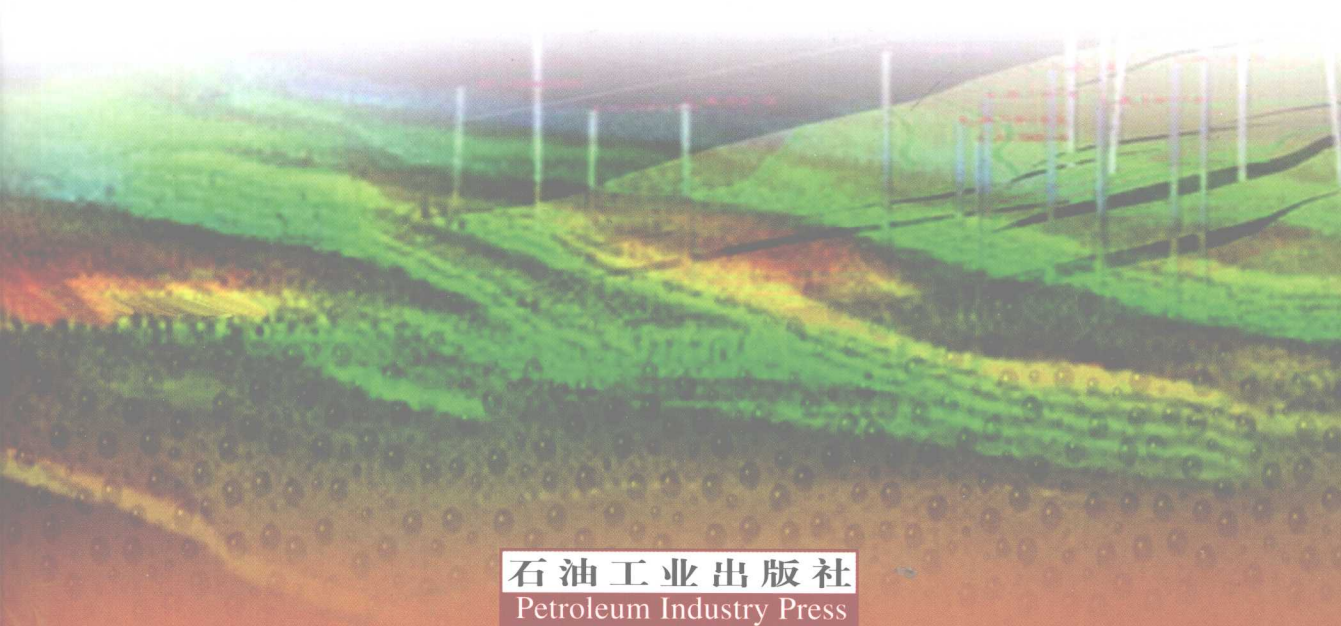




石油高等院校特色教材

油藏驱替机理

苏玉亮 编著



石油工业出版社
Petroleum Industry Press

石油教材出版基金资助项目

石油高等院校特色教材

油 藏 驱 替 机 理

苏玉亮 编著

石油工业出版社

内 容 提 要

油藏驱替是油藏工程理论和实践的核心部分,二次采油过程的油水两相弱压缩流体(饱和度和波)驱替、三次采油过程的多相多组分流体溶剂混相和非混相(溶剂浓度波)驱替、三次采油过程的热力法采油非等温(温度波)驱替都是典型油藏驱替问题。本书从油藏工程和渗流力学角度出发,结合经典数学理论及近代数学中求解非线性问题的一些理论和方法,介绍各种驱替的机理及驱替过程中的油田开发指标计算方法,使读者对二、三次采油过程中的驱油机理有较深入的了解。

本书可用作石油工程专业学生教材,也可供从事油田开发的科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

油藏驱替机理/苏玉亮编著.

北京:石油工业出版社,2009.7

(石油高等院校特色教材)

ISBN 978-7-5021-7202-2

I. 油…

II. 苏…

III. 驱油-研究

IV. TE35

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 090092 号

出版发行:石油工业出版社

(北京安定门外安华里 2 区 1 号 100011)

网 址: www.petropub.com.cn

编辑部: (010)64523579 发行部: (010)64523620

经 销: 全国新华书店

印 刷: 中国石油报社印刷厂

2009 年 7 月第 1 版 2009 年 7 月第 1 次印刷

787×1092 毫米 开本: 1/16 印张: 7.5

字数: 192 千字

定价: 12.00 元

(如出现印装质量问题,我社发行部负责调换)

版权所有,翻印必究

前 言

油藏驱替是油藏工程理论和实践的核心部分,例如,一次采油过程中的单相流体弹性驱替,二次采油过程的油水两相弱压缩流体(饱和度波)驱替,三次采油过程的多相多组分流体溶剂混相和非混相(溶剂浓度波)驱替,三次采油过程的热力法采油非等温(温度波)驱替,都是典型油藏驱替问题。

本书从油藏工程和渗流力学角度出发,结合经典数学理论及近代数学中求解非线性问题的一些方法,介绍各种驱替的机理及驱替过程中的油田开发指标计算方法,使读者对二、三次采油过程中的驱油机理有较深入的了解,从原理上掌握提高原油采收率的基本途径。全书共分三章:

第一章,水驱油基础理论。主要介绍水驱油过程中的贝克莱—列维尔特驱油理论,激波理论及其在油水两相驱替中的应用,以及难开发油藏(裂缝性、稠油、低渗)的驱替机理及驱替特征。

第二章,物理—化学方法驱油机理及动态计算。主要介绍溶剂和高压气驱油、二氧化碳驱油、表面活性剂水溶液驱油、胶束—聚合物驱油等三次采油过程中的驱油机理及其在油田开发中的计算方法,并给出算例,为矿场实施三次采油提供理论依据和设计方法。

第三章,热力法驱油机理及动态计算。主要介绍油田注热(冷)水和蒸汽开发、储层燃烧驱油等三次采油过程中的驱油机理及油田开发计算方法,为矿场实施热力法采油提供理论依据和设计方法。

