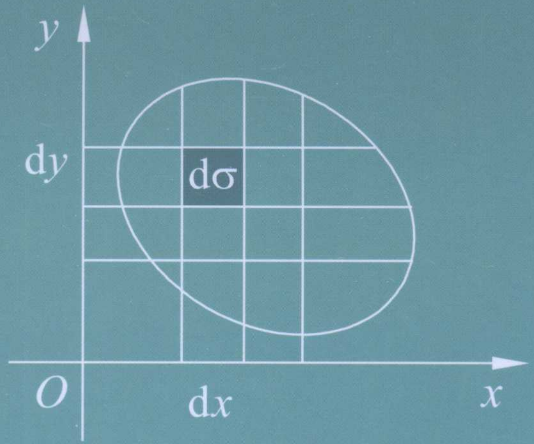
全国高职高专教育“十一五”规划教材

高等数学

（下册）

主　编　赵建玲　刘志刚
副主编　邓超公　赵燕冰



- 以应用为目的，以必需够用为度
- 注重思路引导，强调基础知识掌握
- 注重能力培养，弱化理论证明和复杂计算
- 理论联系实际，贯彻由浅入深的教学原则，精选例题及习题
- 模块化教学，为不同专业或专业方向提供了更大的选择空间

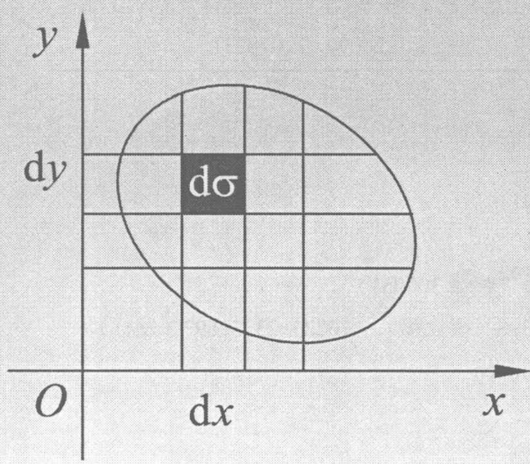
天津科学技术出版社

全国高职高专教育“十一五”规划教材

高等数学

（下册）

主　编　赵建玲　刘志刚
副主编　邓超公　赵燕冰



天津科学技术出版社

内 容 提 要

本书以教育部《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》（教高[2006] 16号）和最新颁布的《高职高专教育数学课程教学基本要求》为指导，从高职高专人才培养目标出发，在认真总结、分析、汲取部分高职高专院校高等数学课程教学改革经验的基础上编写而成。本书遵循“以应用为目的、以必需够用为度”的原则，合理编排教学内容，适当降低难度，注重理论联系实际和实践能力的培养，突出内容的实用性和课时安排的灵活性。本书将教材与辅导融为一体，每节精心配置了例题、习题，以便学生巩固所学知识；每章末配有“本章小结”，便于学生滚动复习；书末附有数学用表和习题答案，供课堂教学和学生学习参考。

全书分为上、下两册，共十三章。本书为下册，共五章，内容包括空间解析几何简介、多元函数微积分、无穷级数、线性代数、概率论基础。

本书主要作为高职高专院校工科类各专业高等数学课程的教学用书，也可作为成人高等学校各专业高等数学课程的教学用书，还可作为学生“专接本”和各类考试的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下/赵建玲等主编. —天津：天津科学技术出版社，2009.5

ISBN 978-7-5308-4970-5

Ⅰ.高… Ⅱ.赵… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 078231 号

责任编辑:杨庆华

责任印制:王 莹

天津科学技术出版社出版

出版人:胡振泰

天津市西康路 35 号 邮编 300051

电话（022）23332398（事业部） （022）23332697（发行）

网址:www.tjkjcbs.com.cn

新华书店经销

北京奥隆印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 33.75 字数 864 000

2009 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

定价:52.00 元（共两册）

编 委 会

《全国高职高专教育“十一五”规划教材》

前　言

高等数学作为高职高专院校工科类专业重要的一门基础课、工具课，它对培养和提高学生的思维能力，使学生形成正确的世界观、价值观具有重要的作用。长期以来，高职高专院校一直使用本科教材或本科院校编写的教材，教学一线教师深感现有教材不能很好满足高职高专课堂教学需要，一方面理论难度大，不符合高职高专院校学生基础和认知水平，教学内容深度和广度很难把握；另一方面内容安排不符合教学实际需要，教师在教学中需要进行大量的删减和整合，不仅不利于学生课后自学，而且还会影响教学质量和实践能力的培养。为此，我们在认真总结、分析、汲取部分高职高专院校高等数学课程教学改革经验的基础上，通过所有参编者的集思广益和通力合作，才形成和编写出这套适合高职高专院校使用的高等数学教材。

