硕士研究生入学考试大纲指导书系

数学大纲考查要求与全真模拟训练

（供1999年考生专用）

考研命题研究组 编

图书在版编目(CIP)数据

数学大纲考查要求与全真模拟训练/考研命题研究组编.
-北京:兵器工业出版社,1998.2
(硕士研究生入学考试大纲指导书系)
ISBN 7-80132-468-4

Ⅰ.数… Ⅱ.考… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-考试大纲②高等数学-研究生-入学考试-学习参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 05956 号

兵器工业出版社出版发行
(邮编:100081 北京市海淀区车道沟 10 号)
各地新华书店经销
北京奥隆印刷厂印装

开本:787×1092 1/16 印张:64.25 字数:1728 千字
1998 年 2 月第 1 版 1998 年 2 月第 1 次印刷
印数:1—10000 全套定价:120.00 元(共三册)

《硕士研究生入学考试大纲指导书系》编委会

总策划：北京高教企划工作室

《政治大纲考查要求与全真模拟训练》
钟爱军　胡志高　曾子熠

《英语大纲考查要求与全真模拟训练》
金淑媛　朱乐齐

《数学大纲考查要求与全真模拟训练》
王国鸿　项　飞　刘　文

编写说明

众所周知，硕士研究生入学考试大纲所列的考查要点规定了考试的考查内容，是考试命题和考试复习的依据和范围，被称为“薄”书。但是，在复习中仅仅依靠大纲所列的要点是远远不够的，还要将教材中的具体知识填充进去，将“薄”书看厚。

为此，考研命题研究组特别应考生复习所需，精心编写了一套继大纲后的又一“薄”书。本套书分政治、英语、数学三科。其显著特点在于：**严格按照考试大纲所列的考查要点，逐个进行精辟的分析，找出关键点，即重点、难点、热点，然后再进行详尽分析，辅之例题详解，突出解题思路、技巧指导和能力训练，同时编制大量全真模拟试卷，供考生自测。**相信此套“薄”书的出版，会给诸多考研朋友带来一定的帮助！

《政治大纲考查要求与全真模拟训练》

本书根据最新大纲精神，本着“精神新、内容全、讲解精、模拟真”的原则和“大纲考查目的→大纲考查要点分析→大纲考查重点分析→大纲考查热点分析→典型考题精解→复习思考练习题→综合全真模拟试题”的体例进行编写。详尽介绍大纲考查要求与内容要点，着重讲析重点热点问题，详细解答典型考题，突出解题思路与技巧，分章分节配置复习思考练习题，最后按照最新要求编制了10套标准化全套模拟试卷，供考生自测，让考生自己查漏补缺，培养应试技巧和能力。

《英语大纲考查要求与全真模拟训练》

本书依据最新大纲精神，每个考查知识点均按照“大纲考查要求→重点热点分析→典型考题详解→章节过关训练→综合模拟试卷”的体例编写，突出了系统性、针对性和实战性。讲解时，贯彻精解、精析、精练的原则，重点把语言基础知识和综合应用实际能力有机结合，将英语测试理论运用于解题实践，引入历年典型考题，详尽解析，总结出解题要决，并辅之大量全真模拟练习题，覆盖面全，命中率高，实战性强。

《数学大纲考查要求与全真模拟训练》

本书迎合考生系统复习考研数学的需要，完整地介绍了考研大纲所规定的内容、重点、题型和必备公式，解析近三年典型考题，使考生明确考试的要求和命题特点，通过大量精选例题的详细讲解，帮助考生系统地复习掌握所需知识，提高解题能力。选题覆盖面全，重点类型突出、准确，尤其针对考生“似懂非懂、似会非会”的薄弱环节，对症下药，加强标准化试题、综合性试题、应用试题和证明题等有关问题内容的解析训练，难易适度，适合实际考试要求。解析特别着重对基本概念、基本定理、基本公式和基本类型的准确理解、表述和应用，强调考生理清思路、把握脉络。书的最后有精心编制的10套全真模拟试题，让考生对复习效果进行自测检查、验收，巩固复习成果。

