科學圖書大庫

彈性體力學原理

譯者 張善仿

徐氏基金會出版

科學圖書大庫

彈性體力學原理

譯 序

這本彈性體力學原理的編撰，十分簡要。著者於序言中，再三說明：這本書是引導課程，教授基礎知識，而將過去"材料力學"中的資料堆雜，基礎觀念支離破碎等缺點，一掃而空．事實上，大學二年級學生是剛踏進專門學科的領域，最需要引導性的基礎知識，以後還有漫長歲月，還有許多工程課程必須學習．如果對大二學生將結構學，機械原理，機械設計，工程材料，以及材料試驗等中的資料，盡量搜集納入這門課程之中，並用一二度空間的觀念解析問題，確有堆棧、雜燴、支離破碎之嫌．這點未經點穿迷津之前，還可以沾沾自詡資料豐富，解法簡單．現在著者已清晰闡明一種新觀念，我們如能冷靜的想想，稍作比較，就會覺得大有道理，而贊成換用這本書作大專二年級的教科書．

四五年前採用這本書，實不無顧慮．那時高中及大學一年級的數學課程，是平面幾何，平面三角，大代數，平面解析幾何，微積分的內容百分之九十以上是平面的東西；理化教科書中也很少三度空間的教材．如果冒然改用這本書教學必定遭遇基本觀念與數學方面困難．然而，現在却已毫無這種障碍．因為高中的新數學，已將很強的空間觀念，注入學生的腦海中，並已教授向量及矩陣，微積分中也增加許多三度空間的問題，只要在這四年中，學習數學能達到中等水準，就足夠學習本書需要了．所以，譯者誠懇建議改用本書作大專教本；有志於工程學術的自修人士，也應該精讀這本書．

本書內的習題分量甚大，學習時，除熟諳課文外，應多作習題．這是大家皆知，已毋庸贅述．

本書名詞採用教育部公佈機械工程名詞翻譯．算式中的單位，多為英文縮寫，或代表符號，如 μin/in等，如翻譯成中文，甚為累贅，甚至有碍運算，故未翻譯．書中錯訛之處，請賜指教．

原 序

工程與工藝需要加強基本觀念與原理，而非解答特殊問題的引導課程，已是時代要求，無庸贅述．本書就是以這種精神編撰的．過去，研討彈性固體對力系反應的引導課程，稱爲“材料力學”．“材料力學”中論述的題材，通常限於一度與二度空間的解析．然因實際問題十分複雜，如此簡化的解析，僅能產生簡單的有用結果．但是在這些解析中，很難捉摸到基本觀念與原理，而在必須學習彈性理論中的精確觀念與原理時，材料力學中的某些過分簡化的定義，或者障碍多於幫助．筆者相信，（許多其他力學教師也一樣），改進學生們的數學準備，就可在彈性體力學的引導課程中，介紹精確的應力和應變的觀念，及彈性的基本定律．

在本書內，假定學生們已熟習向量運算．第1章介紹應力張量的觀念與它的基本運算．應變張量與彈性靜力學的一些定律，分別在第2章及第3章中敍述．在前三章的全部理論演進中，處處加強張量的各觀念，並且普遍使用矩陣記法．對矩陣運算不熟習的學生，在開始學習第1章前，應先研讀本書附錄：矩陣．矩陣記法比指標記法優良，筆者覺得它可幫助初學者，掌握代表物理量的元集合觀念．下三章中，用反求法求得純張力，扭力，及純彎曲等問題的正確解答．重要工程問題的解析法，都有列舉，並附有解答．最後一章論及柱的不穩定性．前面已說明，本書強調基本的觀念與原理，並未意圖概括普通“材料力學”內的全部工程方法與細節．這些應留給以後的特別課程，以及某範圍的學生選修．本著作中包含的材料，實可視爲理工科學生們的基礎知識。

本教材已採用於蘭塞拉爾工藝學院二年級兩學期4小時的課程中．在這一年的課程中，包含靜力學，彈性體力學原理及動力學，並按此順序授課．如在靜力學與動力學課程修習之後，力學教師採用本書作一學期三小時課程的教本，也不會發覺有任何困難．