本教材从高职高专院校的人才培养目标出发，遵循“以应用为目的，以必需够用为度”的原则，以素质教育和创新能力的培养为导向，从高职高专学生基础出发，本着教师既好教学生又好学的基本要求，充分体现“理论联系实际，深化基本概念，淡化理论证明，强化基本计算，注重能力培养，突出实用性，适合专业需要”的高等职业教育的特色，力求做到结构合理，内容先进，条理清晰，重点突出，难点分散，教学与辅导并用。

本教材内容安排合理，难度适宜，深入浅出，通俗易懂，富有启发性和针对性，有利于激发学生的学习兴趣和大面积提高教学质量。同时还具有以下五个方面的特色：

1、较好地解决了初等数学与高等数学的衔接，符合高职高专学生的基础和认知水平。

2、理论联系实际，从生产、生活实例引入概念，并应用数学知识分析、解决实际问题，加强了学生对数学知识应用意识和兴趣的培养，突出基础课为专业课服务的最终目的。

3、尽量保持数学自身的系统性与逻辑性，不过分追求理论上的严密性，尽可能体现直观性教学原则，降低不必要的抽象思维，有利于教学内容深度和广度的把握。

4、根据专业需要，便于模块教学，并可以根据开设时限进行弹性取舍，从而缓解了目前高等数学教学中存在的内容多与课时少的矛盾。

5、将高等数学内容和工程数学内容巧妙地融合在一起，不仅适合各种专业的需要，而且还适合不同开设时限的需要，既经济又实用。

本书由赵建玲、刘志刚担任主编，邓超公、赵燕冰担任副主编。

鉴于我们的研究能力、学术水平有限，书中难免有疏漏与错误之处，恳切期望同行、读者给予批评指正，以便进一步修改完善。

编　者

2009 年 8 月

目　录

第九章　空间解析几何简介

空间解析几何是平面解析几何的推广．通过引进空间直角坐标系，建立空间中的点和有序数组之间的对应关系，从而把空间图形（曲面与曲线）和代数方程有机地结合起来，这样就可以利用代数方法去研究几何问题．空间解析几何是多元函数微积分学的基础，又是自然科学和工程技术应用中一种最基本、最有力的数学工具．

第一节　空间直角坐标系与向量初步

一、空间直角坐标系

1．空间直角坐标系

平面直角坐标系的概念很容易推广到空间中，从而得到空间直角坐标系的概念．

在空间取定一点 O，过点 O 作三条具有相同的长度单位,且两两互相垂直的数轴 x 轴，y 轴和 z 轴，这样就称建立起了**空间直角坐标系** $O-xyz$．点 O 称为**坐标原点**，x 轴（横轴），y 轴（纵轴）和 z 轴（竖轴）统称为**坐标轴**．坐标轴的正向可按如下法则确定：用右手握住 z 轴，当四指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，称为右手法则（图 9.1）．

坐标轴两两确定的三个平面即 xOy 面，yOz 面和 zOx 面称为**坐标面**，它们两两互相垂直，且将空间分为八个部分，每一部分称为一个**卦限**，依次称为第 I，II，III，IV，V，VI，VII，VIII 卦限．如图 9.2．

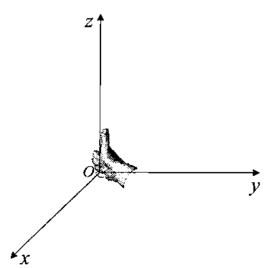


图 9.1

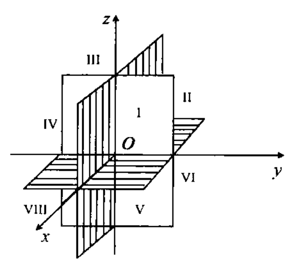


图 9.2

2. 空间点与有序数组的对应

对于空间任意一点 M，过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴，y 轴和 z 轴，三个平面与坐标轴的交点分别为 P,Q,R（如图 9.3），点 P,Q,R 叫做点 M 在坐标轴上的投影．设点 P,Q,R 在三条坐标轴上的坐标分别为 x,y 和 z，于是空间一点 M 就唯一地确定了一个**有序数组** (x,y,z)．