考研命题研究组

1998年4月

目　录

☆　☆　☆　☆　☆

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第三篇 概率论与数理统计

第四篇　模拟试题及参考答案

序　言

目前，硕士研究生入学考试日趋激烈，为了帮助广大读者在较短的时间内尽快把握考试大纲的精神，全面而有重点地复习好数学，我们特依据国家教委最新修订的硕士研究生入学考试数学考试大纲，编写了这本书。

本书紧扣**“帮助读者把教材读薄，把考试大纲读厚”**的指导思想，精心编写每一章，力求论述清楚、重点突出。每一章的编排体例一致，分〔**应试指南**〕、〔**大纲考查要求**〕、〔**重点热点分析**〕、〔**典型考题精解**〕四部分。

〔**应试指南**〕　位于每一章的开头，旨在指导读者为应付考试，应着重掌握的知识点和值得注意之处。

〔**大纲考查要求**〕　列出了考试大纲对数学一、数学二、数学三以及数学四的考试要求，让考生明确考试范围、内容等，复习时就会有的放矢，事半功倍。

〔**重点热点分析**〕　通过对近几年的考试试卷进行精辟的分析，总结出每一章的重点知识，再结合近年考试特点，归纳出重中之重，即热点，这些重点热点知识无疑是读者特别需要强化的地方，有利于提高应试能力。

〔**典型考题精解**〕　列出了本章在考试中的所有题型，通过分析来帮助读者掌握解题的规律和技巧。

本书迎合考生系统复习考研数学的需要，完整地介绍了考研大纲所规定的内容、重点、题型和必备公式，解析近三年典型考题，使考生明确考试的要求和命题特点，通过精选大量例题，帮助考生系统地复习掌握所需知识，提高解题能力。选题覆盖面全，重点类型突出、准确，尤其针对考生“似懂非懂、似会非会”的薄弱环节，对症下药，加强标准化试题、综合性试题、应用试题和证明题等有关问题内容的解析训练，难易适度，适合实际考试要求。解析特别着重对基本概念、基本定理、基本公式和基本类型的准确理解、表述和应用，强调考生理清思路、把握脉络。书中最后精心编制数套全真模拟试题，让考生对复习效果进行自测检查、验收，巩固复习成果。

本书是理工类与经济类的所有应试者的一本复习指导用书，同时也可作为其他各类学生的数学参考书。

由于编者水平有限，书中疏漏及不妥之处，恳请广大读者和同行赐教。

考研命题研究组

1998 年 4 月

复习指南及应试技巧

同学们，一年一度的研究生入学考试又将拉开战幕．数学作为研究生入学考试的基本课之一，每年都要占用同学们的大量复习时间．如何复习好数学，每个人都有自己的高招，但如果想在短时间内把数学复习好，以下几点请读者注意：

一、充分重视考试大纲

上大学时，每逢考试，最受同学欢迎的事就是老师划考试范围．但遗憾的是，许多同学在考研时，却忽视考试大纲的重要性．其实研究生入学考试的考试大纲实际上就是国家教委为考生所划的复习范围．比如考数学二的考生花了很多时间复习多元函数的微积分，而考数学四的考生却没有复习这章内容，都是有悖于考试大纲的．复习全面并不等于什么都复习，而是把应该复习的全部复习．另外，许多考生在复习时，追求做偏题难题，这同样不符合考试要求．数学尽管很深奥，但研究生入学考试只要求考生比较系统地理解数学的基础概念和基本理论，掌握数学的基本方法．在复习过程，特别容易使考生复习过深的章节主要有：微分中值定理、广义积分、微分方程及差分方程、向量、二次型以及随机变量的数字特征等，对这些章节的要求，大纲都有很详细的说明．