本书部分内容来源于栾志安教授的讲稿,在此,对栾老师表示诚挚的谢意。本书参考了大量的文献资料和书籍,在此,对这些作者表示深切谢意。同时,感谢研究生周灿、吴春新、王文东、侯照峰,他们在本书的排版等方面做了大量的工作。全书得到了中国石油大学(华东)杜殿发副教授的审阅,并提出了许多宝贵意见,在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限,书中不妥之处在所难免,希望读者批评指正。

编 者
2008年8月

目 录

第一章 水驱油基础理论.....	1
第一节 贝克莱—列维尔特驱油理论.....	1
第二节 激波理论及其在两相驱替中的应用.....	5
第三节 裂缝性储层驱替机理及特征	16
第四节 非牛顿流体驱替机理及特征	22
第五节 低渗透储层驱替机理及特征	30
思考题	36
第二章 物理—化学方法驱油机理及动态计算	38
第一节 溶剂和高压气驱油	38
第二节 二氧化碳驱油	48
第三节 表面活性剂水溶液驱油	57
第四节 聚合物、胶束—聚合物驱油	66
第五节 用物理—化学方法开发油田的评价及存在问题	77
思考题	78
第三章 热力法驱油机理及动态计算	79
第一节 油田注热(冷)水开发	79
第二节 油田注蒸汽开发	92
第三节 储层燃烧驱油.....	100
第四节 热力法油田开发的主要结果及存在问题.....	114
思考题.....	115
参考文献.....	116

第一章 水驱油基础理论

在天然水驱和人工注水开发过程中,用水从多孔介质中驱替石油是最基本的过程。由于流体性质的差别及储层非均质性的影响,导致在各个不同的渗流断面处具有不同的流体饱和度。本章首先介绍描述考虑油水性质差别的非活塞式驱油理论——贝克莱—列维尔特驱油理论,然后将激波理论引用到油水两相驱替问题的计算中,最后介绍了稠油油藏及低渗透储层的水驱机理及其特征。

第一节 贝克莱—列维尔特驱油理论

对不可压缩、不互溶液体的一维流动的情形,倘若液体之间的界面张力小到可以忽略毛细管压力效应,同时忽略重力作用,则可以列出此过程的简单的数学描述。

首先,考虑在与水平线成 α 角的多孔介质细管中的线性驱替。沿着此管的距离 x 以向上的方向为正。此管的横截面积 A 小到足可把任一截面上的压力和饱和度看作是均匀一致的。同时假定水为润湿相,油为非润湿相。

由达西定律,对润湿相和非润湿相,有

$$q_w = -\frac{K_w A}{\mu_w} \left(\frac{\partial p_w}{\partial x} + \rho_w g \sin \alpha \right) \quad (1-1-1)$$

和

$$q_{nw} = -\frac{K_{nw} A}{\mu_{nw}} \left(\frac{\partial p_{nw}}{\partial x} + \rho_{nw} g \sin \alpha \right) \quad (1-1-2)$$

式中 q_w ——润湿相通过砂层的渗流量, cm^3/s ;

q_{nw} ——非润湿相通过砂层的渗流量, cm^3/s ;

K_w ——润湿相液体的渗透率, μm^2 ;

K_{nw} ——非润湿相液体的渗透率, μm^2 ;

A ——渗流截面积, cm^2 ;

μ_w ——润湿相液体的粘度, $\text{mPa}\cdot\text{s}$;

μ_{nw} ——非润湿相液体的粘度, $\text{mPa}\cdot\text{s}$;

p_w ——润湿相液体中的压力, 10^{-1}MPa ;

p_{nw} ——非润湿相液体中的压力, 10^{-1}MPa ;

ρ_w ——润湿相液体的密度, g/cm^3 ;

ρ_{nw} ——非润湿相液体的密度, g/cm^3 ;

α ——倾斜的多孔介质细管与水平线的夹角, $(^\circ)$ 。

定义

$$p_c = p_{nw} - p_w \quad (1-1-3)$$

p_c 为毛细管压力。

把液体都考虑成不可压缩的,这样,把连续方程用于每相,将得出两个方程式

$$\frac{\partial q_w}{\partial x} = -\phi A \frac{\partial S_w}{\partial t} \quad (1-1-4)$$

和

$$\frac{\partial q_{nw}}{\partial x} = -\phi A \frac{\partial S_{nw}}{\partial t} \quad (1-1-5)$$

式中 ϕ ——孔隙度；

x ——驱替方向的长度，m；

t ——时间，s；

S_w ——润湿相液体饱和度；

S_{nw} ——非润湿相液体饱和度。

其中，饱和度有关系式

$$S_w + S_{nw} = 1 \quad (1-1-6)$$

把式(1-1-4)和式(1-1-5)相加，并考虑到式(1-1-6)，有

$$\frac{\partial}{\partial x}(q_w + q_{nw}) = 0 \quad (1-1-7)$$

这样，总流量

$$q = q_w + q_{nw} \quad (1-1-8)$$

沿着此管是不变的。

鉴于此结果，可以用方程

$$f_w = \frac{q_w}{q} \quad (1-1-9)$$

定义 f_w 为润湿液体的液流分数，类似地，对非润湿液体有

$$f_{nw} = \frac{q_{nw}}{q} = 1 - f_w \quad (1-1-10)$$

于是，连续方程可写为

$$\frac{q}{\phi A} \frac{\partial f_w}{\partial x} = -\frac{\partial S_w}{\partial t} \quad (1-1-11)$$

和

$$\frac{q}{\phi A} \frac{\partial f_{nw}}{\partial x} = -\frac{\partial S_{nw}}{\partial t} \quad (1-1-12)$$

现在，联合式(1-1-1)、式(1-1-2)和式(1-1-3)消去 p_w 和 p_{nw} ，可得

$$q_{nw} = -\frac{K_{nw}}{\mu_{nw}} A \left(-\frac{\mu_w q_w}{K_w A} + \frac{\partial p_c}{\partial x} - \Delta \rho g \sin \alpha \right) \quad (1-1-13)$$