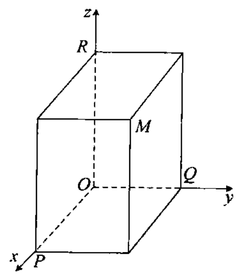


图 9.3

反之，已知一个有序数组 (x,y,z)，在 x 轴上取坐标为 x 的点 P，在 y 轴上取坐标为 y 的点 Q，在 z 轴上取坐标为 z 的点 R，然后通过点 P,Q,R 分别作与 x 轴，y 轴，z 轴垂直的平面，这三个平面必然相交于点 M.

这样，通过空间直角坐标系，就建立了空间点 M 与有序数组 (x,y,z) 之间的一一**对应关系**．有序数组 (x,y,z) 称为点 M 的**坐标**，记作 $M(x,y,z)$，x、y、z 分别称为点 M 的**横坐标**，**纵坐标**和**竖坐标**.

在每一卦限中，点的坐标的符号是确定的，参看图 9.2，八个卦限中坐标的符号依次为 I$(+,+,+)$，II$(-,+,+)$，III$(-,-,+)$，IV$(+,-,+)$，V$(+,+,-)$，VI$(-,+,-)$，VII$(-,-,-)$，VIII $(+,-,-)$．原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$；x 轴，y 轴，z 轴上点的坐标分别为 $(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$；三个坐标面 xOy 面，yOz 面，zOx 面上点的坐标分别为 $(x,y,0)$，$(0,y,z)$，$(x,0,z)$．

3. 空间两点间的距离公式

在空间直角坐标系中给定两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，求 M_1 与 M_2 两点之间的距离 $|M_1M_2|$.

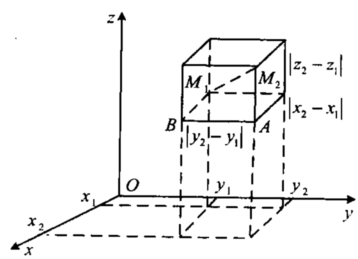


图 9.4

过 M_1 和 M_2 分别做平行于坐标面的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体（如图 9.4），这个长方体的三条棱长分别为 $|x_2-x_1|$，$|y_2-y_1|$，$|z_2-z_1|$．根据立体几何知识，长方体的对角线长的平方等于三条棱长的平方和，于是有

$$|M_1M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2,$$

所以 M_1 与 M_2 两点之间的距离为

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\,. \tag{9.1}$$

这就是空间两点间的距离公式.

例 1 求点 $M(x,y,z)$ 到 x 轴的距离.

解 设点 $M(x,y,z)$ 在 x 轴的投影为 P，则点 P 的坐标为 $(x,0,0)$，且线段 MP 的长就是点 $M(x,y,z)$ 到 x 轴的距离. 由两点间的距离公式，得

$$|MP|=\sqrt{(x-x)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}=\sqrt{y^2+z^2}\,.$$

例 2 求证以 $A(2,4,3)$，$B(4,3,1)$，$C(2,1,0)$ 为顶点的三角形是等腰三角形.

证明 由两点间的距离公式，得

$$|AB|=\sqrt{(4-2)^2+(3-4)^2+(1-3)^2}=3\,,$$

$$|BC|=\sqrt{(2-4)^2+(1-3)^2+(0-1)^2}=3\,,$$

因为 $|AB|=|BC|$，所以 ΔABC 为等腰三角形.

二、向量的基本概念及其运算

1. 向量的概念

在物理学、工程学等领域中，常会遇到两种不同类型的量. 一类是只有大小，没有方向的量，如长度、面积、体积、质量等，它们叫做数量或标量. 另一类量是不仅有大小，而且有方向，如速度、加速度、力等，它们叫做向量或矢量.

几何上，常用一条规定了起点和终点的有方向的线段，即有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向，有向线段的起点和终点又可分别叫做向量的起点和终点. 以点 A 为起点，点 B 为终点的向量记作 $\overline{AB}$. 向量也常用一个字母表示，为避免与数量混淆，印刷上常用粗体字表示，如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{F}$ 等；书写时，常在字母上方标上箭头来表示，如 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{i}$，$\vec{F}$ 等. 起点在原点 O、终点在点 M 的向量 $\overline{OM}$ 称为点 M 的向径，记作 $r(M)$.

