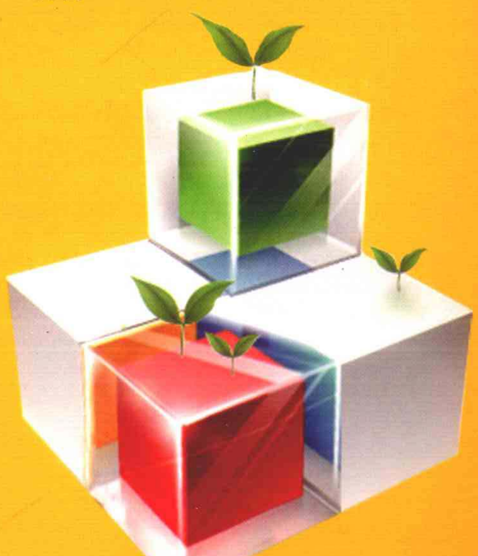
Shuxue Aosai
fudao Congshu

数学奥赛辅导丛书

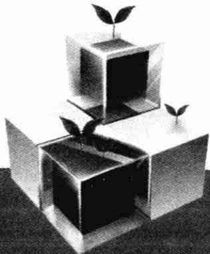
构造法解题

Gouzaofa Jieti

余红兵　严镇军　编著



中国科学技术大学出版社



数学奥赛辅导丛书

构造法解题

余红兵　严镇军　编著

中国科学技术大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

构造法解题/余红兵,严镇军编著. —3 版. —合肥:中国科学技术大学出版社,2009. 4

(数学奥赛辅导丛书)

ISBN 978-7-312-02483-2

Ⅰ. 构… Ⅱ. ①余… ②严… Ⅲ. 数学—高中—教学参考资料 Ⅳ. G634. 605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 049169 号

中国科学技术大学出版社出版发行

地址:安徽省合肥市金寨路 96 号,230026

网址:http://press. ustc. edu. cn

中国科学技术大学印刷厂印刷

全国新华书店经销

*

开本:880×1230/32 印张:4. 75 字数:94 千

1989 年 5 月第 1 版 2009 年 4 月第 3 版

2009 年 4 月第 3 次印刷

定价:10. 00 元

序

目前，有关中学生复习资料、课外辅导读物已经出版得很多了，甚至使一些中学生感到不堪负担，所以再要出版这类读物一定要注重质量，否则“天下文章一大抄”，又无创新之见，未免有误人子弟之嫌.写这类读物如何才能确保质量呢？我想华罗庚老师的两句名言：“居高才能临下，深入才能浅出”，应该成为写这类读物的指导思想，他本人生前所写的一系列科普读物，包括为中学生写的一些书，也堪称是这方面的范本.

中国科学技术大学数学系的老师们，在从事繁重的教学与科研工作的同时，一向对中学数学的活动十分关注，无论对数学竞赛，还是为中学生及中学教师开设讲座，出版中学读物都十分热心，这也许是受华罗庚老师的亲炙，耳濡目染的缘故，所以至今这仍然是中国科学技术大学数学系的一个传统和特色.

我看了几本他们编写的“数学奥赛辅导丛书”原稿，感到他们是按照华罗庚老师的教诲认真写作的，所以乐之为序.

龚　昇

前　言

这本小册子,通过初等数学,特别是数学竞赛中的问题,介绍解题中的一些构造性思想和方法.

构造法解题,归结起来,大致可以分为两个方面.一方面,它是一种辅助手段,通过构造适当的辅助量(如图形、模型、函数等)转换命题,以帮助解题.在前三节中,我们撷取一些读者较为熟悉的内容来体现构造法的这种特点.另一方面,构造性方法提供了证明存在性命题的一种有效手段,本书的第4节至第7节侧重介绍这种解题思想及常用技巧,第8节则是这些内容的补充.

书中有些问题的解法属于单墫先生,对他允许我们引用这些内容深致谢意.

余红兵

目　　次

1　初等几何中的例子

论证几何命题的过程，可以说是反复运用"构造"——这一辅助手段的过程. 当我们试图证明一个几何命题：若 A（已知条件），则 B（结论）. 即

$$A \Rightarrow B$$

时，首先就应当作一个与问题有关的图，并将图中的点、线等标以适当的字母（记号），这便构造了一个所证命题的辅助模型，然后再对这个模型进行思索和论证.

由于许多几何问题的已知条件与结论之间的关系非常隐蔽，仅从上述模型不容易找到证题的思路. 一般来说，用综合法证明 $A \Rightarrow B$ 时，要经过许多中间的步骤，也就是说，要经过如下的程序：

$$A \Rightarrow \text{中间结论 } C \Rightarrow \text{中间结论 } D \Rightarrow \cdots \Rightarrow B$$

为了得到这些中间结论，我们经常动用辅助手段，即添加辅助线，构造出能揭示已知条件和结论之间关系的辅助图形，从而找到论证的途径.