其中

$$\Delta \rho = \rho_w - \rho_{nw} \quad (1-1-14)$$

然后，代入

$$q_w = f_w q \quad (1-1-15)$$

和

$$q_{nw} = (1 - f_w) q \quad (1-1-16)$$

可得出 f_w 为

$$f_w = \frac{1 + \frac{K_{nw}A}{\mu_{nw}q} \left(\frac{\partial p_c}{\partial x} - \Delta \rho g \sin \alpha \right)}{1 + \frac{K_{nw}\mu_w}{K_w\mu_{nw}}} \quad (1-1-17)$$

如果总流量 q 很大而界面张力和密度差很小，则可近似地写为

$$f_w \approx \left(1 + \frac{K_{nw}\mu_w}{K_w\mu_{nw}} \right)^{-1} = f_w \left(S_w, \frac{\mu_w}{\mu_{nw}} \right) \quad (1-1-18)$$

因为粘度比只是一参数，所以 f_w 仅为饱和度的函数。当此近似式有效时

$$\frac{\partial f_w}{\partial x} = \frac{df_w}{dS_w} \frac{\partial S_w}{\partial x} \quad (1-1-19)$$

此时连续方程可写为

$$\left(\frac{q}{\phi A} \frac{df_w}{dS_w} \right) \frac{\partial S_w}{\partial x} = - \frac{\partial S_w}{\partial t} \quad (1-1-20)$$

对另一相的连续方程也可归结为这样的方程。

因为 $\frac{\partial S_w}{\partial x}$ 的系数是 S_w 的函数，式(1-1-20)是 S_w 的非线性方程，因此不能用古典的分析方法求得其解。但是，可用如下方法来确定饱和度分布。

$S_w(x, t)$ 对时间的全微分是

$$\frac{dS_w}{dt} = \frac{\partial S_w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial S_w}{\partial t} \quad (1-1-21)$$

如果选择 $x=x(t)$ 使与固定的 S_w 的面相重合，则

$$\frac{dS_w}{dt} = 0 \quad (1-1-22)$$

而饱和度 S_w 的推进速度是

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_{S_w} = - \frac{\partial S_w}{\partial t} \left(\frac{\partial S_w}{\partial x} \right)^{-1} \quad (1-1-23)$$

如果从式(1-1-20)中消去 $\partial S_w / \partial t$ ，可得

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_{S_w} = \frac{q}{\phi A} \frac{df_w(S_w)}{dS_w} \quad (1-1-24)$$

此方程被称为贝克莱—列维尔特方程，对 t 积分，得

$$x_{S_w}(t) - x_{S_w}(0) = \frac{Q(t) - Q(0)}{\phi A} \frac{df_w(S_w)}{dS_w} \quad (1-1-25)$$

式中 $x_{S_w}(t)$, $x_{S_w}(0)$ ——时间为 t 和时间为 0 时饱和度为 S_w 的平面坐标，cm；

$Q(t)$, $Q(0)$ ——时间为 t 和时间为 0 时通过此系统的累积总体积， cm^3 。

如果渗透率比 K_{nw}/K_w 是已知的饱和度的函数，则对每个饱和度 S_w 都能计算出系数 df_w/dS_w 的值。因此，当已知在 $t=0$ 时的饱和度分布，可从这个分布和式(1-1-25)算得在任何 $t>0$ 时的饱和度分布。

但是，在计算过程中会碰到某些困难。例如，利用如图 1-1-1 所示的相对渗透率曲线，得到在 $\mu_w/\mu_{nw}=1$ 下的 f_w 及 df_w/dS_w 与 S_w 的关系曲线(图 1-1-2)。利用图 1-1-2 中的 df_w/dS_w 曲线和式(1-1-25)，可计算得到时间 $t>0$ 时的饱和度分布(图 1-1-3)。由图 1-1-3 可以看出，出现了饱和度的多值现象，这在物理上是不可能的。

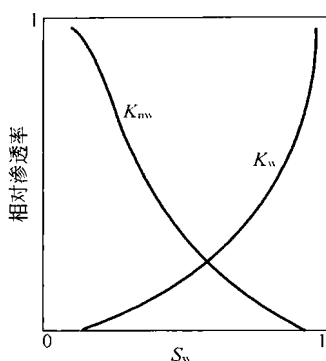


图 1-1-1 相对渗透率曲线

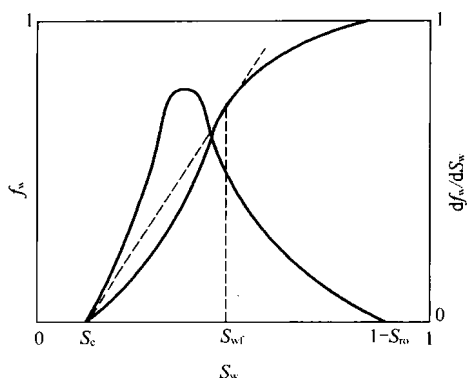


图 1-1-2 润湿流体在流动的流体中的分数
及其一阶导数曲线

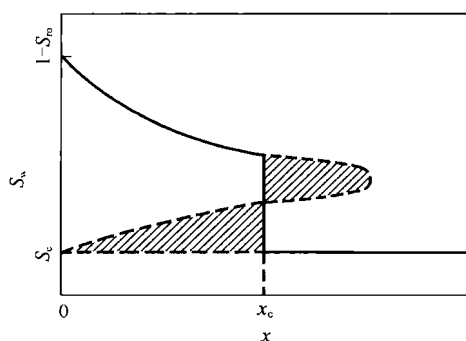


图 1-1-3 饱和度分布图

为了消除饱和度的多值性,考虑下列事实:在 $t=0$ 时,任意截面有 $S_w=S_c$;而润湿液体在 $x=0$ 处注入,亦即在 $x=0$ 处 $f_w=1$ 。根据体积平衡,对于润湿液体,有

$$Q(t) = \int_0^{x_c} \phi(S_w - S_c) A dx \quad (1-1-26)$$

式中 S_c ——束缚水饱和度。

此处, x_c 是切断点,大于这点, $S_w=S_c$ 。这样,在 $x=x_c$ 处引入饱和度的间断点,间断点处的最大饱和度称为前缘含水饱和度。这一间断点也能从形成激波的观点加以研究。