二、注意突出复习重点

大纲虽是复习的方向，但考试大纲中列出的许多内容或者从没考过，或者几乎没有被考到过．这主要是因为研究生入学考试除了选拔人才的作用外，还要有助于课程教学．所以还必须深入剖析考试大纲要求，提练出复习重点．如果考生不注意这一点，同样要做一部分无用功．比如会用导数描绘函数的图形、求方程近似解的二分法和切线法、微分方程的幂级数法、包含两个未知函数的一阶常系数线性微分方差等均属于考试内容，这些内容不是不可能考，而是考到的可能性非常小，一份试卷也不能尽是考这些不常考的内容，因为小概率事件的组合概率更小．

三、紧紧抓住考试热点

有统计表明，每年的研究生入学考试内容较之上年或上几年都有 30% 左右的重复率，这些在近几年的考试中重复出现的内容就是考试热点．如果抓住了这些考试热点，就相当于约有 30 分是稳操胜券（要知研究生入学考试对数学的最低要求还没有超过 60 分的）．考试热点主要是从历年来的试题中统计分析得出．为了节省考生复习时间，本书每章都有复习重点及考试热点，供参考．

四、注意典型考题的特点

尽管考题千变万化，但是题型相对固定，提练题型的目的就是为了提高解题的针对性，形成思维定势．比如求函数间断点的类型或求间断点的导数；一般都要用定义来做，求函数的极限一般要用洛必达法则等．但是，每一种解法都有其局限性，因此考生一定要注意判别法则适用的条件．比如

洛必达法则的应用前提是零比零型，且分子分母的极限都存在，即使满足这两个条件时，当求出的极限不存在也不能断定原极限不存在，还有曲线积分、曲面积运用格林公式和高斯公式时，也要注意这两个公式的使用前提等.这些都在每一章中进行了具体阐述.

五、注重各章节之间的内在联系

数学有其自身的规律，其表现的一个重要特征是各知识点之间的联系非常密切.比如行列式、矩阵、向量、方程组是线性代数的基本内容，它们不是孤立隔裂的，而是相互渗透，紧密联系.比如：$|\boldsymbol{A}| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 是可逆矩阵 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A}) = n$（满秩矩阵）$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 的行（列）向量组线性无关 $\Leftrightarrow \boldsymbol{AX} = 0$ 有唯一零解 $\Leftrightarrow \boldsymbol{AX} = b$ 对任意b 均有唯一解，同时，$\boldsymbol{A}$ 经过一系列初等变换可以化为单位矩阵$\boldsymbol{I}$，即有：$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1 \cdot \boldsymbol{P}_2 \cdot \boldsymbol{P}_3 \cdots \boldsymbol{P}_N$ 其中$\boldsymbol{P}_i(i = 1,2,\cdots,N)$ 是初等矩阵.又如：用正交变换 $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{PX}$ 把二次型化为标准型，实际上是实对称矩阵与主对角矩阵相似这一知识点的具体应用，而求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与主对角矩阵时，又要用到线性方程组的知识，这样从第一章行列式到最后一章二次型，整个知识都联成了一块.这种相互之间的联系给综合命题创造了条件，所以考生要认真总结，以能灵活解题.

六、重视巩固历届考题

从 1989 年由国家教委考试中心统一组织命题工作以来，研究生入学考试已经快有 10 年了.而研究生入学考试每年举行一次，所以不可能每年的试题都是全新的，或者每道试题都有新花招.事实表明：最新的考题与往年的考题非常雷同的占 50 分以上，这些考题或者仅改变某一数字，或改变一种说法，但解题的思路几乎一样.从 1989 年到现在，所有的数学试卷加起来也不超过 50 套，而局限于某一方面的试题才 10 套左右，如果把这些试题全部消化巩固，及格应该没问题.

