的常矢量。另外还有模和方向或其中之一会改变的矢量，这种矢量称为变矢。在矢量分析中还引进了矢性函数的概念，它的定义是：设有数性变量 t 和变矢 $\boldsymbol{A}$，如果对于 t 在某个范围 G 内的每一个数值，$\boldsymbol{A}$ 都以一个确定的矢量与之对应，则称 $\boldsymbol{A}$ 为数性变量 t 的矢性函数，记作

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t) \tag{1.1}$$

并称 G 为函数 $\boldsymbol{A}$ 的定义域。

矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在 $Oxyz$ 直角坐标系中的三个坐标，也就是它在三个坐标轴上的投影，显然都是 t 的函数

$$A_x(t),\quad A_y(t),\quad A_z(t)$$

所以，矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的坐标表示式为

$$\boldsymbol{A}=A_x(t)\boldsymbol{i}+A_y(t)\boldsymbol{j}+A_z(t)\boldsymbol{k} \tag{1.2}$$

其中 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 为沿 x，y，z 三个坐标轴正向的单位矢量（也可用 $\boldsymbol{e}_x$，$\boldsymbol{e}_y$，$\boldsymbol{e}_z$ 表示）。可见，一个矢性函数和三个有序的数性函数（坐标）构成一一对应的关系。

2. 矢端曲线

如果不论两个矢量的空间位置如何，只要当两个矢量的模和方向都相同，就是说这两个两个矢量是相等的，这样的矢量称为自由矢量。以后所讲的矢量均指自由矢量。所以，为了能用图形来直观地表示矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的变化状态，可以将 $\boldsymbol{A}(t)$ 的起点取在坐标原点。当 t 变化时，矢量 $\boldsymbol{A}(t)$ 的终点 M 就描绘出一条曲线 l，称曲线 l 为矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的矢端曲线或矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的图形，如图 1.9 所示。同时称式（1.1）或式（1.2）为曲线 l 的矢量方程。

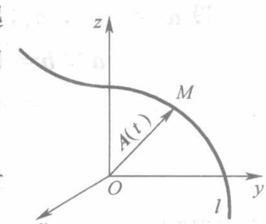

图 1.9 矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的矢端曲线

称起点在坐标原点 O，终点为 $M(x,y,z)$ 的矢量 $\overrightarrow{OM}$ 为点 M（对于 O 点）的矢径，一般用 $\boldsymbol{r}$ 表示。

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

若把矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的起点取在坐标原点，$\boldsymbol{A}(t)$ 实际上就成为终点 $M(x,y,z)$ 的矢径。$\boldsymbol{A}(t)$ 的三个坐标 $A_x(t)$，$A_y(t)$，$A_z(t)$ 就对应地等于终点 M 的三个坐标 x，y，z 。即

$$x=A_x(t)\qquad y=A_y(t),\qquad z=A_z(t) \tag{1.3}$$

这是曲线 l 的以 t 为参数的参数方程。

显然，曲线 l 的矢量方程（1.2）和参数方程（1.3）二者之间，存在着一一对应的关系，有了其中的一个，就可以推导出另一个。

3. 矢性函数的极限和连续性

矢性函数的极限和连续性是矢性函数的微分与积分的基础概念。

设矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在点 t_0 的某个邻域内有定义，有一个常矢 $\boldsymbol{A}_0$。若对于任意给定的正数 ε，都存在一个正数 δ，使得当 t 满足 $0<|t-t_0|<\delta$ 时，有

$$|\boldsymbol{A}(t)-\boldsymbol{A}_0|<\varepsilon$$

成立，则称 $\boldsymbol{A}_0$ 为矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 当 $t\to t_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{A}_0 \tag{1.4}$$

可见其与数性函数的极限定义类似，矢性函数也应有类似于数性函数中的一些极限运算法则。常用的有：

$$\lim_{t\to t_0}u(t)\boldsymbol{A}(t)=\lim_{t\to t_0}u(t)\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t) \tag{1.5}$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{A}(t)\pm\boldsymbol{B}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)\pm\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{B}(t) \tag{1.6}$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)\cdot\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{B}(t) \tag{1.7}$$

$$\lim_{t\to t_0}[\boldsymbol{A}(t)\times\boldsymbol{B}(t)]=\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)\times\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{B}(t) \tag{1.8}$$

其中 $u(t)$ 为数性函数，$\boldsymbol{A}(t)$、$\boldsymbol{B}(t)$ 为矢性函数，且当 $t\to t_0$ 时 $u(t)$、$\boldsymbol{A}(t)$、$\boldsymbol{B}(t)$ 均有极限存在。

由式（1.2）有

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)=\lim_{t\to t_0}A_x(t)\boldsymbol{i}+\lim_{t\to t_0}A_y(t)\boldsymbol{j}+\lim_{t\to t_0}A_z(t)\boldsymbol{k} \tag{1.9}$$

这样可以把求矢性函数的极限，转化为求三个数性函数的极限。

若矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在点 t_0 的某个邻域内有定义，且有

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{A}(t_0) \tag{1.10}$$

则称 $\boldsymbol{A}(t)$ 在 $t=t_0$ 处连续。

矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在点 t_0 处连续的充要条件是它的三个坐标函数 $A_x(t)$、$A_y(t)$、$A_z(t)$ 都在 t_0 处连续。

若矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在某个区间内的每一点处都连续，则称它在该区间内连续。

1.2.2 矢性函数的导数与微分

1. 矢性函数的导数

设有起点在 O 点的矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$，当数性变量 t 在其定义域内从 t 变到 $t+\Delta t(\Delta t\neq 0)$ 时，对应的矢量分别为

$$\boldsymbol{A}(t)=\overrightarrow{OM},\qquad \boldsymbol{A}(t+\Delta t)=\overrightarrow{ON}$$

则

$$\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)=\overrightarrow{MN}$$

叫做矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的增量，记作 $\Delta\boldsymbol{A}$，即

$$\Delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t) \tag{1.11}$$

如图 1.10 所示。下面给出矢性函数导数的定义。

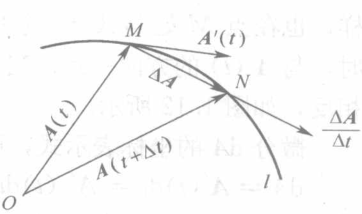

图 1.10 矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 的增量

设矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$ 在点 t 的某一邻域内有定义，并设 $t+\Delta t$ 也在这个邻域内。若 $\boldsymbol{A}(t)$ 对应于 Δt 的增量 $\Delta\boldsymbol{A}$ 与 Δt 之比

$$\frac{\Delta\boldsymbol{A}}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}$$