对式(1-1-26)进行分部积分,其结果为

$$Q = \phi A x_c (S_{wf} - S_c) - \int_{1-S_{ro}}^{S_{wf}} \phi A x dS_w \quad (1-1-27)$$

式中 S_{wf} ——前缘含水饱和度。

鉴于式(1-1-25)中 $Q(0)=0$, $x_{S_w}(0)=0$,得

$$Q = \phi A (S_{wf} - S_c) x_c - Q \int_{1-S_{ro}}^{S_{wf}} \frac{df_w}{dS_w} dS_w \quad (1-1-28)$$

对式(1-1-28)进行积分,并注意到 $S_w=1-S_{ro}$ 时 $f_w=1$,可得

$$Q = \phi A (S_{wf} - S_c) x_c - Q [f_w(S_{wf}) - 1] \quad (1-1-29)$$

或

$$\phi A x_c = \frac{f_w(S_{wf})}{S_{wf} - S_c} Q \quad (1-1-30)$$

将 $Q(0)$ 和 $x(0)$ 再一次代入式(1-1-25),得

$$\phi A x_c = Q \frac{df_w}{dS_w}(S_{wf}) \quad (1-1-31)$$

由式(1-1-30)、式(1-1-31),得

$$\frac{df_w(S_{wf})}{dS_w} = \frac{f_w(S_{wf})}{S_{wf} - S_c} \quad (1-1-32)$$

式(1-1-32)表示,如果去掉所有 S_{wf} 以下的饱和度,则饱和度分布是单值的。前缘含水饱和度 S_{wf} 可由图解法确定:在含水率和含水饱和度关系曲线上,通过束缚水饱和度 S_c 点

对 f_w-S_w 曲线作切线，切点所对应的含水饱和度即为水驱油前缘含水饱和度 S_{wf} ，如图 1-1-2 所示。

用此方法引入的饱和度的间断点 x_c ，如图 1-1-3 所示。进一步的分析表明，图 1-1-3 中两块阴影面积相等。

这一分析驱替过程的方法被广泛地应用于油田开发。例如，对轴对称的水平系统(径向流)进行同样的分析，可得出相应于式(1-1-25)的如下方程

$$\phi\pi h[r_{S_w}^2(t) - r_{S_w}^2(0)] = [Q(t) - Q(0)] \frac{df_w(S_w)}{dS_w} \quad (1-1-33)$$

式中 $r_{S_w}(t)$ —— t 时刻 S_w 所处的半径，cm；

h ——储层厚度，cm。

前缘含水饱和度 S_{wf} 仍由式(1-1-32)得出。

在两相驱替理论中，由于贝克莱—列维尔特方程的非线性，不能应用经典的数学方法进行求解，因此下一节将介绍求解一阶拟线性方程的特征线法和非连续方程的激波理论。

第二节 激波理论及其在两相驱替中的应用

一、激波理论

以追赶模型和交通模型为例，介绍一阶拟线性方程的特征线法和非连续方程的激波理论。

1. 追赶模型

1) 追赶问题

以不同身高的人在一直线上前进的追赶问题作为模型进行讨论。假设人的数目较多，则可采用一个连续模型，用函数 $h(t, x)$ 来表示 t 时刻位于 x 处(或其附近)的人的身高。这里要考察函数 $h(t, x)$ 所满足的方程。

假设所有的人以速度 v 沿 x 轴正方向运动，于是在任一直线上， $x-vt$ = 常数， h 取常数(对应于同一个人)，故沿此方向对 t 的导数满足

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (1-2-1)$$

从而得到 $h(t, x)$ 应满足的偏微分方程

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (1-2-2)$$

这是一个最简单的一阶常系数线性偏微分方程，它具有右传播形式的通解(行波解)

$$h = f(x - vt) \quad (1-2-3)$$

式中 f ——任意的单变量函数。

于是，当 $t=0$ 时

$$h = h_0(x) \quad (1-2-4)$$

则

$$h = h_0(x - vt) \quad (1-2-5)$$

即人头曲线 $h=h(t, x)$ 的形状不随 t 的变化而改变，只是以速度 v 向右方移动。

如果考察比较一般的情况，速度 v 随时间 t 及空间坐标 x 而变化，即 $v=v(t, x)$ 的情况。

这时每一个人的运动规律由常微分方程

$$\frac{dx}{dt} = v(t, x) \quad (1-2-6)$$

初始条件

$$t = 0, x = \alpha (\alpha \text{ 为此人的初始位置}) \quad (1-2-7)$$

的解 $x = x(t)$ 来表示。因此，沿着常微分方程(1-2-6)的任一积分曲线 $x = x(t)$, $h = h[t, x(t)] = \text{常数}$ ，于是

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{\partial h}{\partial t}[t, x(t)] + \frac{dx}{dt} \frac{\partial h}{\partial x}[t, x(t)] \\ &= \frac{\partial h}{\partial t}[t, x(t)] + v[t, x(t)] \frac{\partial h}{\partial x}[t, x(t)] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1-2-8)$$

由于这些(带不同的初值 α 的)积分曲线(特征线)充满 (t, x) 平面上的一个区域，故此时 $h = h(t, x)$ 应满足如下方程

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v(t, x) \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (1-2-9)$$

这是一个一阶线性(变系数)偏微分方程。

如果给定初始时刻的人头曲线式(1-2-4)为初始条件，则式(1-2-9)的解(任一时刻 t 的人头曲线)可由特征线方法求得。先求解常微分方程的初值问题式(1-2-6)、式(1-2-7)，得到过 $(0, \alpha)$ 点的特征线为 $x = x(t, \alpha)$ ，在特征线上 h 的数值应为常数，且等于 $h_0(\alpha)$ 。再从 $x = x(t, \alpha)$ 中反解出 $\alpha = \alpha(t, x)$ ，代入 $h_0(\alpha)$ ，得到 $h = h_0[\alpha(t, x)]$ ，即为所求初值问题式(1-2-4)、式(1-2-9)的解。此时，人头曲线的形状将随时间连续地变化。

