博士文库

BOSHI WENKU

〔数 学〕

高阶非线性发展方程中的若干问题

GAOJIE FEIXIANXING FAZHANFANGCHENGZHONG DE RUOGANWENTI

王艳萍 著

知识产权出版社

BOSHI WENKU
〔数 学〕

高阶非线性发展方程中的若干问题

GAOJIE FEIXIANXING FAZHANFANGCHENGZHONG DE RUOGANWENTI

王艳萍 著

知识产权出版社

内容提要

本书是作者在博士和博士后两个阶段的工作成果的总结，内容主要由两部分组成，一部分是以弹性力学为背景的几类模型方程的定解问题，另一部分是几类非线性发展方程的时间周期问题。本书具有一定学术价值，具有可读性。

责任编辑：李 琳　　**责任校对**：董志英
执行编辑：王剑宇　　**责任出版**：卢运霞

图书在版编目（CIP）数据

高阶非线性发展方程中的若干问题／王艳萍著. —北京：知识产权出版社，2009.5
ISBN 978-7-80247-456-7
Ⅰ. 高…　Ⅱ. 王…　Ⅲ. 非线性方程　Ⅳ. O175
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 069080 号

高阶非线性发展方程中的若干问题

王艳萍　著

出版发行：知识产权出版社
社　　址：北京市海淀区马甸南村 1 号　　邮　　编：100088
网　　址：http：//www.ipph.cn　　邮　　箱：bjb@cnipr.com
发行电话：010-82000893　82000860 转 8101　　传　　真：010-82000893
责编电话：010-82000860 转 8225　　责编邮箱：wangjianyu@cnipr.com
印　　刷：知识产权出版社电子制印中心　　经　　销：新华书店及相关销售网点
开　　本：880mm×1230mm　1/32　　印　　张：6.5
版　　次：2009 年 5 月第一版　　印　　次：2009 年 5 月第一次印刷
字　　数：200 千字　　定　　价：22.00 元
ISBN 978-7-80247-456-7/O·005（10216）

目　　录

第一章　一类广义 Boussinesq 型方程的 Cauchy 问题

第一节　引　　言

本章考虑如下广义 Boussinesq 型方程的初值问题。

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxtt}+\alpha u_{x^4}+\beta u_{x^4t^2}=f(u)_{xx},\ x\in R,\ t>0 \tag{1.1.1}$$

$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\ u_t(x,\ 0)=\psi(x),\ x\in R \tag{1.1.2}$$

其中，$u(x,\ t)$表示未知函数，$u_{x^4}=u_{xxxx}$，$u_{x^4t^2}=u_{xxxxtt}$，$f(s)$是给定的非线性函数，$\alpha>0$ 和 $\beta>0$ 是常数，$\varphi(x)$和 $\psi(x)$是已知的初值函数。

有很多具有主项 $u_{tt}-u_{xxtt}$ 或 $u_{tt}+u_{xxxx}$ 的方程，这些主项与方程(1.1.1)密切相关. 在弱耗散介质中的非线性波的传播由 Boussinesq 型方程

$$u_{tt}-u_{xx}+u_{xxxx}=(u^2)_{xx}$$

和 Boussinesq 型方程

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxtt}=(u^2)_{xx}$$

控制[1, 2]. 弹性杆中的纵向形变波的传播模型由偏微分方程

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxtt}=\frac{1}{p}(u^p)_{xx} \tag{1.1.3}$$

描述，其中 $p=3$ 或 $p=5$。这个方程就是所谓的 Pochhammer - Chree(PC)方程[3]。

在一些波导杆中非线性波的传播问题中，杆的纵向位移 $u(x,t)$满足方程

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxtt}=\frac{1}{p}(u^p)_{xx}u_{tt}-u_{xx}=\frac{1}{4}(6u^2+au_{tt}-bu_{xx})_{xx} \tag{1.1.4}$$