由于向量是由大小与方向所确定的. 因此，只要两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的大小相等，方向相同，就称两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 相等，记作 $\vec{a}=\vec{b}$. 向量相等的概念，是在不考虑向量的起点在何处的前提下给出的，也就是说一个向量可以在空间任意的平行移动. 这种向量称为自由向量. 本书若无特别说明，讨论的都是自由向量.

向量的大小又称为向量的模，记作 $|\vec{a}|$. 模为 1 的向量叫做单位向量. 模为零的向量叫做零向

量，记作$\vec{O}$，规定零向量的方向可以是任意的．若两个向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的方向相同或相反，则称向量$\vec{a}$与$\vec{b}$平行，记作$\vec{a}//\vec{b}$．由于零向量的方向可以是任意的，因此可以认为零向量与任何向量都平行．由于平行的向量经平移后，能放置在同一条直线上，所以平行向量又称为共线向量．

下面给出两个向量夹角的概念．

设给定两个非零向量$\vec{a}$与$\vec{b}$．在空间任取一点A，作$\overline{AB}=\vec{a}$，$\overline{AC}=\vec{b}$，则$\angle BAC$ $(0\leqslant\angle BAC\leqslant\pi)$称为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角（如图 9.5），记作$(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})$．

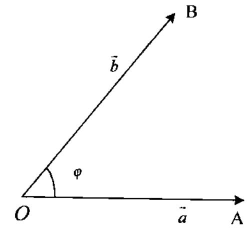


图 9.5

当$\vec{a}$与$\vec{b}$中有一个是零向量时，规定它们的夹角可以在$[0,\pi]$中任意取值．当$(a,\hat{\ }b)=\dfrac{\pi}{2}$时，就称向量$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，记作$\vec{a}\perp\vec{b}$．可以认为零向量与任何向量都垂直．

2. 向量的运算

与数量一样，向量也可以进行运算，下面分别介绍向量的加法、减法和乘法．

（1）向量的加法

引例 1 一物体从A点沿$\overline{AB}$位移到B点，再沿$\overline{BC}$位移到C点，其最终效果就是位移$\overline{AC}$，即有$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$（见图 9.6）．

已知两个向量$\vec{a}$和$\vec{b}$，规定向量的加法如下：

将向量$\vec{b}$平移，使其起点与$\vec{a}$的终点重合，则以$\vec{a}$的起点为起点，$\vec{b}$的终点为终点的向量$\vec{c}$就是$\vec{a}$与$\vec{b}$的和，记作 $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$．这种求向量和的方法叫向量加法的三角形法则，如图 9.7．

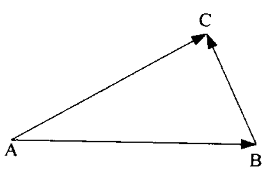


图 9.6

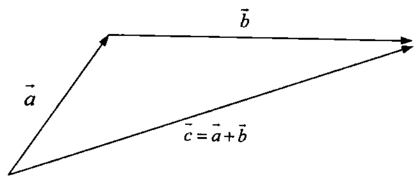


图 9.7

在中学学习物理时，两个不平行力的合力常用平行四边形法则来确定．由于向量是自由向量，所以向量的加法也可以用同样的方法规定．

设有两个不平行的非零向量$\vec{a}$、$\vec{b}$，平移$\vec{a}$和$\vec{b}$使它们的起点重合，以$\vec{a}$和$\vec{b}$为邻边作平行四

边形，则以$\vec{a}$和$\vec{b}$的起点为起点的对角线向量$\vec{c}$就是$\vec{a}+\vec{b}$（见图 9.8）．这种求向量和的方法叫向量加法的平行四边形法则.

（2）向量的减法

负向量：与向量$\vec{a}$的模相等而方向相反的向量叫做$\vec{a}$的负向量，记作$-\vec{a}$.

我们规定，$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$，特别地$\vec{a}-\vec{a}=0$.

向量的减法也可以按照三角形法则进行，将$\vec{a}$与$\vec{b}$的起点重合，则$\vec{a}-\vec{b}$就是以$\vec{b}$的终点为起点，以$\vec{a}$的终点为终点的向量.（图 9.9）.

