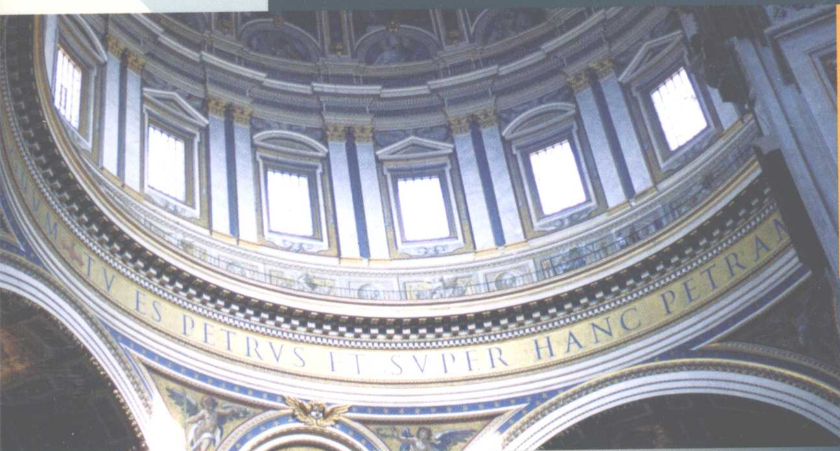
高等学校教材

高等数学 上册

施庆生　许志成　朱耀亮　薛巧玲　主编



高等教育出版社
Higher Education Press

高等学校教材

高 等 数 学

上 册

施庆生　许志成　朱耀亮　薛巧玲　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是根据最新的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》编写的高等学校教材。

全书分上、下两册出版，上册包括一元函数微积分和常微分方程，下册包括空间解析几何、多元函数微积分和无穷级数。为使读者尽早接触数学软件并了解其应用，本书附录还编写了 Mathematica 简介及其简单应用。

本书选材力求少而精，注重微积分的数学思想及其实际背景的介绍，注意与目前中学课程改革的衔接；为适应分层次教学的需要，对有关内容和习题进行了分类处理；在每一章的结尾附有小结和复习练习题，帮助读者进一步复习巩固所学知识。

本书说理浅显、通俗易懂，并有较好的系统性与完整性，可作为高等院校理（非数学专业）、工、农各类本科专业学生学习"高等数学"课程的教材，也可供社会读者阅读。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册/施庆生等主编. —北京：高等教育出版社，2009. 7

ISBN 978-7-04-027233-8

Ⅰ. 高…　Ⅱ. 施…　Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材
Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 084798 号

策划编辑 王　强　**责任编辑** 李华英　**封面设计** 赵　阳　**责任绘图** 吴文信
版式设计 王　莹　**责任校对** 杨凤玲　**责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京宏伟双华印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2009 年 7 月第 1 版
印　　张	22.5	印　　次	2009 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	420 000	定　　价	24.30 元

物料号　27233-00

应用型本科数学系列教材编委会

总 序

为满足社会对应用型人才培养的需求，配合教育部“质量工程”的实施，深入探讨应用型人才培养以及相应的教学内容与课程体系改革工作，切实提高应用型人才培养质量，以全国高等学校教学研究中心批准立项的全国教育科学“十一五”国家课题——“我国高校应用型人才培养模式研究”课题为载体，由南京工业大学牵头，南京信息工程大学和江苏大学共同参与策划了本系列教材。

本系列教材包括高等数学、线性代数和概率论与数理统计三门课程，全部内容讲授约需260学时，其内容体现出教学改革的成果和教学内容的优化，主要特点如下：

1. 思路清晰、逻辑严谨、概念准确、便于自学；

2. 适当降低理论深度，削减了一些枝节内容，突出数学知识实用的分析和计算方法，着重基本技能和基本计算的训练，不过分追求技巧；

3. 强调教学内容的思想性，着力揭示基本概念的本质和解决问题的思想方法；

4. 注意应用基本理论和基本方法分析解决实际问题的思想方法，培养学生应用数学方法解决实际问题的能力；

5. 各章节习题作了分类编排，为便于学生复习和巩固所学知识，每章均配有小结和复习练习题；

6. 根据内容特点，引入数学软件 Mathematica 和 MATLAB 的介绍，并给出了有关案例应用，使学生能较早地接触数学软件的学习，为今后运用数学软件解决实际问题打下基础。