容易看出，在特征线存在的范围内，上面所得到的解均是有意义的。事实上，有

$$\begin{cases} \frac{dx(t, \alpha)}{dt} = v[t, x(t, \alpha)] \\ t = 0, x(0, \alpha) = \alpha \end{cases} \quad (1-2-10)$$

关于 α 求导一次，得

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial v}{\partial x}[t, x(t, \alpha)] \frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha} \\ t = 0, \frac{\partial x(0, \alpha)}{\partial \alpha} = 1 \end{cases} \quad (1-2-11)$$

因此，在解 $x = x(t, \alpha)$ 存在的范围内，恒成立

$$\frac{\partial x(t, \alpha)}{\partial \alpha} = \exp \left\{ \int_0^t \frac{\partial v}{\partial x}[\tau, x(\tau, \alpha)] d\tau \right\} > 0 \quad (1-2-12)$$

从而对任何固定的 $t \geq 0$ ，均可由 $x = x(t, \alpha)$ 反解出 $\alpha = \alpha(t, x)$ 。

上面的讨论都没有考虑前进的速度和身高的关系，因而都得到线性方程，其解是线性波，其特点是后面的人永远赶不上前面的人。但实际上，步行的速度因人而异，可假设与身高成正比。这时后面的高个子将赶上前面的矮个子，而将发生与前面不同的现象。这时像上述那种人头曲线的连续变形，在一定时间后，即在追赶上以后，将不再存在，而将发生某种混乱状态或冲击。但在追赶上以前，人头曲线 $h(t, x)$ 仍应满足式(1-2-9)，只是应取

$$v(t, x) = h(t, x) \quad (\text{为简单起见, 比例系数取为 } 1) \quad (1-2-13)$$

于是得到 $h = h(t, x)$ 应是下述方程的解

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (1-2-14)$$

这是一个一阶拟线性方程，是研究拟线性方程的一个典型代表。

设 $h=h(t,x)$ 是式(1-2-14)的一个连续可微解(描述追赶上以前的人头曲线)。类似于前述，用求解常微分方程

$$\frac{dx}{dt} = h(t,x) \quad (1-2-15)$$

来决定其特征线，并由式(1-2-14)可知，沿任一特征线成立

$$\frac{dh}{dt} = 0 \quad (1-2-16)$$

从而 $h=\text{常数}$ 。于是由式(1-2-15)知任一特征线均为直线，在特征线上 h 取常数值，且此时特征线的斜率 $\frac{dx}{dt}$ 即为常数值 h 。

于是，若已知初始时刻的人头曲线形状——式(1-2-4)，就可利用任一特征线均为直线的性质决定以后时刻的人头曲线，即求得初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ t = 0, h = h_0(x) \end{cases}$$

的解 $h=h(t,x)$ 。

事实上，过 $(0,\alpha)$ 点的特征线应为

$$x = h_0(\alpha)t + \alpha \quad (1-2-17)$$

其中

$$h_0(\alpha) = h = \text{常数} \quad (1-2-18)$$

当 α 变动时，这些特征线必布满 (t,x) 平面上初始轴附近的一个区域(图 1-2-1)，而在每一特征线上的解已知，因此，就可一定范围内决定解。具体说来，可从式(1-2-17)中反解出 $\alpha=\alpha(t,x)$ ，再代入式(1-2-18)，就可得到所求的解 $h=h_0[\alpha(t,x)]$ 。

值得注意的是，前面所定义的特征线族，即常微分方程(1-2-6)的解族，由于解的唯一性，在其存在的范围内是互不相交的，因而可得到随 t 而连续变化的人头曲线，

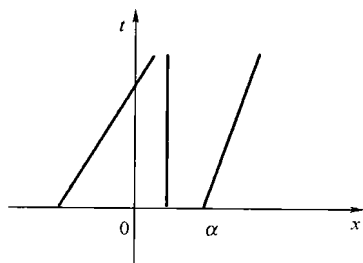


图 1-2-1 特征线示意图

即不会出现追赶上的现象。而现在，特征线族在其存在的范围内则有可能相交。由于在任一特征线上 h 为常数，任一固定的特征线对应于某个固定的人。两条特征线如相交，即意味着后面的人赶上前面的人，这时，连续的人头曲线或人头曲线的波形的连续变化就要被破坏，即上述初值问题——式(1-2-14)、式(1-2-4)，一般不存在在全部时间 $t \geq 0$ 上的连续可微解。这是非线性波的一个特点，即连续的波形将可能在有限时间后破坏，而出现波的破裂(blow-up)现象。在追赶问题中，就相应于后面的人赶上前面的人。这时，在追赶上的地方，就要发生某种混乱状态或冲击。

2) 疏散波与压缩波

现在具体地考察上面的初值问题——式(1-2-14)、式(1-2-4)。

如果所给的初始条件满足

$$h'_0(x) \geq 0 \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (1-2-19)$$

即初始时, 高个子在前, 矮个子在后, 则此时特征线族 $x=h_0(\alpha)t+\alpha$ 发散(图 1-2-2)。这样, 对 $t \geq 0$, 一定可从式(1-2-17)中反解出 $\alpha=\alpha(t, x)$, 从而在 $t \geq 0$ 上得到连续可微的解 $h=h_0[\alpha(t, x)]$ 。这意味着, 此时永远不会产生追赶上的现象, 而且人群愈来愈散开, 相应的波称为疏散波。初始的波形 $h=h_0(x)$ 即使在有一些地方比较陡峭也将变得愈来愈平坦。