七、加强考前强化训练

中国有句俗话“临阵擦枪，不磨也光”，这就说明了考前强化训练的重要性.现在考研的参考书很多，许多考生往往看得多，练得少，这样容易导致眼高手低，一道试题看似简单，但如果自己做，不一定能做全面.从另一个角度讲，在考试过程中，时间非常有限，考前强化训练对提高解题的速度非常关键.许多考生在考后抱怨题太多，做不完，这就是平时缺少练笔的机会以及考前没有进行强化训练的结果.

由于水平有限，有关复习过程中的经验和应注意的问题就介绍到这里.

祝考生们取得优异成绩!

第一篇 高等数学

第一章 函数、极限与连续

一、应试指南

函数、极限、连续在高等数学中占有非常重要的位置.在历年的硕士研究生入学数学考试中,本章内容都占有一定的题数和分数.特别是在1997年《全国研究生入学数学考试大纲》作了重大变化以来,本章内容在数学考试中的地位可谓举足轻重,不管是工学类还是经济类的考生都应对本章高度重视.本章的重点是求函数的极限,讨论函数的连续性以及求复合函数与分段函数的表达式.近年来的考试热点是求函数的极限.

二、大纲考查要求

大纲考查要求分两部分,第一部分为考试内容,第二部分为考试要求.事实上考试要求是对考试内容的进一步阐述,它比考试内容更具体明确.

〔考试内容〕

函数的概念及其表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　反函数、复合函数、隐函数和分段函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数　简单应用问题的函数关系的建立

数列极限与函数　极限的定义以及它们的性质　函数的左、右极限　无穷小　无穷大　无穷小的比较　极限的四则运算　极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则　两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$$

函数连续的概念　函数间断点的类型　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值定理和介值定理)

〔考试要求〕

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示方法.
2. 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.
3. 理解复合函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.
5. 会建立简单应用问题中的函数关系式.(注:数学二的考试大纲上没有这一条.)
6. 理解极限的概念,理解函数左、右极限的概念,以及极限存在与左、右极限之间的关系.(注:数学三、数学四的考试大纲上没有“极限存在与左、右极限之间的关系”.)
7. 掌握极限的性质及四则运算法则.
8. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

9. 理解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念，会用等价无穷小求极限.（注：数学三、数学四的考试大纲上虽没有"用等价无穷小求极限"这一条，但我们要求考数学三、数学四的读者也能熟练应用等价无穷小求级限）.

10. 理解函数连续性的概念，会判别函数间断点的类型.（注：数学三、数学四的考试大纲上没有"会判别函数间断点的类型"这一条.）

11. 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质（最大值、最小值定理和介值定理），并会应用这些性质.

〔注意〕

以上考试要求的范围比较广，但事实上在考试中不可能面面俱到，有些知识点虽作了要求，但考到的可能性很小，相反有些知识点却频频在考试中和大家见面，特别是经常出现在近几年的考题中，这就形成了本章的重点和热点. 在下面的"重点热点分析"中我们帮助读者进一步剖析大纲要求，并通过近几年的考题总结出本章的重点和热点，让读者能在较短的时间内把握全章的核心和复习方向，起到事半功倍的效果.

下面请看"重点热点分析".

三、重点热点分析

在本章的三块内容函数、极限和连续中，重点和热点内容是极限. 求函数的极限是每年的必考题，甚至有时在同一年的同一套试题中，直接考查求函数极限的就达 3 题，分数达 16 分之多. 本章的另一块内容判断函数是否连续，其实质仍是求函数的极限. 另外在函数这一块里，尽管内容多，但大部分都是基础知识. 所以本章只要抓住了极限就基本上把握了全章的核心内容. 求极限的方法很多，在考试中常用的主要有：