这个方程可以通过利用哈密顿原理得到[4,5]. 同样的方法，也可以得到如下方程

$$u_{tt}-u_{xx}=\frac{1}{4}(cu^3+6u^2+au_{tt}-bu_{xx})_{xx} \qquad (1.1.5)$$

文献[6]在研究具有微观结构的圆柱型弹性杆内部非线性纵向应变孤立子波的时候，通过使用 Cosserat 模型和 Le Roux 连续型模型，使问题得到解决。文献中曾经讨论过一种过程，描述纵向非线性应变波传播时的方程。控制这个过程的模型方程属于 Boussinesq 型，即通常所说的双耗散方程

$$u_{tt}-\alpha_1 u_{xx}-\alpha_2(u^2)_{xx}-\alpha_3 u_{xxtt}+\alpha_4 u_{xxxx}=0, \qquad (1.1.6)$$

其中，系数 α_1，α_2，α_3，α_4 都是依赖于感材料的弹性参数，并且 α_1，α_3，$\alpha_4>0$。

文献[7]导出了描述具有表面张力的水波方程

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxtt}+\alpha u_{x^4}+\beta u_{x^4t^2}=(u^2)_{xx} \qquad (1.1.7)$$

对于方程(1.1.3)－(1.1.5)，已经有很多的研究结果[8－12]。文献[13]的作者研究了方程(1.1.6)和方程(1.1.7)的初边值问题，作者证明了方程(1.1.7)的初边值问题整体广义解和整体古典解的存在性和唯一性。同时，文献[13]还给出了方程(1.1.6)的初边值问题整体解不存在的充分条件. 至于初值问题(1.1.1)、(1.1.2)，至今还没有见到相关的研究结果。

本章的目的就是证明在某些条件下，问题(1.1.1)、(1.1.2)有唯一的整体解，并且也将给出问题(1.1.1)，(1.1.2)的整体解不存在的充分条件。

本章采用如下这些记号：L^2 表示通常的所有 R 上的 L^2－函数构成的空间，具有范数 $\|u\|=\|u\|_{L^2}$；H^s 表示通常的 R 上的 Sobolev，具有范数

$$\|u\|_{H^s}=\|(I-\partial_x{}^2)^{\frac{s}{2}}u\|=\|(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}\|$$

$\dot{H}^s$ 表示 R 上相应的具有半范数 $\|u\|_{\dot{H}^s}=\||\xi|^s\hat{u}\|$ 的齐次空间，

其中，$s\in R$，I 是单位算子，$\hat{u}(\xi, t)$ 是 $u(x, t)$ 关于变量 x 的 Fourier 变换，即

$$\hat{u}(\xi, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} u(x, t)\,\mathrm{d}x。$$

首先，给出几个后面要用到的引理。

引理 1.1.1　(Sobolev 嵌入定理)对 $s\geqslant 1$，$H^s \to C(R)\cap L^\infty$ 成立，其中"→"表示嵌入关系。

引理 1.1.2　假定 $f\in C^{[s]+1}(R)$，$f(0)=0$，$s\geqslant 1$，那么，对 $u\in H^s$，有

$$\|f(u)\|_{H^s}\leqslant C_0(\|u\|_\infty)\|u\|_{H^s}$$

其中，$C_0(\|u\|_\infty)$ 是依赖于 $\|u\|_\infty$ 的常数。

引理 1.1.3　假定 s_1，$s_2\geqslant s>\frac{1}{2}$，则对于 $u\in H^{S_1}$，$u\in H^{S_2}$，存在着估计式

$$\|uv\|_{H^s}\leqslant C_1\|u\|_{H^{S_1}}\|v\|_{H^{S_2}}$$

其中，C_1 是与 u 和 v 无关的常数。

上述这些引理都可以在文献[14]中找到。

本章的安排是这样的：在第二节中，通过利用压缩映射原理证明问题(1.1.1)、(1.1.2)的局部强解的存在性和唯一性；在第三节中，证明问题(1.1.1)、(1.1.2)整体解的存在性和唯一性；在第四节中，讨论问题(1.1.1)、(1.1.2)的整体解不存在性。

第二节　问题(1.1.1)，(1.1.2)的局部解的存在性和唯一性

首先考虑线性问题。

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxtt}+\alpha u_{x^4}+\beta u_{x^4t^2}=g(x, t),\ x\in R,\ t>0 \quad (1.2.1)$$

$$u(x, 0)=\varphi(x),\ u_t(x, 0)=\psi(x) \quad (1.2.2)$$

引理 2.1.1 假定 $\varphi\in H^s$，$\psi\in H^s$，$g\in L^\infty(0, T;H^{s-2})$，$s\in R$，

$T>0$，则问题(2.1.1)，(2.1.2)有唯一的解

$$u\in C([0,T];H^s)\cap C^1([0,T];H^s)\cap C^2([0,T];H^s)$$

并且成立估计式

$$\begin{aligned}&\|u(\cdot,t)\|_{H^s}+\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}+\|u_{tt}(\cdot,t)\|_{H^s}\\ \leqslant&(1+2k_0)\|\varphi\|_{H^s}+(t+k_0+1)\|\psi\|_{H^s}\\ &+\|g(\cdot,t)\|_{H^{s-2}}+[2(t+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}})+1\\ &+k_0]\int_0^t\|g(\cdot,\tau)\|_{H^{s-2}}\mathrm{d}\tau,\ 0\leqslant t\leqslant T\end{aligned}\tag{1.2.3}$$

其中 $k_0=\sqrt{\max\{1,\frac{\alpha}{\beta}\}}$

证明 与文献[15]中的过程相似，可以得到问题解的存在性与唯一性。显然

$$\begin{aligned}\hat{u}(\xi,t)=&\hat{\varphi}(\xi)\cos(t|\xi|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}})\\ &+\frac{1}{|\xi|}\hat{\psi}(\xi)\sqrt{\frac{1+\xi^2+\beta\xi^4}{1+\alpha\xi^2}}\sin(t|\xi|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}})\\ &+\frac{1}{|\xi|}\sqrt{\frac{1+\xi^2+\beta\xi^4}{1+\alpha\xi^2}}\int_0^t\hat{g}(\xi,\tau)\frac{1}{1+\xi^2+\beta\xi^4}\\ &\sin((t-\tau)|\xi|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}})\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{1.2.4}$$

注意到

$$\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{\varphi}\cos(t|\xi|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}})\|\leqslant\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{\varphi}\|\tag{2.1.5}$$

$$\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\frac{1}{|\xi|}\hat{\psi}(\xi)\sqrt{\frac{1+\xi^2+\beta\xi^4}{1+\alpha\xi^2}}\sin(t|\xi|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}})\|^2$$

$$\leqslant t^2\int_R(1+\xi^2)^s\hat{\psi}^2(\xi)d\xi \tag{1.2.6}$$

$$\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{g}(\xi,\tau)\frac{1}{|\xi|}\sqrt{\frac{1+\xi^2+\beta\xi^4}{1+\alpha\xi^2}}\frac{1}{1+\xi^2+\beta\xi^4}$$

$$\sin((t-\tau)|\xi|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}t)\|^2$$

$$\leqslant\int_{|\xi|\leqslant 1}(1+\xi^2)^s(t-\tau)^2\hat{g}^2(\xi,\tau)\frac{1}{(1+\xi^2+\beta\xi^4)^2}d\xi$$

$$+\int_{|\xi|\geqslant 1}(1+\xi^2)^s\hat{g}^2(\xi,\tau)\frac{1}{\alpha\beta\xi^8}d\xi$$

$$\leqslant 4t^2\int_{|\xi|\leqslant 1}(1+\xi^2)^{s-2}\hat{g}^2(\xi,\tau)d\xi$$

$$+\frac{4}{\alpha\beta}\int_{|\xi|\geqslant 1}(1+\xi^2)^{s-2}\hat{g}^2(\xi,\tau)d\xi$$

$$\leqslant 4(t^2+\frac{1}{\alpha\beta})\int_R(1+\xi^2)^{s-2}\hat{g}^2(\xi,\tau)d\xi \tag{1.2.7}$$

由(1.2.5)－(1.2.7)，可以得到

$$\|u\|_{H^s}\leqslant\|\varphi\|_{H^s}+t\|\psi\|_{H^s}$$

$$+2(t+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}})\int_0^t\|g(\cdot,\tau)\|_{H^{s-2}}\mathrm{d}\tau. \tag{1.2.8}$$

由(1.2.4)可得

$$\hat{u}_t(\xi,t)=-\hat{\varphi}(\xi)|\xi|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}\sin(t|\xi|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}})$$

$$+\hat{\psi}(\xi)\cos(t|\xi|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}})$$

$$+\int_0^t\hat{g}(\xi,\tau)\frac{1}{1+\xi^2+\beta\xi^4}$$

$$\cos(|\xi|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}(t-\tau))\mathrm{d}\tau \tag{1.2.9}$$

$$\hat{u}_{tt}(\xi, t) = -\hat{\varphi}(\xi)\xi^2 \frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}\cos\left(t\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}\right)$$
$$-\hat{\psi}(\xi)\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}\sin\left(t\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}\right)$$
$$+\frac{1}{1+\xi^2+\beta\xi^4}\hat{g}(\xi, t) - \int_0^t \hat{g}(\xi, \tau)\frac{1}{1+\xi^2+\beta\xi^4}$$
$$\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}\sin\left(\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}(t-\tau)\right)d\tau. \tag{1.2.10}$$

注意到

$$\left\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{\varphi}(\xi)\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}\sin\left(t\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}\right)\right\|^2$$
$$\leqslant \int_R (1+\xi^2)^s\hat{\varphi}^2(\xi)\frac{\xi^2(1+\alpha\xi^2)}{1+\xi^2+\beta\xi^4}d\xi$$
$$\leqslant k_0^2\int_R (1+\xi^2)^s\hat{\varphi}^2(\xi)d\xi = k_0^2\|\varphi\|_{H^s}^2 \tag{1.2.11}$$

$$\left\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{\psi}(\xi)\cos\left(t\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}\right)\right\| \leqslant \|\psi\|_{H^s} \tag{1.2.12}$$

$$\left\|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{g}(\xi, \tau)\frac{1}{1+\xi^2+\beta\xi^4}\cos\left(\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}(t-\tau)\right)\right\|^2$$
$$\leqslant \int_R (1+\xi^2)^s\hat{g}^2(\xi, \tau)\frac{1}{(1+\xi^2+\beta\xi^4)^2}d\xi$$
$$\leqslant \|g(\cdot, \tau)\|_{H^{s-2}}^2 \tag{1.2.13}$$

把(1.2.11)－(1.2.13)代入(1.2.9)，可得

$$\|u_t(\cdot, t)\| \leqslant k_0\|\varphi\|_{H^s} + \|\psi\|_{H^s}$$
$$+\int_0^t \|g(\cdot, \tau)\|_{H^{s-2}}d\tau \tag{1.2.14}$$

同样地，有

$$\left\| (1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{\varphi}(\xi)\xi^2 \frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}\cos\left(t\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}\right)\right\|$$
$$\leqslant k_0\|\varphi\|_{H^s} \tag{1.2.15}$$

$$\left\| (1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\hat{\psi}(\xi)\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}\sin\left(t\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}\right)\right\|$$
$$\leqslant k_0\|\psi\|_{H^s} \tag{1.2.16}$$

$$\left\| (1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\frac{1}{1+\xi^2+\beta\xi^4}\hat{g}(\xi,t)\right\| \leqslant \|g(\cdot,t)\|_{H^{s-2}} \tag{1.2.17}$$

$$\left\| (1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}\frac{1}{1+\xi^2+\beta\xi^4}\hat{g}(\xi,\tau)\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}\right.$$
$$\left.\sin\left(\left|\xi\right|\sqrt{\frac{1+\alpha\xi^2}{1+\xi^2+\beta\xi^4}}(t-\tau)\right)\right\| \leqslant k_0\|g(\cdot,t)\|_{H^{s-2}} \tag{1.2.18}$$

把(1.2.15)－(1.2.18)代入(1.2.10)，得

$$\|u_{tt}(\cdot,t)\| \leqslant k_0\|\varphi\|_{H^s} + k_0\|\psi\|_{H^s} + \|g(\cdot,t)\|_{H^{s-2}} + k_0\int_0^t \|g(\cdot,\tau)\|_{H^{s-2}}\mathrm{d}\tau \tag{1.2.19}$$

由(1.2.8)，(1.2.14)和(1.2.19)知道(1.2.3)成立。引理得证。

对 M，$T>0$，$\varphi\in H^s$，$\psi\in H^s$ 定义

$X(M,T)=\{w \mid w\in C([0,T];H^s)\cap C^1([0,T];H^s)\cap C^2([0,T];H^s)$，$w(x,0)=\varphi(x)$，$w_t(x,0)=\psi(x)$，$\max[\|w(\cdot,t)\|_{H^s}+\|w_t(\cdot,t)\|_{H^s}+\|w_{tt}(\cdot,t)\|_{H^s}]\leqslant M\}$

定义 $X(M,T)$ 中的距离为

$$d(w,\bar{w})=\max[\|w-\bar{w}\|_{H^s}^2+\|w_t-\bar{w}_t\|_{H^s}^2+\|w_{tt}-\bar{w}_{tt}\|_{H^s}^2]^{\frac{1}{2}},$$
$\forall w,\bar{w}\in X(M,T)$

对 $w\in X(M,T)$ 和 $f\in C^2(R)$，考虑线性方程

$$u_{tt}-u_{xx}-u_{xxtt}+\alpha u_{x^4}+\beta u_{x^4t^2}=f(w)_{xx} \tag{1.2.20}$$

假定$f(0)=0$，若不然，用$f(u)-f(0)$代替$f(u)$。

定义S是把w映到方程(1.2.20)的唯一解的映射.下面证明对适当选择的M和T，映射S在$X(M, T)$中有唯一的不动点。

引理 1.2.2 假定$s\geqslant 1$，$\varphi\in H^s$，$\psi\in H^s$，和$f\in C^{[s]+2}(R)$，则对充分大的M和相对于M充分小的T，S映$X(M, T)$到$X(M, T)$。

证明 对$M, T>0$和$w\in X(M, T)$，由引理1.2.1得

$$\begin{aligned}
&\|u(\cdot,t)\|_{H^s}+\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}+\|u_{tt}(\cdot,t)\|_{H^s}\\
&\leqslant(1+2k_0)\|\varphi\|_{H^s}+(t+k_0+1)\|\psi\|_{H^s}\\
&\quad+\|f(w(\cdot,t))_{xx}\|_{H^{s-2}}+\left[2\left(t+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\right)\right.\\
&\quad\left.+1+k_0\right]\int_0^t\|f(w(\cdot,\tau))_{xx}\|_{H^{s-2}}\mathrm{d}\tau
\end{aligned} \tag{1.2.21}$$

利用 Sobolev 嵌入定理和引理1.1.2，得

$$\begin{aligned}
\|f(w(\cdot,t))_{xx}\|_{H^{s-2}}&\leqslant\|f(w(\cdot,t))\|_{H^s}\leqslant C_0(M)\|w\|_{H^s}\\
&\leqslant C_0(M)M.
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\left[2\left(t+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\right)+1+k_0\right]\int_0^t\|f(w(\cdot,\tau))_{xx}\|_{H^{s-2}}\mathrm{d}\tau\\
&\qquad\leqslant C_0(M)MT\left[2\left(t+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\right)+1+k_0\right].
\end{aligned} \tag{1.2.22}$$

利用引理1.1.2，可得

$$\begin{aligned}
&\|f(w(\cdot,t))_{xx}\|_{H^{s-2}}\\
&=\|f(w(\cdot,0))+\int_0^t f(w(\cdot,\tau))_\tau\|_{H^s}\mathrm{d}\tau\\
&\leqslant C_0\|\varphi\|_{H^s}+C_1(M)C_0(M)M^2T,
\end{aligned} \tag{1.2.23}$$

其中C_0是与M无关的常数.由(1.2.21)－(1.2.23)可得

$$\begin{aligned}
&\|u(\cdot,t)\|_{H^s}+\|u_t(\cdot,t)\|_{H^s}+\|u_{tt}(\cdot,t)\|_{H^s}\\
&\leqslant[1+2k_0+C_0]\|\varphi\|_{H^s}+(T+k_0+1)\|\psi\|_{H^s}
\end{aligned}$$

$$+C_0(M)C_1(M)M^2T+[2(T+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}})+1+k_0]C_0(M)MT \tag{1.2.24}$$

如果 M 和 T 满足

$$M\geqslant 2[(1+2k_0+C_0)\|\varphi\|_{H^s}+(k_0+2)\|\psi\|_{H^s}] \tag{1.2.25}$$

$$T\leqslant \min\left\{1,\ \frac{1}{2}\{C_0(M)C_1(M)M+C_0(M)[2(1+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}) +1+k_0]\}^{-1}\right\} \tag{1.2.26}$$