如果有很多的人集中在一起, 但仍是高的在前, 矮的在后, 由上述分析知人群将很快地分散开来。这时可近似地看成有一批人集中在一点 x_0 (实际上是一个很狭窄的区域中), 从而从这一点发出一束特征线(图 1-2-3), 在每一特征线上, h 为常数, 即对应于一个固定的人。因此, 此时特征线束的方程为

$$x = h_0(\alpha)t + x_0 \quad \alpha \in [a, b] \quad (1-2-20)$$

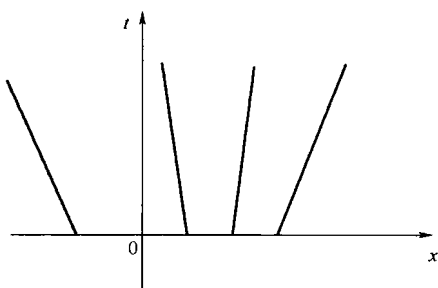


图 1-2-2 疏散波特征线图

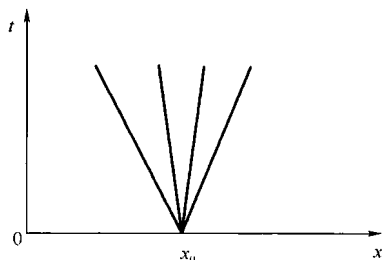


图 1-2-3 中心疏散波特征线图

其中 $h_0(\alpha)$ 在 $[a, b]$ 上满足 $h'_0(\alpha) > 0$, 而在每一特征线上仍有 $h=h_0(\alpha)$ 。于是此时解可写为

$$h = \frac{x - x_0}{t} \quad (1-2-21)$$

的形式。点 $(x_0, 0)$ 为此解的一个多值性奇点, 沿不同斜率的直线(特征线)趋于此点时, 解有不同的极限值。但在 $t > 0$ 的范围内, 式(1-2-21)仍是一个连续可微解。这是从一点发出的疏散波, 称为中心疏散波。这是从一点迅速疏散开来的情形。

另一种相对应的情形是初始条件满足

$$h'_0(x) \leq 0 \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (1-2-22)$$

即初始时, 高个子在后, 矮个子在前, 则此时特征线族式(1-2-17)会聚。因此, 人群将变得愈来愈密集, 最终要出现追赶上的现象(图 1-2-4), 相应的波称为压缩波。初始的波形 $h_0(x)$ 即使比较平坦, 也将变得愈来愈陡峭。此时, 在 $t=0$ 附近的局部范围内仍可有连续的人头曲线或解 $h=h(t, x)$, 但最终要发生解的破裂。最早产生追赶上的时刻及地点可由特征线族式(1-2-17)的包络线上 t 值最小的点 (t^*, x^*) 得出, 即从

$$\begin{cases} x = h_0(\alpha)t + \alpha \\ h'_0(\alpha)t + 1 = 0 \end{cases} \quad (1-2-23)$$

中消去 α 得到包络线的方程后, 求使 t 值最小的点而得到。

一般的情况是二者的复合。在 $h_0(x)$ 上升的段对应于疏散波, 而 $h_0(x)$ 下降的段对应于压缩波(图 1-2-5)。在压缩波段内将出现追赶上的现象。

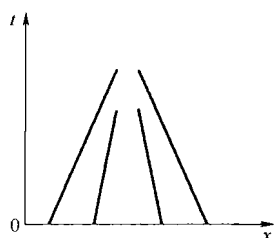


图1-2-4 压缩波特征线图

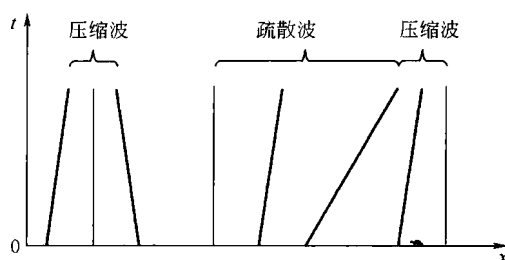


图1-2-5 复合波特征线图

还可以考虑更加复杂的情况，即步行速度 v 不一定正比于身高 h ，而只是 h 的某一单调增加的函数 $v=v(h)$ 的情况，其中 $v'(h)>0$ 。这时可将式(1-2-14)化为

$$\frac{\partial h}{\partial t} + v(h) \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (1-2-24)$$

并可得到类似的结论。

通过上面追赶问题的模型，可以看到非线性波的一些特点。一般来说，非线性波在传播过程中，不仅和线性波一样可能改变波形，而且会发生波的破裂现象，即连续的波动只能维持一段时间，以后就必须考察可能具有不连续性的波动。为了更具体地描述具有不连续性的波动，下面转入讨论交通流问题。

2. 交通模型

1) 连续流模型

以在高速公路上行驶的交通车辆的流动问题作为模型进行讨论。设以 x 轴表示此公路， x 轴正方向表示车辆前进的方向，这里要研究何时可能发生交通阻塞以及如何避免交通阻塞的问题。

采用一个连续的模型，设 $u(t, x)$ 为 t 时刻交通车辆按 x 方向分布的密度，即设在 t 时刻，在 $[x, x+dx]$ 中的车辆数为 $u(t, x)dx$ 。再设 $q(t, x)$ 为车辆通过 x 点的流通率，则在时段 $[t, t+dt]$ 中，通过点 x 的车辆流量为 $q(t, x)dt$ 。

利用车辆数守恒得到，时段 $[t, t+dt]$ 中在区间 $[x, x+dx]$ 内车辆数的增量应等于时段 $[t, t+dt]$ 中通过点 x 的车辆流量减去时段 $[t, t+dt]$ 中通过点 $x+dx$ 的车辆流量，即

$$u(t+dt, x)dx - u(t, x)dx = q(t, x)dt - q(t, x+dx)dt \quad (1-2-25)$$

假设有关函数连续可微，由此可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial q}{\partial x}(t, x) = 0 \quad (1-2-26)$$