我们来看勾股定理的下述证法，这是古希腊几何大师欧几里德作出的，请读者注意论证中所构造的辅助图形.

【例 1】（勾股定理）　证明：任意直角三角形的斜边（弦）长的平方等于两直角边（勾、股）长的平方和.

证　首先，我们作出一个（辅助模型）直角三角形 ABC（图 1），这样，需要证明的便是：

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \qquad (1)$$

再分别以 AB、BC、AC 为一边向外侧构作（辅助图形）正方形 $ABHI$、$BCFG$、$ACED$（图 2）. 显然，(1) 式等价于（转换命题！）：

$$(ABHI) = (ACED) + (BCFG) \qquad (2)$$

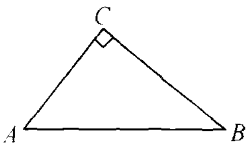


图 1

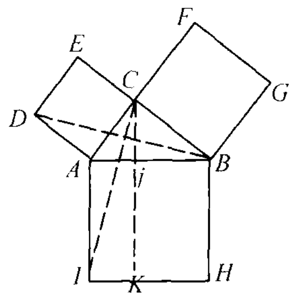


图 2

这里 $(ABHI)$ 表示正方形 $ABHI$ 的面积，其余类似.

为了证明(2)，我们作 $CJ \perp AB$，并延长交 HI 于 K，连结 BD，CI. 由这样构作的辅助图形，结论几乎唾手可得. 显然

$$\triangle ABD \cong \triangle AIC$$

所以

$$(ACED) = 2(\triangle ABD) = 2(\triangle AIC) = (AIKJ)$$

同理

$$(BCFG) = (BJKH)$$

又有

$$(AIKJ)+(BJKH)=(ABHI)$$

故(2)式成立.

勾股定理有许多基于构造的证法,图 3 及图 4 提供了两个这方面的例子,请读者自己完成论证.

三角形和圆是欧氏几何中最基本的图形.它们以及它们的组合图形具有十分丰富的性质,在论证中,构造适当的三角形或圆则可期望利用这些性质,因此是一种常能奏效的辅助手段.

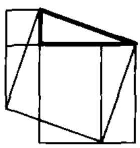


图 3

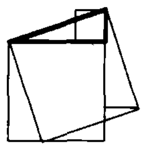


图 4

【例 2】 设 P 是三角形 ABC 中任意一点,证明:

$$AB+AC>PB+PC$$

证 如图 5 所示,延长 BP 交 AC 边于 D 点,我们构造出了对论证有帮助的三角形 ABD 及 CDP,由此易得(中间结论):

$$AB+AD>BD=BP+PD \tag{1}$$

及

$$PD+DC>PC \tag{2}$$

将(1)与(2)相加,得出(注意 $AD+DC=AC$):

$$AB+AC>BP+PC$$

【例 3】 如图 6,设 AH 是锐角三角形 ABC 的高,以 AH

为直径的圆分别交 AB,AC 于 M,N(M,N 与 A 不同),过 A 作直线 $L_A \perp MN$;类似地作直线 L_B,L_C,证明:L_A,L_B,L_C 三线共点.

证 作三角形 ABC 的外接圆,设 L_A 与此圆相交于 E 点,连结 BE,则

$$\beta=\delta$$

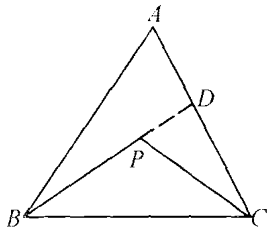


图 5

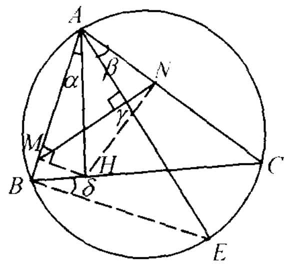


图 6

连结 HM,HN,因 A,M,H,N 四点共圆,故 $\alpha=\gamma$. 又显然 $\beta=\gamma$,所以

$$\alpha=\beta$$

从而

$$\alpha=\delta$$

故

$$\angle ABE=\delta+\angle ABC=\alpha+\angle ABC=90^\circ$$

由此可见,AE 是$\triangle ABC$ 外接圆的直径,即 L_A 通过圆心.

同理可证,L_B,L_C 都过圆心,所以 L_A,L_B,L_C 三线共点.

下面的例子是著名的欧拉定理,请注意论证中辅助圆及辅助三角形的作用.

【例 4】（欧拉定理） 设三角形 ABC 的外心为 O，内心为 I（图 7），R 及 r 分别是外接圆和内切圆半径，设 $OI=d$. 证明：$d^2=R^2-2Rr$.

证 求证的结论等价于

$$(R+d)(R-d)=2Rr$$

我们先在图中构造出长为 $R+d$ 及 $R-d$ 的线段.

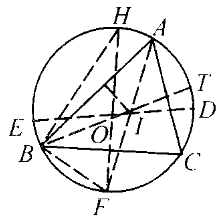


图 7

画出三角形 ABC 的外接圆，把 OI 两端延长交外接圆于 D,E，则

$$EI=R+d,\qquad DI=R-d$$

于是，问题转化成证明

$$EI\cdot ID=2Rr \tag{1}$$

连结 AI 并延长交外接圆于 F，由相交弦定理，(1)式等价于

$$AI\cdot IF=2Rr \tag{2}$$

作 $IG\perp AB$（G 为垂足），则 $IG=r$，且

$$AI=\frac{r}{\sin\dfrac{A}{2}}$$

由(2)式可见，为完成定理的证明，现在就转化为证明

$$IF=2R\sin\frac{A}{2} \tag{3}$$

作直径 FH，连 BF，BH，便构造了一个直角三角形 FBH，且 $\angle H=\angle BAF=\dfrac{\angle A}{2}$，故

$$BF=HF\sin\frac{A}{2}=2R\sin\frac{A}{2} \tag{4}$$

比较(3)、(4)可见,剩下的事情是证明

$$BF = IF$$

而这几乎是显然的,请读者自己考虑.

从上面的例子可以看出,实现几何命题论证的关键在于动用辅助手段,即逐步添加辅助线,以构造出揭示已知与未知关系的图形,限于本书的目的,我们不打算去讨论构作辅助线的各种办法,下面只简要介绍一下引用"参数"来探求辅助线的作法,这种"待定尝试"的想法在第5节中还将提到.例如,为了证明关于线段的等式

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{e}{f} \tag{1}$$

这 a,b,c,d,e,f 都是已知图形中的线段长,可以引入待定线段 x,使得

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{x} \tag{2}$$

这较(1)要简单.我们设法找出这样的线段 x(例如,利用或制造相似关系),并证明

$$\frac{c}{d} = \frac{x}{f} \tag{3}$$

最后将(2)、(3)相乘即得求证等式(1).

【例5】 已知圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC、BD 相交于 M.证明

$$\frac{AB \cdot AD}{BC \cdot CD} = \frac{AM}{CM}$$

证 如图8,令

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AM}{x}$$

利用相似形不难找到末知线段 x. 这只要作 ME 交 AB 于 E，使$\angle AME=\angle ABC$. 则$\triangle ABC\sim\triangle AME$，从而

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AM}{ME} \tag{1}$$

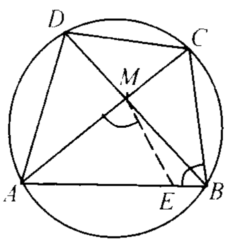


图 8

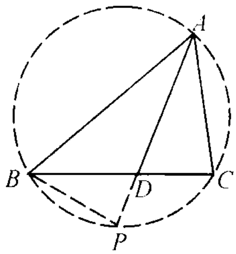


图 9

即 ME 就是要找的末知线段 x. 连结 CE，由$\angle AME=\angle ABC$，知 B,C,M,E 四点共圆，从而

$$\angle ACE=\angle ABD=\angle ACD$$

又

$$\angle ADC=180^\circ-\angle ABC=180^\circ-\angle AME=\angle CME$$

所以$\triangle ADC\backsim\triangle EMC$，于是

$$\frac{AD}{CD}=\frac{EM}{CM} \tag{2}$$

(1)、(2)两式相乘即得欲证等式.

【例 6】 如图 9，设 AD 是$\triangle ABC$ 的角平分线，证明

$$AD^2=AB\cdot AC-BD\cdot CD$$

证 引进待定线段 x、y，满足

$$\begin{cases} AB \cdot AC = AD \cdot x & (1) \\ BD \cdot CD = AD \cdot y & (2) \\ x - y = AD & (3) \end{cases}$$

显然,从这三个式子消去 x,y,即得欲证等式.

由(3)式,可将 AD 延长至(待定)点 P,令 $AP=x$,$PD=y$,则 $x-y=AD$. 这时(2)式成为

$$BD \cdot CD = AD \cdot PD$$

即 P,A,B,C 四点共圆,由此得到证明本题的辅助线的作法:延长 AD 使与$\triangle ABC$ 的外接圆相交于点 P,连结 BP. 由$\triangle ABP \backsim \triangle ADC$,即证得(1)式. 请读者用综合法来表述我们的论证.