则(1.2.24)式的右端不超过 M，所以

$$\|(Sw)(t)\|_{H^s}+\|(Sw)_t(t)\|_{H^s}+\|(Sw)_{tt}(t)\|_{H^s}\leqslant M,\quad \forall w\in X(M,\ T).$$

引理 1.2.3　假定引理 1.2.2 的条件成立，$f\in C^{[s]+3}$。若 M 充分大且 T 相对于 M 足够小，则映射 $S:X(M,\ T)\to X(M,\ T)$ 是严格压缩的。

证明　设 $M,\ T>0$ 和 $w_1,\ w_2\in X(M,\ T)$. 记 $u_1=Sw_1$，$u_2=Sw_2$，$U=u_1-u_2$，$W=w_1-w_2$。显然 U 满足如下 Cauchy 问题。

$$U_{tt}-U_{xx}-U_{xxtt}+\alpha U_{x^4}+\beta U_{x^4tt}=f(w_1)_{xx}-f(w_2)_{xx},$$
$$U(x,\ 0)=U_t(x,\ 0)=0$$

由引理 1.2.1 知道

$$\|U(t)\|_{H^s}+\|U_t(t)\|_{H^s}+\|U_{tt}(t)\|_{H^s}$$
$$\leqslant\|f(w_1)_{xx}-f(w_2)_{xx}\|_{H^{s-2}}+[2(t+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}) +1+k_0]\int_0^t\|f(w_1)_{xx}-f(w_2)_{xx}\|_{H^{s-2}}d\tau, \tag{1.2.27}$$

利用引理 1.1.1－1.1.3，可得

$$\int_0^t\|f(w_1)_{xx}-f(w_2)_{xx}\|_{H^{s-2}}d\tau$$

$$\leqslant \int_0^t \|f(w_1) - f(w_2)\|_{H^s} d\tau$$
$$= \int_0^t \|f'(w_2 + \theta_1(w_1 - w_2))(w_1 - w_2)\|_{H^s} d\tau$$
$$\leqslant 3MC_1(M)T\max \|W\|_{H^s} \tag{1.2.28}$$
$$\|f(w_1)_{xx} - f(w_2)_{xx}\|_{H^{s-2}}$$
$$\leqslant \|f(w_1) - f(w_2)\|_{H^s}$$
$$= \left\| \int_0^t [f(w_1)_\tau - f(w_2)_\tau] d\tau \right\|_{H^s}$$
$$= \int_0^t \|f''(w_2 + \theta_2(w_1 - w_2))Ww_{1\tau} + f'(w_2)W_\tau\|_{H^s} d\tau$$
$$\leqslant 3C_0(M)C_1(M)MT(M+1)\max(\|W\|_{H^s} + \|W_t\|_{H^s}). \tag{1.2.29}$$

把(1.2.28)，(1.2.29)代入(1.2.27)，有

$$\|U(t)\|_{H^s} + \|U_t(t)\|_{H^s} + \|U_{tt}(t)\|_{H^s}$$
$$\leqslant 3C_0(M)C_1(M)MT(M+1)\max(\|W\|_{H^s} + \|W_t\|_{H^s})$$
$$+3\left[2\left(T+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\right)+1+k_0\right]C_1(M)MT\max\|W\|_{H^s}.$$

由此知道，如果 M 和 T 满足(1.2.25)，(1.2.26) 以及

$$T \leqslant \min\left\{1, \frac{1}{6}\left\{C_0(M)C_1(M)M(M+1) + \left[1+k_0+2\left(1+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}\right)\right]C_1(M)M\right\}^{-1}\right\},$$

则 S 映 $X(M, T)$ 到 $X(M, T)$，并且是严格压缩的. 引理证毕。

定理 1.2.1 假定 $s \geqslant 1$，$\varphi \in H^s$，$\psi \in H^s$ 以及 $f \in C^{[s]+3}(R)$，则问题(1.1.1)，(1.1.2)有唯一的局部解 $u(x, t)$，解的最大定义区间是$[0, T_0)$ $(T_0 > 0)$，并且 $u \in C([0, T_0); H^s) \cap C^1([0, T_0); H^s) \cap C^2([0, T_0); H^s)$。如果

$$\sup_{t\in[0, T_0)}[\|u(t)\|_{H^s} + \|u_t(t)\|_{H^s} + \|u_{tt}(t)\|_{H^s}] < \infty, \tag{1.2.30}$$