为了预报车辆密度 $u(t, x)$ 的变化规律，必须知道 $q(t, x)$ 的情况，而为了决定 $q(t, x)$ ，还必须利用车辆流的特点。注意到上面推导方程(1-2-26)的过程，也可适用于其他的一维流动，如在河流中污染物的浓度分布和流动，热量在一细长杆中的流动(其中 u 为温度)，或在一导线中电子的浓度和流动等。对于每一不同的流动， $q(t, x)$ 的具体意义有所不同。例如在热传导问题中，常取热流量 $q = -k \frac{\partial u}{\partial x}$ (Fourier 实验定律)，就可由式(1-2-26)得到热传导方程，在扩散问题中也有类似结果。通过考察交通车辆的特性得出 q 依赖于 u 的具体形式，称之为结构方程。可以通过一些观测的资料来给出结构方程的具体形式，例如， q 与 u 的关系如图1-2-6所示。

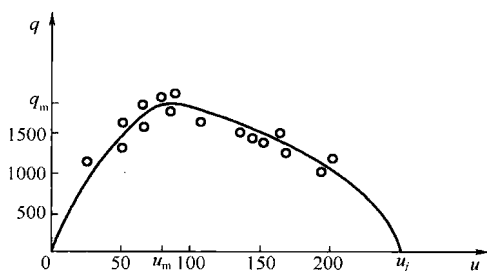


图 1-2-6 车辆流通率与车辆密度关系图

图 1-2-6 是根据美国某公路上的车辆情况统计而得的曲线, 其中 u 的单位为辆/mile^①, q 的单位为辆/h。从图 1-2-6 可以看出:

(1) 在 u 值较小时, 随着 u 值的增加, 流通率 q 也增加, 这是因为车辆流量随着车辆数增加而增加;

(2) 在 u 值较大时, 随着 u 值的增加, 流通率 q 减小, 这是因为车辆数太多时, 反而影响了流量。

具体为, 在 $u \approx 75$ 辆/mile 时, 可达到最大流通率 1800 辆/h, 而在 $u = u_j \approx 250$ 辆/mile 时, $q = 0$, 即出现交通阻塞(车辆无法流通)。

根据上述资料, 可用不同的方式给出 $q = q(u)$ 的函数表达式, 使能匹配上述资料。Greenshield 模型为一种比较简单的函数表达式, 取

$$q = a_f u (1 - u/u_j) \quad (u \leq u_j) \quad (1-2-27)$$

式中 a_f ——汽车的自由速度, 即在整个公路上只有一辆汽车时的速度(最大速度), mile/h;

u_j ——出现交通阻塞时的车辆密度, 辆/mile。

这实际上是近似地用抛物线来拟合这一曲线, 在 $u=0$ 或 $u=u_j$ 时, $q=0$, 而在 $u_m = u_j/2$ 时达最大值 q_m , 于是有

$$q_m = \frac{1}{2} a_f u_m \quad (1-2-28)$$

这样, 得到结构方程为

$$q = q(u) = -au(u-b) \quad (1-2-29)$$

其中 $a = a_f/u_j$, $b = u_j$ 。再由式(1-2-26), 可知 u 满足的方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q(u)}{\partial x} = 0 \quad (1-2-30)$$

或

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (c - eu) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1-2-31)$$

其中 $c = a_f$, $e = 2a_f/u_j$ 。

于是, 作一个未知函数的变换

$$h = c - eu \quad (1-2-32)$$

方程(1-2-31)就化为追赶问题中已考察过的方程(1-2-14), 而相应的初始条件为

$$t = 0, h = h_0(x) = c - eu_0(x) \quad (0 \leq u_0(x) \leq u_j) \quad (1-2-33)$$

根据这一模型, 类似于追赶问题中的讨论可得到如下结论:

(1) 沿任一特征线(由求解 $dx/dt = h = c - eu$ 而决定), h 为常数值, 因此 u 为常值, 特征线为直线。注意这里 u 为常数值, 并不意味着代表同一辆汽车, 而是指同一车辆密度。

(2) 当 $u'_0(x) \leq 0$, 即前面的车辆密度小于后面的车辆密度, 有 $h'_0(x) \geq 0$, 因而特征线族是发散的, 在 $t \geq 0$ 上不会自身相交。因此柯西问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q(u)}{\partial x} = 0 \\ t = 0, u = u_0(x) \quad (0 \leq u_0(x) \leq u_j) \end{cases} \quad (1-2-34)$$

① 1mile = 1.609km

在 $t \geq 0$ 上存在连续可微解, 这对应于疏散波。类似地, 可以有中心疏散波。

(3) 当 $u'_0(x) \geq 0$, 即前面的车辆密度大于后面的车辆密度, 这时 $h'_0(x) \leq 0$, 因而特征线族是会聚的, 这对应于压缩波。此时特征线经过一定时间后将自身相交, 在相交处 u 值不能单值地决定。在特征线族的包络线上对应于 t 值最小的点所给出的时间以后, 不能再得到连续可微解。

(4) 一般的情形, 可以是上述两者的组合, 即疏散波段和压缩波段的组合, 而在压缩波段内将出现不连续性。

(5) 由于沿特征线 $u = \text{常数}$, 且只要初值满足 $0 \leq u_0(x) < u_j$ (初始时刻不出现交通堵塞), 则在以后车辆流动保持为连续的范围内恒成立 $0 \leq u_0(x) < u_j$, 即不会出现交通堵塞。

显然在 u 连续可微的范围内, 可以使用上述偏微分方程(1-2-30), 但在出现不连续的地方, 设不连续线为 $x = x(t)$ (它通过特征线包络上 t 值最小的点, 但不是包络线本身), 上述微分的形式不能采用, 而必须采用另外的形式。

2) 不连续流模型——激波

假设解为连续可微, 前面已得到了相应的连续模型式(1-2-30), 但同时也说明了考察不连续模型的必要性。下面, 假设解不具有足够光滑性, 讨论相应的模型推导, 其基础仍是车辆数守恒。但此时不能采用微分的形式, 而只能采用积分的形式, 由此不仅可以在连续可微的范围内重新推得式(1-2-30), 而且可以推出解在其间断线 $x = x(t)$ 上应满足的条件。