本系列教材的编写得到了全国高等学校教学研究中心“十一五”国家课题“我国高校应用型人才培养模式研究”的重点课题资助和高等教育出版社高等理工出版中心数学分社的领导和编辑们的大力支持，在此表示衷心感谢。

应用型本科数学系列教材编委会

2009年3月

前　言

本书内容包括一元函数微积分、多元函数微积分、常微分方程、空间解析几何和无穷级数,可作为高等院校工科、理科(非数学专业)各专业的"高等数学"教材。

高等数学是相关专业的学生进行专业学习和研究必不可少的数学工具,为使读者在今后的工作中更新数学知识、学习现代数学方法奠定良好的基础,本书选材力求少而精,注意与目前中学课程改革的衔接,注重微积分的数学思想及其实际背景的介绍,渗透现代数学思想,加强应用能力的培养。在一元函数微积分部分对不定积分进行了弱化处理,使得内容精练简洁,在多元函数微积分部分注意利用向量知识来表述分析中的有关内容,这样处理符合现代数学的发展趋势,有利于培养学生综合应用数学知识的能力。为使读者尽早接触数学软件并了解其应用,尝试微积分内容与现代计算机功能的有机结合,本书在附录中编写了 Mathematica 简介及其简单应用,为读者今后进一步深入学习开启了窗口。

本书分上、下两册,上册包含一元函数微积分与常微分方程,下册包含空间解析几何、多元函数微积分和无穷级数等,部分带 * 号的内容供选学。习题配置是教材的重要组成部分,是实现教学要求、提高教学质量的重要环节。本书习题题型全面,分为(A)、(B)两个层次,以适应不同教学层次的学生选用,在每一章的结尾有小结和复习练习题,帮助读者进一步复习巩固所学知识,在书末给出了全部习题的答案,以便于教师和学生参考。

本书上册由施庆生(第零、一章)、许志成(第二、三章)、朱耀亮(第四、五、六章)和薛巧玲(第七章)编写,下册由陈晓龙(第八、九章)、王顺凤(第十、十一章)和张建伟(第十二章)编写,附录由张维荣编写,郭金吉和许丙胜也参与了部分工作。本书上册由施庆生统稿,下册由王顺凤统稿,全书最后由施庆生定稿。本书的编写得到全国高等学校教学研究中心"十一五"国家课题"我国高校应用型人才培养模式研究"的资助和南京工业大学数学基础课教学平台基金以及南京信息工程大学滨江学院教改工程"高等数学"课题的资助与支持,高等教育出版社高等理工出版中心数学分社的领导和编辑们对本教材的编辑出版工作给予了精心指导和大力支持,在此一并表示感谢。

编　者

2009 年 3 月于南京

目录

第零章　预备知识

作为学习高等数学的预备知识，我们在本章中讲述集合、函数、极坐标和行列式等内容，这些知识虽然有些在中学学过，但有必要进一步巩固，为学好高等数学奠定坚实的基础.

第一节　集　　合

集合是数学中的一个基本概念，面对大千世界，人们总是把林林总总的客观事物按其某一方面的特性进行适当划分，再分门别类地加以研究. 集合的概念正是这一原则最基本的体现.

一、集合概念

什么是**集合**，就人们的日常生活而言这几乎是不言自明的概念，它是指具有某种特定性质的对象组成的总体，这些对象就称为该集合的**元素**. 例如，一个班级里的全体同学就构成一个集合，每一个同学都是该集合中的一个元素. 通常用大写字母 $A,B,X,Y,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,x,y,\cdots$ 表示元素.

若 x 是集合 A 的元素，则称 x 属于 A，记为 $x\in A$；若 y 不是集合 B 的元素，则称 y 不属于 B，记为 $y\overline{\in} B$(或 $y\notin B$).

自然数的集合、正整数的集合、整数的集合、有理数的集合、实数的集合是我们常用的集合，习惯上分别用字母 $\mathbf{N},\mathbf{N}^+,\mathbf{Z},\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{R}$ 表示.

表示集合的方式通常有两种. 一种是列举法，就是把集合的元素逐一列举出来. 如由 a,b,c 三个字母组成的集合 A 可表示为 $A=\{a,b,c\}$. 有些集合的元素无法一一列举出来，但如果能将它们的变化规律表示出来，也可用列举法表示，如自然数集合 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$. 另一种方法是描述法. 设集合 A 是由具有某种性质 P 的元素构成，则 A 可表示为 $A=\{x\mid x$ 具有性质 $P\}$. 如 $x^2-1=0$ 的解集 X 可表为 $X=\{x\mid x^2-1=0\}$. 平面上单位圆上点的集合 M 可表示为 $M=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$.

注意：集合中的元素之间没有次序关系，且同一元素的重复出现不具有任何意义. 如 $\{a,b\}$，$\{b,a\}$ 与 $\{a,b,a\}$ 表示同一集合.

有一类特殊的集合，它不包含任何元素，如 $\{x\mid x\in\mathbf{R},x^2+1=0\}$，我们称之为**空集**，记为 $\varnothing$.

若集合 A 由有限个元素组成,则称集合 A 是有限集. 不是有限集的集合称为**无限集**,如前面说的 $\mathbf{N},\mathbf{N}^+,\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R}$ 都是无限集.

如果一个无限集中的元素可以按某种规律排成一个序列,或者说这个集合可以表示为

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\},$$

则称其为**可列集**(或**可数集**),如 $\mathbf{N},\mathbf{N}^+,\mathbf{Z},\mathbf{Q}$ 是可列集,$\{x\mid\sin x=0\}$ 是可列集,而 $\{0\leqslant x\leqslant 1\}$ 不是可列集.

设 A,B 是两个集合,如果 A 的所有元素都属于 B,则称 A 是 B 的**子集**,记为 $A\subset B$(或 $B\supset A$). 我们规定对任一集合 A,$\varnothing\subset A$. 显然,对任一集合 A,$A\subset A$. 如果 A 是 B 的一个子集,即 $A\subset B$,且 B 中至少存在一个元素 $x\overline{\in}A$,则称 A 是 B 的一个**真子集**. 如 $A=\{a,b,c\}$,则 A 有 2^3 个子集:

$$\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}.$$

真子集有 2^3-1 个.

如果 $A\subset B$,$B\subset A$,则称**集合 A 与 B 相等**,记为 $A=B$.

二、集合的运算

集合的基本运算有并、交、差、补四种.

设 A,B 为两个集合,我们定义并、交、差如下:

$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$;

$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$;

$A\backslash B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\overline{\in}B\}$.

设我们在集合 X 中讨论问题,$A\subset X$,则集合 A 关于 X 的补集 A_X^C 定义为 $A_X^C=X\backslash A$. 在不会发生混淆的情况下,通常将 A_X^C 简记为 A^C.

集合的上述四种运算具有下列性质:

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A.$

(2) 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$

(3) 分配律 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C),$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$

(4) $A\cup A_X^C=X,A\cap A_X^C=\varnothing.$

(5) $A\backslash B=A\cap B^C.$

(6) 对偶律 $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C,(A\cap B)^C=A^C\cup B^C.$

三、区间和邻域

设 $a,b\in\mathbf{R}(a<b)$ 是两个实数,称满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合为

以 a,b 为端点的**开区间**,记为 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$;类似定义以 a,b 为端点的**闭区间**和**半开半闭区间**如下:

$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$;

$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$;

$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$.

如图 1,上述几类区间长度是有限的,称为有限区间,$b-a$ 叫做这些**区间的长度**.

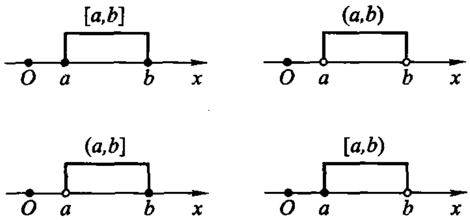


图 1

除此之外,还有下列几类无限区间(如图 2):

$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$;

$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$;

$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$;

$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$;

$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}=\mathbf{R}$.

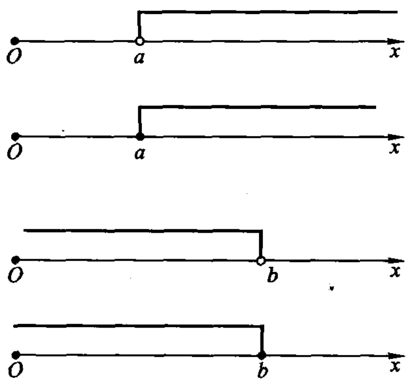


图 2

以后在不需要指明所论区间是否包含端点,以及是有限区间还是无限区间的场合,我们就简单地称它为"**区间**".

邻域也是经常用到的概念(如图 3).

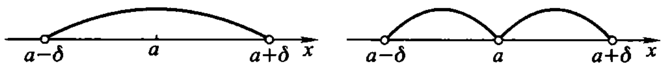
设 δ 是任一正数,则称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 **δ 邻域**,记为 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

这里点 a 称为**此邻域的中心**,δ 称为**此邻域的半径**,$U(a,\delta)$ 也常写为

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

有时不需指明点 a 的邻域的半径 δ,则用 $U(a)$ 表示 a 的某一邻域. 有时需要把邻域中心 a 点去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,称为点 a 的**去心 δ 邻域**,记为 $\mathring{U}(a,\delta)$,即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$.



邻域$U(a,\delta)$ 去心邻域$\mathring{U}(a,\delta)$

图 3

第二节 函 数

一、函数定义

在某一个问题中，往往同时出现好几个变量，而这些变量又往往是相互联系、相互依赖的，如水达沸点的温度取决（依赖）于海拔高度（高度升高沸点降低）. 变量之间的这种确定的依赖关系，就叫做**函数**. 现在我们先就两个变量的情况举几个例子.

例 1 考虑圆面积 S 与它的半径 r 之间的关系：

$$S=\pi r^2, \tag{1}$$

当半径 r 在$(0,+\infty)$内任意取定一个数值时，由上式就可以确定圆面积 S.

例 2 初速度为零的自由落体运动位移与时间的关系为

$$s=\frac{1}{2}gt^2, \tag{2}$$

其中 g 为重力加速度. 假定物体着地的时刻为 T，则在$[0,T]$上任意取定一个数值时，由上式就可以确定相应位移 s.

例 3 经过原点$(0,0)$，$(1,1)$与$(-1,1)$的抛物线上点(x,y)的坐标 y 与 x 之间关系为

$$y=x^2, \tag{3}$$

对$(-\infty,+\infty)$内任意取定一个数值 x，由上式就可以确定 y.

我们还可以举出许多例子，撇开各个例子的实际背景，其共同本质是：它们都表达了两个变量之间的依赖关系，这种依赖关系给出了一种对应法则，即一个变量取定了一个数值，那么按照这种确定的对应法则，就可以确定另一变量的一个相应值. 由此就可以抽象出函数的一般概念.

定义 **设有两个变量 x 和 y，D 是一个给定的数集，如果对于每一个 $x\in D$，变量 y 按照一确定的法则 f，总有唯一确定的数值和它对应，则称 f 是定义在 D 上的函数，常记作 $y=f(x)$，数集 D 叫做这个函数的定义域，x 叫做自变量，y 叫做因变量.**

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $y\big|_{x=x_0}$ 或 $f(x_0)$，当 x 取遍 D 的每个数值时，对应的函数值全体组成的数集：

$$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为**函数的值域**.

为了理解这个定义，我们说明以下几点：

1. 函数关系

函数 $y=f(x)$ 中的"f"，代表从变量 x 到变量 y 的对应法则（或对应关系），称为**函数关系**，至于这种对应法则是什么？由具体问题确定. 如例 1 ~ 例 3 中对应法则分别是(1) ~ (3)式.

根据函数定义，对定义域内任一数值，对应的函数值只有一个，此时也称函数为**单值函数**.

如果对 D 内任意一数值，按照某种法则对应的数值不止一个，习惯上称这种法则确定了一个**多值函数**. 例如由方程 $x^2+y^2=a^2$ 在区间 $[-a,a]$ 上确定了 y 是 x 的多值函数，对 $(-a,a)$ 内任一 x 存在两个 y 与之对应. 对多值函数我们常将其分为几个单值分支进行讨论.

今后凡是没有特别说明时，函数都是指单值函数.

最后请注意，$f(x)$ 是一个完整的记号，且函数关系 f 也可以用其他字母表示，如 $g,F,\varphi,\cdots$. 在同一场合，为不引起混淆，不同的函数应该用不同的记号.

2. 函数的两个要素

在函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 中，由于定义域和对应法则唯一确定了函数的值域 W（反之不真），因此我们称函数的定义域和对应法则为函数的**两个要素**.

在数学中如不考虑函数的实际含义，一般来说函数的定义域就是使函数表达式 $f(x)$ 有意义的自变量 x 全体组成的集合. 例如 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域为 $[-1,1]$；$y=\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域为 $(-1,0)\cup(0,1)$. 如考虑其实际含义，就根据其实际含义确定其定义域.

如果两个函数定义域与对应法则都相同，则它们表示同一个函数，至于此时自变量与因变量用什么字母倒是无关紧要的. 例如 $y=\sin x,x\in(-\infty,+\infty)$ 与 $u=\sin v,v\in(-\infty,+\infty)$ 表示的是同一个函数.

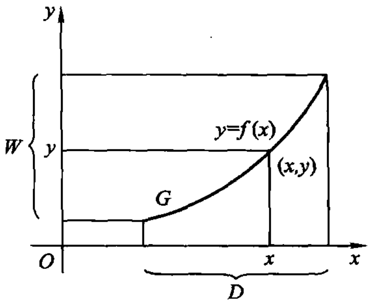


图 4

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，对于任意取定的 $x\in D$，对应的函数值为 $y=f(x)$，这样以 x 为横坐标，y 为纵坐标就得到 xOy 平面上确定的

一点(x,y),当x取遍D上每一个数值时,就得到点(x,y)的一个集合G:

$$G=\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}.$$

这个点集G称为函数$y=f(x)$的图形(如图4),图中W表示函数$y=f(x)$的值域.

下面再举几个函数的例子.

例4　函数$y=2$的定义域为$D=(-\infty,+\infty)$,值域$W=\{2\}$,它的图形是一条平行于x轴的直线,如图5.

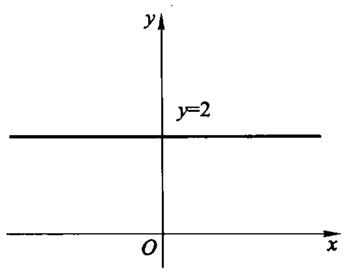


图5

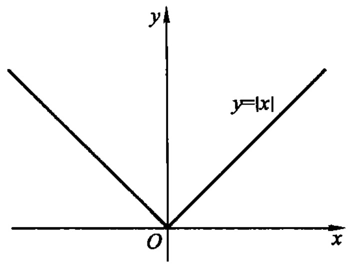


图6

例5　函数$y=|x|=\begin{cases}x,x\geqslant 0,\\-x,x<0\end{cases}$的定义域为$D=(-\infty,+\infty)$,值域$W=[0,+\infty)$,它的图形如图6所示.这个函数称为绝对值函数.

例6　函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1,x>0,\\0,x=0,\\-1,x<0\end{cases}$$

称为符号函数,它的定义域为$D=(-\infty,+\infty)$,值域$W=\{-1,0,1\}$,它的图形如图7所示.对$\forall x\in\mathbf{R}$,有$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$.

例7　取整函数:设x为任一实数,称不超过x的最大整数为x的整数部分,记作$[x]$.把x看作自变量,则称

$$y=[x]=n,\quad n\leqslant x<n+1,\quad n\in\mathbf{Z}$$

为取整函数,其定义域为$D=(-\infty,+\infty)$,值域$W=\mathbf{Z}$.

例如$\left[\frac{5}{7}\right]=0,[\sqrt{2}]=1,[3]=3,[0]=0,[-1]=-1,[-2.3]=-3$.取整函数图形如图8.

在例1~例5中的函数都可用一个式子表示,而例6、例7中的函数要用几个式子表示.这种在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同表达式表示的函数,称为**分段表示的函数**,简称**分段函数**.请注意,分段函数不是几个函数,而是

一个函数,只是在定义域不同的变化范围中具有不同的表达式. 对分段函数求函数值 $y|_{x=x_0}=f(x_0)$,首先应看 x_0 在何范围内,再根据相应范围的表达式求函数值.

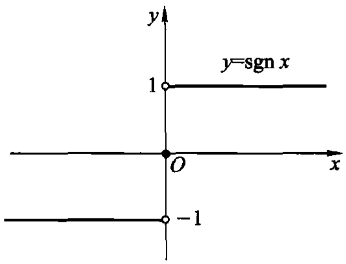


图 7

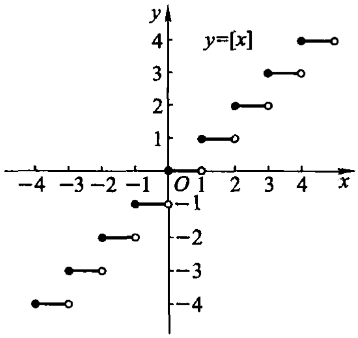


图 8

例 8　函数 $y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x, x>1\end{cases}$ 是分段函数,其定义域为 $[0,+\infty)$,在 $[0,1]$ 上的表达式为 $2\sqrt{x}$,在 $(1,+\infty)$ 上表达式为 $1+x$,$x=1$ 为分段函数的分段点. 此外,

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2},\quad f(1)=2\sqrt{1}=2,\quad f(2)=1+2=3.$$

在例 1 ~ 例 8 中,不管是用一个式子表示的函数,还是分段函数,它们有一个共同特点:函数形式均为 $y=f(x)$,即因变量 y 单独在等式一边,而等式的另一边是只含自变量 x 的表达式,这种表示方法称为显式表示,这时称函数 $y=f(x)$ 为**显函数**. 后面我们还会介绍函数的隐式表示,即隐函数和用参数方程表示的函数.

除此之外,在工程技术上,还经常用表格或图形表示函数.

二、函数的几种特性

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,$X(\subset D)$ 非空.

若 $\exists M>0$,$\forall x\in X$,使 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界;否则,即 $\forall M>0$,$\exists x_1\in X$,使 $|f(x_1)|>M$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

若 $\exists K_1$,$\forall x\in X$,使 $f(x)\leqslant K_1$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界,而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界.

若$\exists K_2$，$\forall x\in X$，使$f(x)\geqslant K_2$，则称函数$f(x)$在X上有下界，而K_2称为函数$f(x)$在X上的一个下界.

显然，函数$f(x)$在X上有界$\Leftrightarrow f(x)$在X上既有上界又有下界，即$\exists K_1,K_2$，对$\forall x\in X$有$K_2\leqslant f(x)\leqslant K_1$.

例如，函数$f(x)=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内有界，因为$|\sin x|\leqslant 1$.

函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1)$内没有上界，但有下界，如1就是它的一个下界. 因为$\forall M>1$，取$x=\dfrac{1}{2M}$，则$x\in(0,1)$，但

$$\left|f\left(\frac{1}{2M}\right)\right|=2M>M,$$

因此$f(x)=\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$内无上界.

请注意，在上述定义中的M,K_1,K_2不是唯一的. 此外，讲一个函数有界或有上界，或有下界，必须指明数集，否则是毫无意义的. 如笼统讲$f(x)=\dfrac{1}{x}$是否有界是无意义的，因为$\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$内无界，但在$(1,2)$内却是有界的.

2. 函数的单调性

设函数$f(x)$的定义域为D，区间$I\subset D$，如果对$\forall x_1,x_2\in I,x_1<x_2$恒有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数$f(x)$在区间$I$上是**单调增加的**；如果对$\forall x_1,x_2\in I,x_1<x_2$恒有$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数$f(x)$在区间$I$上是**单调减少的**. 单调增加和单调减少函数统称为**单调函数**.

例如函数$f(x)=x^2$在$(-\infty,0]$上是单调减少的，在$[0,+\infty)$上是单调增加的，在$(-\infty,+\infty)$内$f(x)=x^2$不是单调的.

又如$f(x)=x^3$在$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的.

3. 函数的奇偶性

设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称（即若$x\in D$，则$-x\in D$），如果$\forall x\in D$，恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称$f(x)$为**偶函数**；如果$\forall x\in D$，恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称$f(x)$为**奇函数**.

偶函数的图形关于y轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

例 9 判断函数$f(x)=\dfrac{1}{1+a^x}-\dfrac{1}{2}(a>0,a\neq 1)$的奇偶性.