1. 利用极限的四则运算法则（这一条是求函数极限的最基本的知识）；
2. 利用两个重要极限（见大纲要求）；
3. 利用洛必达法则；
4. 利用等价无穷小替换（它往往在求极限的过程中能使运算简化）；
5. 利用夹逼定理；
6. 利用"单调有界数列必有极限"准则；
7. 利用极限定义；
8. 利用连续函数性质（这一条不会单独命题，但它常用在求极限的过程中，是求极限的基础知识.）；
9. 利用导数和定积分定义. 本方法的典型例题如：

求
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 2^3}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)2^n}\right)$$

其解过程为：

$$令: f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},\ |x|<1$$

则

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-2}=\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$$

$$f(x)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x=\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n-1}=\frac{x}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$ 令 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 则

$$\text{原式}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}+1)$$

以上几种方法是从近几年的考题中总结出来的比较常用的方法,有时一个题目要用几种方法联合求解.

本章除极限是考查内容的重中之重外,判断函数是否连续也是近几年来的考试重点之一.

另外在函数这一部分里,重点为复合函数与分段函数.

上面提到的内容既是重点又是近年来的考试热点.请看下面试题:

〔例题〕 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, x\leqslant 0\\ x+2, x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, x<0\\ -x, x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$

(A) $\begin{cases}2+x^2,\ x<0\\ 2-x,\ x\geqslant 0\end{cases}$ (B) $\begin{cases}2-x^2,\ x<0\\ 2+x,\ x\geqslant 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2,\ x<0\\ 2-x,\ x\geqslant 0\end{cases}$ (D) $\begin{cases}2+x^2,\ x<0\\ 2+x,\ x\geqslant 0\end{cases}$

( )

〔分析〕 本题就是考查对复合函数概念的理解.复合函数的实质即把函数作为自变量.在本例中,$g[f(x)]$ 中 $f(x)$ 为 $g[f(x)]$ 自变量.根据函数定义有:

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), f(x)\leqslant 0\\ 2+f(x), f(x)>0\end{cases}\qquad (※)式$$

再分析 $f(x)$.

要 $f(x)\leqslant 0$,根据 $f(x)$ 的定义,只有在 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=-x<0$;同样,要 $f(x)>0$,只有在 $x<0$ 时,$f(x)=x^2>0$.这样(※)式就可写成:

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-(-x),\ x\geqslant 0\\ 2+x^2,\ x<0\end{cases}=\begin{cases}2+x,\ x\geqslant 0\\ 2+x^2,\ x<0\end{cases}$$

故选[D]

〔例题〕 求极限

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$$

〔分析〕 本题实际上是求无理式的极限.注意到本题中 $x\to-\infty$,为了便于 x 进出根号,我们不妨先令 $t=-x$.则原式变为:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{4t^2-t-1}-t+1}{\sqrt{t^2-\sin t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\sqrt{4-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}}-1+\frac{1}{t}}{\sqrt{1-\frac{\sin t}{t^2}}}=1$$

我们在阅卷时发现有些同学的结果为 3. 究其原因就是分子分母上下同除以 x 时，没有考虑到题目是 $x \to -\infty$，注意 ∞ 前面是负号. 为了让根号内式子有意义必须上下同除以 $-x$ 或者上下同除以 x 时，在根号外留一负号. 即：

$$\text{原式} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}} = 1$$

本题还有一种解法，即对分子有理化：

$$\text{原式} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-x-2}{\sqrt{x^2+\sin x}\,(\sqrt{4x^2+x-1}-x-1)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}\left[\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+1+\frac{1}{x}\right]}$$

$$= 1$$

有关极限的考题实在太多，近年来有关极限的考题也越来越灵活，有关需要考生注意的问题在"典型考题精解"中讲述.

〔**例题**〕 设函数 $f(x)$ 和 $\phi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x) \neq 0$，$\phi(x)$ 有间断点，则

(A) $\phi[f(x)]$ 必有间断点 (B) $[\phi(x)]^2$ 必有间断点

(C) $f[\phi(x)]$ 必有间断点 (D) $\dfrac{\phi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

( )

〔**分析**〕 因为 $f(x)$ 是连续函数，若 $\dfrac{\phi(x)}{f(x)}$ 无间断点，则 $f(x)\cdot\dfrac{\phi(x)}{f(x)} = \phi(x)$ 必无间断点，此与题设矛盾. 故 D 项为正确答案.