筆者惠蒙本校同仁福斯、凌及賽都斯凱諸教授，及美國天主教會大學的奧司哥教授，給與提示與批評，特致謝忱．也感謝杜西小姐於準備原稿時，給與很多幫助．

賴偉

賽白爾

目　録

第二章　應變

第三章　彈性靜力方程式

第四章　單純伸長

第五章 扭力

第六章 梁

第七章 柱

導　言

在靜力學中引入剛體觀念．所謂剛體，是物體內任意兩點間的距離，不因受力作用而改變．當然，剛體僅是一個觀念，因爲一切眞實的物體，受力作用時都有變形．然而，剛體觀念提供出極有用的模型，可用以解析許多有關眞實物體平衡與加速運動的實際問題．顯然，剛體力學不能供給任何涉及物體變形的知識．這類知識十分重要．因爲它不僅是構件或機件中的控制因素，而且與物體內部的力分佈有直接關係．這類知識發展的成果，都歸屬於科學一枝的變形體力學．誠然，實際物體對力作用的反應，十分複雜．然而，許多有用的結果，可用簡化的模型求得．實際觀測全部結構材料，都具有某程度的彈性，此即，使結構發生變形的外力，如不超過某限界，除去作用力，變形隨之消失．所以，順理成章地引入完全彈性體的觀念，即除去作用力後，物體完全恢復原形．本書內就是研討這類物體．

第一章　應　力

1.1 在平面上一點的應力向量

令圖 1.1 代表一通常的物體，P 爲其中的一點．S 爲通過 P 點的一平面，並將這個物體分爲Ⅰ與Ⅱ兩部分．設部分Ⅰ爲**分離體**（free body），ΔF 爲作用在小面積 ΔA 上的合力†，並且，ΔA 在 S 平面上，包含着 P 點．今定義在 S 面 P 點處的應力向量（由Ⅱ作用至Ⅰ），爲 $\Delta A\to 0$ 時，$\Delta F/\Delta A$ 比的極限值，用 σ_S 表示．則

$$\sigma_S=\lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta A},\quad \Delta A\ 在\ S\ 上 \tag{1.1}$$

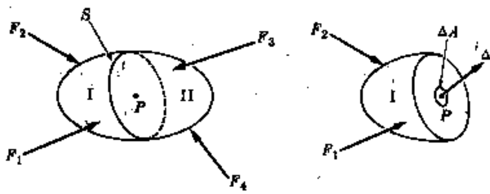

圖 1.1

如將部分Ⅱ視爲分離體，然由牛頓的作用與反作用定理，可得在同一面同一點的應力向量（由Ⅰ作用到Ⅱ），與（1.1）式所示者，大小相

---

† 僅一單純合力（無合力偶）作用在微小面積△A上的假設，導出的彈性理論，能滿足工程需要。

等，方向相反．

今應特別指明，應力向量隨 S 面的不同傾斜而變．所以，如僅說一點的應力向量，而不示明它的作用面，則無意義．但是，下面的研析中證明：一點的應力向量，如在任何三個相互垂直面上為已知，則在其他面上的應力向量，可隨之而定．這樣，表示在該點的任何三個應力向量，稱為“在一點的**應力狀態**”

1.2 在一點的應力矩陣

設經過 P 點，有三個平面 S_x, S_y 及 S_z，對應垂直於直交坐標的 x-, y-, 及 z- 軸．每一平面都可將物體分割成兩部分 I 與 II．(參看圖 1.2)。部分 I 在 P 點的向外法線，是朝向一坐標軸的正方向；部分 II 者則朝

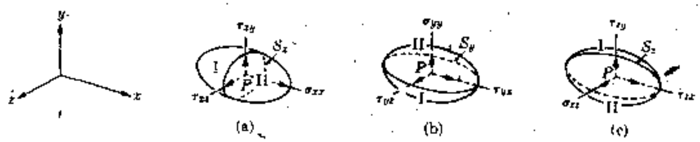

圖 1.2

向對應的負方向．在 P 點作用於 S_x, S_y 及 S_z 面上的應力向量，可分解為三個沿坐標軸的分力．用單列矩陣表示，則得

$$
\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{S_x} &= (\sigma_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{xz}),\\
\bar{\sigma}_{S_y} &= (\tau_{yx}, \sigma_{yy}, \tau_{yz}),\\
\bar{\sigma}_{S_z} &= (\tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_{zz}).
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

今後用下述符號規定：無論何時，向外法線朝向一坐標軸的正方向，應力向量的三個分量也是朝向坐標軸的正方向，則定為正值．由上(1.1)節述及的牛頓第三定理可知，向外的法線朝向一坐標軸的負方向，應力向量的三個分量如果也是朝向坐標軸的負方向，仍應定為正值．圖 1.2 (a)(b)與(c)所示各分力，如是作用在部分 I 上的力，則均

爲正；如是作用在部分Ⅱ上的力，則均爲負。矩陣

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

稱爲在P點的**應力矩陣**。向右下方傾斜的對角線上各元（elements）稱爲**法線應力**，其他各元稱**剪應力**。正法線應力也稱爲**張應力**；負法線應力稱爲**壓應力**。

1.3 在一點的應力狀態

今證明在一點的應力狀態，可用在這點的應力矩陣表示，意謂一旦應力矩陣已知，即可決定通過這點的任何傾斜面上的應力向量。

設自物體中分離出一個小四面體，P爲它的一頂點（圖1.3）。四面體的大小極近於零時，傾斜面則通過P點爲極限。而PAB的面積用ΔA_x表示，它的向外法線是朝向 x- 軸的負方向。其他二面PBC與PAC的面積，對應用ΔA_y及ΔA_z表示。設傾斜面ABC的單位向

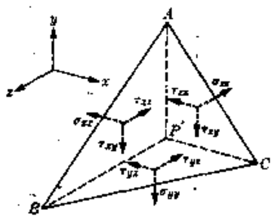

圖 1.3

外法線爲$N = (l, m, n)$，面積爲ΔA_N，應力向量爲$\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$。由牛頓第二定理得：

$$[a] \quad \sum F_x = -\sigma_{xx}\,\Delta A_x - \tau_{yx}\,\Delta A_y - \tau_{zx}\,\Delta A_z + \sigma_x\,\Delta A_N$$

$$= 質量 \times x\text{-} 加速度$$

因質量＝密度×體積，及四面體極近於零時，它的體積與三個微小邊長之積成比例，則〔a〕式右邊比左邊的各項，更快趨近於零．因此取極限時，可將加速度項自〔a〕中刪除．†

今證明面積 $\Delta A_x, \Delta A_y$ 及 ΔA_z 與傾斜面 ΔA_N 面積的關係式如下：

[b] $\Delta A_x = l\,\Delta A_N, \quad \Delta A_y = m\,\Delta A_N, \quad \Delta A_z = n\,\Delta A_N.$

用向量表示，參考圖 1.3 ，得：

[c] $\overrightarrow{BP} \times \overrightarrow{BA} = 2\Delta A_x\mathbf{i}, \ \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BP} = 2\Delta A_y\mathbf{j}, \ \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CP} = 2\Delta A_z\mathbf{k}.$

所以

[d] $\overrightarrow{BP} \times \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CP} = 2(\Delta A_x\mathbf{i} + \Delta A_y\mathbf{j} + \Delta A_z\mathbf{k})$

〔d〕式左邊各項等於下面的演算：

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP} \times (\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CP} &= \overrightarrow{BP} \times \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CP}\\ &= \overrightarrow{CA} \times (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{CP})\\ &= \overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB} = 2(\Delta A_N)\mathbf{N},\end{aligned}$$

而

$$\mathbf{N} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k},$$

所以

$$\Delta A_N(l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}) = \Delta A_x\mathbf{i} + \Delta A_y\mathbf{j} + \Delta A_z\mathbf{k}$$

由此式即可求得〔b〕的各式．而後由〔a〕與〔b〕得；

[e] $\sigma_x = \sigma_{xx}l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n.$

由其他二式可再求得二個等式，爲：

[f] $\sigma_y = \tau_{xy}l + \sigma_{yy}m + \tau_{zy}n,$

[g] $\sigma_z = \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + \sigma_{zz}n.$

[e], [f], 及 [g] 可寫成矩陣式：

$$(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) = (l, m, n)\begin{pmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}\end{pmatrix} \tag{1.4}$$

†同樣理由，四面體的重量無須包含在演算式中．

也可寫爲：

$$\sigma = N\bar{\sigma} \tag{1.5}$$

（1.4）或（1.5）式表示，已知應力矩陣 $\bar{\sigma}$，在任何單位向外法線爲 N 的斜面上，作用的應力向量 σ，即可用此二式求得，且僅有一解。

1.4 應力矩陣的對稱性

今證明，1.2 節所述應力矩陣，通常是**對稱矩陣**†，即

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

設自物體中分離一微小長方體，如圖 1.4 所示。求各力對一軸（通過中心點 A，且平行於 z- 軸）的力矩得：

$$\text{[a]} \quad \sum M_A = \tau_{xy}(\Delta y\,\Delta z)\left(\frac{\Delta x}{2}\right) + (\tau_{xy} + \Delta\tau_{xy})(\Delta y\,\Delta z)\left(\frac{\Delta x}{2}\right) - \tau_{yx}(\Delta x\,\Delta z)\left(\frac{\Delta y}{2}\right) - (\tau_{yx} + \Delta\tau_{yx})(\Delta x\,\Delta z)\left(\frac{\Delta y}{2}\right).$$

刪除上式中的高次微量，即得：

$$\text{[b]} \quad \sum M_A = (\tau_{xy} - \tau_{yx})\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z,$$

無論這個微小長方體是否靜平衡，$\sum M_A$ 均應爲零，因加速項比例於體積與長度平方之積。故與〔b〕式右邊各項相較，是高次微量。則

$$\text{[c]} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

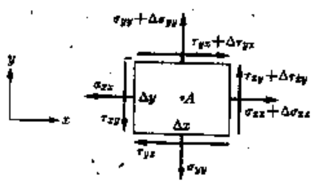

圖 1.4

† 應力矩陣不對稱的情形，可參看 1-12 題。

同理證明其他二式，而得：

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}. \tag{1.6}$$

例 1.1 一物體中某點關於 x-y- 及 z- 軸的應力狀態爲下列矩陣：

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 200 & 400 & 300 \\ 400 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & -100 \end{pmatrix} \text{psi}.$$

求平行於面 $x + 2y + 2z - 6 = 0$，且通過該點的斜面上，所作用的力向量。

解．(x_1, y_1, z_1)及(x_2, y_2, z_2)如爲平面上的任意二點，則

$$x_1 + 2y_1 + 2z_1 - 6 = 0, \quad x_2 + 2y_2 + 2z_2 - 6 = 0.$$

相減得，$(x_1 - x_2) + 2(y_1 - y_2) + 2(z_1 - z_2) = 0$；此即向量 $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$，垂直於平面上的每個向量 $(x_1 - x_2)\mathbf{i} + (y_1 - y_2)\mathbf{j} + (z_1 - z_2)\mathbf{k}$，因爲它們的無向量積爲零，故 $\mathbf{a}$ 是垂直於平面的向量；顯然 $-\mathbf{a}$ 也是一個、因 a 的長是 3，所以，在矩陣記法中，垂直於此面的單位向量是$\bar{N} = \pm(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ 由（1.5）式得

$$\bar{\sigma} = \bar{N}\bar{\sigma} = \pm(\tfrac{1}{3})(100)(1, 2, 2)\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \pm(\tfrac{100}{3})(16, 4, 1) = \pm(533, 133, 33.3) \text{ psi}$$

或

$$\sigma = \pm(533\mathbf{i} + 133\mathbf{j} + 33.3\mathbf{k}) \text{ psi}.$$

例 1.2 第 4 章中將證明，斷面積 A 的圓棒，承受通過兩端面形心，相等且相反的二力 P 時，在不太靠近兩端的各點，其應力狀態可用下列矩陣[†]表示：

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} P/A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{xyz}$$

† 矩陣右下角示所用坐標。

求作用在平面S（與x-軸成ϕ角）的應力向量σ．（參看圖1.5）．將σ分解成S面上的法線應力與剪應力，並證明最大法線應力是P/A，在$\phi=0$；最大剪應力是$\frac{1}{2}(P/A)$，在$\phi=45°$.

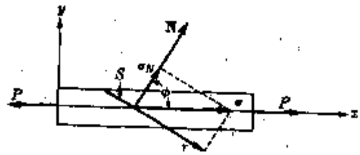

圖1.5

解．因

$$\bar{N}=(\cos\phi, m, n),\ 所以，\bar{\sigma}=\bar{N}\bar{\bar{\sigma}}=\left(\frac{P}{A}\cos\phi, 0, 0\right)$$

即 $\sigma=\frac{P}{A}\cos\phi\mathbf{i}$.

在S面上的垂直應力是

$$\sigma_N=\left(\frac{P}{A}\cos\phi\right)(\cos\phi)=\frac{P}{A}\cos^2\phi,$$

在S面上的剪應力是

$$\tau=\left(\frac{P}{A}\cos\phi\right)\sin\phi=\frac{1}{2}\frac{P}{A}\sin 2\phi$$

則

$$(\sigma_N)_{\max}=\frac{P}{A},\quad 在\ \phi=0,$$
$$\tau_{\max}=\frac{P}{2A},\quad 在\ \phi=45°.$$

例1-3　設在物體內的應力分佈狀態，爲下列矩陣

$$\bar{\bar{\sigma}}=\begin{pmatrix}-p+\rho gy & 0 & 0\\ 0 & -p+\rho gy & 0\\ 0 & 0 & -p+\rho gy\end{pmatrix}_{xyz},$$

其中p, ρ, 及g均爲常數．求在物體中一長方體的六個面上，應力向量分佈如何（圖1.6）？