为此, 任取一时段 $[t_1, t_2]$ 及一区间段 $[x_1, x_2]$ 进行考虑。在时段 $[t_1, t_2]$ 中在 $[x_1, x_2]$ 上车辆数的增加量应等于在时段 $[t_1, t_2]$ 中经过 $x = x_1$ 处的流量减去经过 $x = x_2$ 处的流量。于是

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} u(t_2, x) dx - \int_{x_1}^{x_2} u(t_1, x) dx \\ &= \int_{t_1}^{t_2} q(t, x_1) dt - \int_{t_1}^{t_2} q(t, x_2) dt \end{aligned} \quad (1-2-35)$$

如果 u 和 q 不光滑, 甚至不连续(分块连续及分块光滑), 式(1-2-35)仍是有意义的, 该式为车辆数守恒的积分形式。

式(1-2-35)表明(图 1-2-7), 在 (t, x) 平面上的任一矩形环路 Γ 上, 成立

$$\oint_{\Gamma} u dx - q dt = 0 \quad (1-2-36)$$

从而对 (t, x) 平面上任一在 $t \geq 0$ 上的分段光滑的闭环路 Γ (图 1-2-8), 式(1-2-36)仍成立。

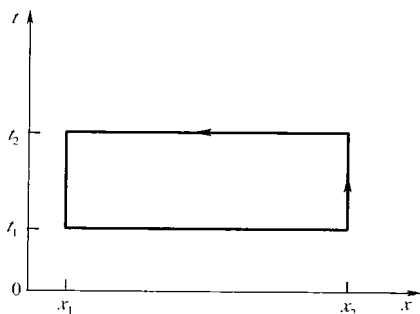


图 1-2-7 矩形环路 Γ 示意图

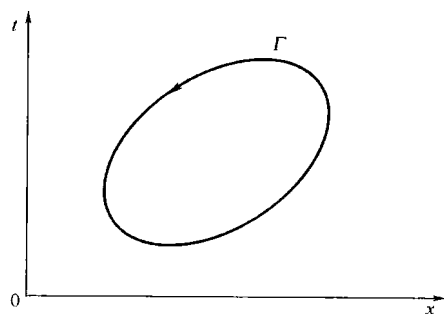


图 1-2-8 光滑闭环路 Γ 示意图

因此,可推出车辆数守恒的积分形式为

$$\oint_{\Gamma} u dx - q(u) dt = 0 \quad (1-2-37)$$

式中 Γ —— (t, x) 平面上任一在 $t \geq 0$ 上的分段光滑闭环路。

在连续可微的流场中,利用格林公式,由式(1-2-37)易得

$$\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q(u)}{\partial x} \right) dx dt = 0 \quad (1-2-38)$$

式中 D ——此流场中任一分段光滑闭环路 Γ 所包含的区域。

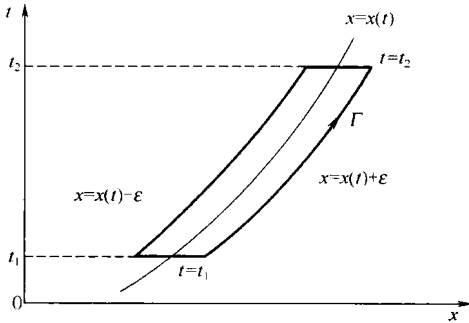


图 1-2-9 闭环路 Γ 示意图

因此,利用 D 的任意性,可得到式(1-2-30),即车辆数守恒的微分形式,它只在连续可微的流场中适用。

若解 $u(t, x)$ 在 (t, x) 平面上出现间断,则在解的间断线 $x = x(t)$ 的两侧,解应具有不同的数值。设解具有第一类间断,并记在 $x = x(t)$ 两侧的解值分别为 u_- 和 u_+ 。为了推出在 $x = x(t)$ 上应满足的关系式,在此间断线 $x = x(t)$ 附近取如图 1-2-9 所示的闭环路 Γ ,并将式(1-2-37)应用于此环路。在式(1-2-37)中先令 $\epsilon \rightarrow 0$,再令 $t_2 - t_1 \rightarrow 0$,

就可得到在 $x = x(t)$ 上应成立如下的条件。

$$[u] dx - [q(u)] dt = 0 \quad (1-2-39)$$

$$[u] = u_+ - u_-; [q(u)] = q(u_+) - q(u_-) \quad (1-2-40)$$

此条件称为间断连接条件或称为 Rankine - Hugoniot 条件。

式(1-2-39)又可写为

$$\frac{dx}{dt} = \frac{[q(u)]}{[u]} = \frac{q(u_+) - q(u_-)}{u_+ - u_-} \quad (1-2-41)$$

式(1-2-41)可用来决定间断线的斜率。

对于 Greenshield 模型: $q(u) = -au(u-b)$, 式(1-2-41)可化为

$$\frac{dx}{dt} = -a \left(u_+ - \frac{b}{2} \right) - a \left(u_- - \frac{b}{2} \right) = \frac{1}{2} [q'(u_+) + q'(u_-)] \quad (1-2-42)$$

因为 $q'(u_+)$ 及 $q'(u_-)$ 恰为两侧特征线的斜率,所以式(1-2-42)表示间断线 $x = x(t)$ 的斜率恰等于两侧特征线斜率的平均值。在一般 $q(u)$ 为 u 的凸(凹)函数时,间断线斜率也总是在两侧特征线的斜率之间。

由式(1-2-42)可知,间断线及左、右两侧特征线分布有两种可能性:

- (1) $q'(u_+) < dx/dt < q'(u_-)$, 如图 1-2-10 所示;
- (2) $q'(u_-) < dx/dt < q'(u_+)$, 如图 1-2-11 所示。

从追赶问题的讨论中可知,间断的产生是由于特征线自身相交造成的,因此只有第一种可能性才有现实意义,这相应于压缩现象导致间断的这一事实。第二种可能性对应于疏散的情形,这时不应出现间断,因而不是现实上有意义的间断。因此,在间断线 $x = x(t)$ 上除了要求间断连接条件式(1-2-39)成立外,还须满足