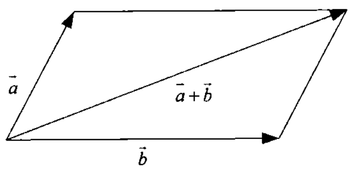


图 9.8

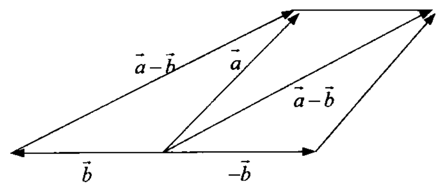


图 9.9

（3）数与向量的乘法

实数λ与向量$\vec{a}$的乘积仍是一个向量，记作$\lambda\vec{a}$，并规定：

（1）它的模是向量$\vec{a}$的模的$|\lambda|$倍，即$|\lambda\vec{a}|=|\lambda||\vec{a}|$；

（2）它的方向与λ的符号有关：

当$\lambda>0$时，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$的方向相同；当$\lambda<0$，$\lambda\vec{a}$与$\vec{a}$的方向相反；当$\lambda=0$，$\lambda\vec{a}$是零向量.

由上面的讨论，我们有如下重要结论：

（1）$1\vec{a}=\vec{a}$；$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$；

（2）已知非零向量$\vec{a}$和它的同方向单位向量$\overrightarrow{a^0}$，则有$\vec{a}=|\vec{a}|\overrightarrow{a^0}$，也即$\overrightarrow{a^0}=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$；

（3）由于$\vec{a}$与$\lambda\vec{a}$不是同方向就是反方向，因此$\vec{a}$与$\lambda\vec{a}$平行，即为共线向量.

共线向量与数乘向量有如下关系：

定理 1　向量$\vec{b}$与非零向量$\vec{a}$平行的充分必要条件是存在唯一实数λ，使$\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

向量的加法和数与向量的乘法满足以下运算律：

（1）交换律　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$；

（2）结合律　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$，

$$\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a} \quad (\lambda,\mu \text{ 为实数});$$

（3）分配律　$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$，$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$（$\lambda,\mu$ 为实数）.

例 3 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线向量为 $\overline{AC}=\vec{a}$，$\overline{DB}=\vec{b}$，试用 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 表示向量 $\overline{AB}$ 和 $\overline{AD}$.

解　设 $\overline{AC}$ 与 $\overline{DB}$ 的交点为 O（如图 9.10）. 由于平行四边形对角线互相平分，故

$$\overline{AO}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\vec{a},\overline{DO}=\overline{OB}=\frac{1}{2}\overline{DB}=\frac{1}{2}\vec{b}$$

根据三角形法则，有

$$\overline{AB}=\overline{AO}+\overline{OB}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),\overline{AD}=\overline{AO}+\overline{OD}=\overline{AO}-\overline{DO}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$$

（4）向量的数量积

引例 2　设一物体在常力 $\overline{F}$ 作用下沿直线从点 A 移动到点 B，以 $\overline{S}$ 表示位移 $\overline{AB}$，如图 9.11 由物理学知识可知，力 $\overline{F}$ 所做的功为

$$W=|\overline{F}||\overline{S}|\cos\theta \quad（\theta \text{ 为 } \overline{F} \text{ 与 } \overline{S} \text{ 的夹角}）.$$

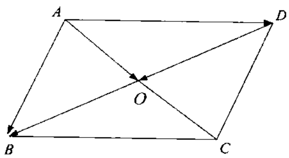


图 9.10

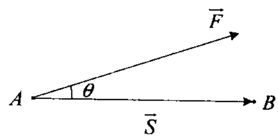


图 9.11

上式的右边可以看成是两个向量进行某种运算的结果，这种运算就是两个向量的数量积.

定义 1　**设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 是两个向量，称它们的模与夹角的余弦的乘积为向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的数量积**（**或内积**），**记作 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，又称点积，即**

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}). \tag{9.2}$$

可见：（1）两个向量的数量积是一个数，是标量；

（2）$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}||\vec{a}|\cos 0=|\vec{a}|^2$，于是有 $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$；

（3）力 $\overline{F}$ 所做的功为 $W=\overline{F}\cdot\overline{S}$.

向量的数量积具有下列运算律：

（1）交换律　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；

（2）结合律　$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$　（λ 为常数）；