完善图形是几何论证中非常有用的辅助手段,特别是常把半个图形完善成整个图形(例如将等腰直角三角形完善成正方形;把半圆完善为圆;等等),便于利用对称性,以找到证题的途径.

【例 7】 如图 10,在三角形 ABC 中,D 是 AB 的中点,点 E,F 分别在 AC,BC 上,证明

$$(\triangle DEF) \leqslant (\triangle ADE) + (\triangle BDF)$$

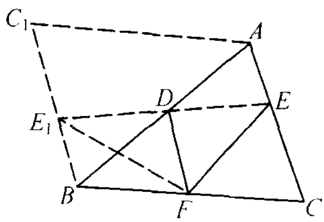


图 10

证 我们先将三角形 ABC 完善成平行四边形. 作 $AC_1 /\!/ BC$,使 $AC_1 = BC$,得到平行四边形 AC_1BC.

在 BC_1 上取 E_1 点,使 $BE_1=AE$,易于证明

$$\triangle ADE \cong \triangle BDE_1$$

故$\angle ADE=\angle BDE_1$. 从而 E,D,E_1 三点共线，所以

$$\begin{aligned}(\triangle DEF)=(\triangle DE_1F)&\leqslant(BFDE_1)\\&=(\triangle BDE_1)+(\triangle BDF)\\&=(\triangle ADE)+(\triangle BDF)\end{aligned}$$

【例 8】 如图 11，设 $ABCD$ 为半圆，AC 与 BD 相交于 E，$EF\perp AD$（F 为垂足），证明

$$AC\cdot BD+AB\cdot CD=AD(BF+FC)$$

证 将半圆完善成整个圆，作 $CC_1\perp AD$ 交圆于另一点 C_1；连结 AC_1，FC_1，DC_1，则

$$CF=C_1F, AC=AC_1, CD=C_1D$$

由 B,E,F,A 四点共圆及 C,E,F,D 四点共圆，有

$$\begin{aligned}\angle BFA&=\angle BEA=\angle CED\\&=\angle CFD=\angle C_1FD\end{aligned}$$

故 B,F,C 三点共线. 且

$$BF+FC=BC_1$$

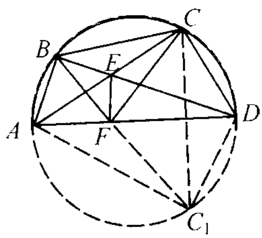


图 11

由托莱密定理，得

$$AB\cdot C_1D+AC_1\cdot BD=AD\cdot BC_1$$

即

$$AB\cdot CD+AC\cdot BD=AD(BF+FC)$$

完善图形这种构造性思想，也可用来帮助解决某些立体几何问题. 我们特别提一下把四面体完善成平行六面体的两种方法，参看图 12 及图 13（图中 $A\text{-}BCD$ 是给定的四

面体).

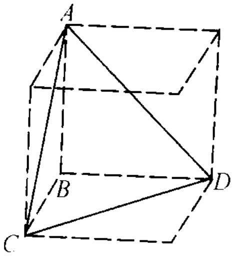


图 12

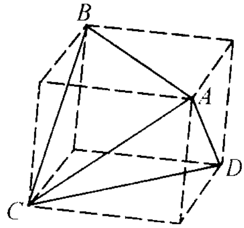


图 13

【例 9】 如图 14,已知四面体 A_1-ABD 中,棱 AA_1,AB 及 AD 互相垂直,且它们的长度分别为 a,b,c.

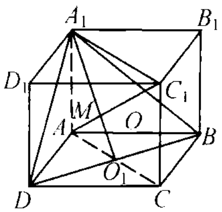


图 14

1)求证:顶点 A、$\triangle A_1BD$ 的重心 M 及此四面体的外接球的球心 O 共线.

2)求外接球的半径.

证 1) 如图,将四面体 A_1-ABD 完善为直平行六面体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$. 于是,四面体的外接球,也是直平行六面体的外接球. 且外接球球心 O 位于直平行六面体的对角线 AC_1 上.

设 AC,BD 相交于 O_1,则 AO_1 是$\triangle ABD$ 的边 BD 上的中线。设 AO_1 与 AC_1 相交于 M(AO_1,AC_1 都在矩形 ACC_1A_1 所在平面上). 易知

$$\triangle A_1C_1M \sim \triangle AO_1M$$

故

$$\frac{A_1M}{MO_1}=\frac{AC_1}{AO_1}=2$$

所以,M 即是$\triangle ABD$ 的重心,这就证得 A,M,O 三点共线.

2)由前面的讨论可知,外接球的直径等于直平行六面体的对角线 AC_1 之长,即等于 $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.