本题也可用举例法逐个排除 A、B、C 项. 例如 设 $\phi(x) = \begin{cases} 1, x \geqslant 0, \\ -1, x < 0, \end{cases}$ $f(x) = x^2$，则 $\phi(x)$、$f(x)$ 满足题设条件. 但 $\phi[f(x)] = 1$，$[\phi(x)]^2 = 1$，$f[\phi(x)] = 1$ 均无间断点，故 A、B、C 三项为错误选项.

以上三道考题分别针对本章的三个热点（重点），这些提到的内容无疑是读者在复习过程中首先应掌握的问题也是着重需要强化的地方.

四、典型考题精解

典型题型一 求未定式的极限

典型的未定式共有七种：$\dfrac{0}{0}$ 型，$\dfrac{\infty}{\infty}$，$\infty-\infty$ 型、$0\cdot\infty$ 型、0^0 型、∞^0 型以及 1^∞ 型.

读者在遇到这七种未定式时，建议首先采用洛必达法则试一试. 因为以上虽号称是七种，但事实上大都可以转化为求 $\dfrac{0}{0}$ 型的极限这种类型.

〔例题〕 求极限

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{a}{x}-\left(\frac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]\quad(a\neq0)$$

〔分析〕 当 $x\to0$ 时本题为 $\infty-\infty$ 型未定式.不过对单独能求出结果的要分开.

解

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\left[\frac{a}{x}-\frac{\ln(1+ax)}{x^2}\right]+\lim_{x\to0}\left[a^2\ln(1+ax)\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{ax-\ln(1+ax)}{x^2}\qquad\text{用洛必达法则有}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{a-\dfrac{a}{1+ax}}{2x}\qquad\text{整理式子有}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{a^2x}{2x(1+ax)}$$

$$=\frac{a^2}{2}$$

〔例题〕 求 $\lim_{x\to\infty}\left[\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]=$ ____.

〔分析〕 本题为 $0\cdot\infty$ 型未定式.为了更方便运用洛必达法则,令 $t=\frac{1}{x}$,则

$$\text{原式}=\lim_{t\to0}\frac{\sin\ln(1+3t)-\sin\ln(1+t)}{t}$$

$$=\lim_{t\to0}\left[\cos\ln(1+3t)\cdot\frac{3}{1+3t}-\cos\ln(1+t)\cdot\frac{1}{1+t}\right]$$

$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{3}{1+3t}-\frac{1}{1+t}\right)$$

$$=2$$

当然本题也可采用如下解法(先利用三角函数和差化积公式):

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}2x\sin\frac{\ln\dfrac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}}{2}\cos\frac{\ln(1+\frac{1}{x})(1+\frac{3}{x})}{2}$$

$$=\lim_{x\to\infty}2x\cdot\sin\frac{1}{1+x}$$

$$=2$$

上面提到了有一种未定式是 1^∞ 型(注意 $1^{+\infty}$ 与 $1^{-\infty}$ 也同属此类型),它和另两种未定式 0° 型和 ∞° 都可以转化为 $\frac{0}{0}$ 型未定式来求解,转化的方法是利用对数或指数函数.比如 0° 型,设 $\lim_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim_{x\to x_0}g(x)=0$

则:$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to x_0}g(x)\ln f(x)}=e^{\lim_{x\to x_0}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}}$

而极限 $\lim_{x\to x_0}\dfrac{\ln f(x)}{\dfrac{1}{g(x)}}$ 就是 $\frac{0}{0}$ 型未定式.另外两种 1^∞ 式与 ∞° 式也都一样转化.请看例题: