複变数導論及其應用

譯者　林海明　林克倫

上海大路出版社出版

複變數導論及其應用

原著者 R. V. 邱吉爾
譯　者 林海明 林克倫

上海大路出版社出版

前　　言

本書係根據 Ruel V. Churchill 著 Introduction to Complex Variables and Applications 一書 1948 年版譯出，可供大學理工科應用數學的數材或參考書及學習過微積分學的科技工作者進修參考之用。

本書敍述複變數的基本理論，採用留數理論與圍線積分去計算實積分的值及保角變換對於理工上實際問題的應用。

對於譯本的錯誤與不妥的地方，歡迎讀者提出指正與批評。

譯　者 一九五四年於上海交通大學

複變數導論及其應用　25 開　20 萬字　250 用紙面　定價 ¥20,000

原書名	Introduction to Complex Variables and Applications
原著者	R. V. 邱吉爾
譯者	林海明　林克倫
出版者 發行者	大路出版社 上海虎丘路一二八號
印刷者	周順記印刷所 上海惠民路三一八號
經售處	全國各地公私營書店

1954 年 1 月初版(印數) 0001—1500 冊

原　序

複變數函數的理論是數學分析的一個基本部份． 幾乎在數學每個領域裏都可以看到它的影響． 除了它在純粹數學上的卓越性與它的優美的邏輯結構之外，這理論對於研究應用數學的人們、工程師及科學工作者是一個很有用的數學工具．

本書第一目的是來敍述複變數應用上最必要的理論部份的邏輯推展． 除去某些幾何概念由直覺就可明白以外，書中講解力求嚴正與它自身的完整． 證明方法的選擇與講述材料的安排，都是在簡單和短省的原則上進行的；因此，有時在優緻方面祇得犧牲一點了． 在一個學期的課程裏，如果留數理論與保角作圖是重點的話，那在它們前面的理論上所能夠化的時間很有限，因而這部份的編寫必須是極其簡要的．

在複變數理論大體上講過以後，第二目的是就它的應用作一簡短的介紹． 這部份包含：採用留數理論與圍線積分去計算實積分的值，及保角作圖對於位、穩定溫度與流體流動的應用． 在保角作圖的應用中，講了偏微分方程上求解邊界值問題的經典方法的一法，這裏祇限於兩個自變數的拉普拉斯方程．本書與拙著"福里哀級數及邊界值問題"及"工程上近代運算數學"兩書可以說是一套的． 在那兩本書裏講到求解線性邊界值問題的另外兩個經典方法． 在最後一本書裏並討論到複變數在拉普拉斯變換上的應用．

基本結果都寫成定理形式． 為了闡明理論與應用，本書供給了許多例題與習題． 附錄 II 備有保角變換簡表供讀者查用．

在本書的編寫過程中，前面九章曾經在密歇根大學當做三小時一學期的課程的課本用過多年。班上同學主要地是研究生及一些數學、物理及工程幾系的四年級學生。用這本書的讀者最好有過一學期高等微積分的準備。書中有若干比較簡單的材料，實不需要講授，讀者自己去讀，不會發生困難。本書最後三章的一部份，可以包含在一學期的課程裏。

作者感謝 E. D. Rainville 與 K. Kaplan 兩位教授，他們都曾採用本書原稿做教本並提供過許多寶貴意見。Rainville 教授幫助寫一部份書稿，尤為感激。T. H. Hildebrandt 教授校讀初稿並提供很多改進意見，尤其他與作者一同安排原稿作為教本連續地用了多年，應該特別致謝。最後，對於鼓勵作者來寫這本書的其他同事和同學們以及在書稿的打字工作上 Betty Eastman 女士的幫助，都致謝意。

R. V. 邱吉爾

一九四八年十月

目　錄

第一章 複 數

1. 定義 複數 z 是一個適用某種運算律的實數 x, y 的序偶. 它可寫成

$$z=x+iy \quad 或 \quad z=x+yi,$$

式中 i 叫做**虛單位**. 由上面記法, 當 $y=0$ 時, 複數 z 變成實數 x; 就是,複數包含所有實數

$$x+0i=x$$

在內. 因而,當 $y=0$ 時,複數的運算律必須成為實數的運算律.

當 $x=0$ 與 $y=1$ 時,複數 z 是虛單位 i; 就是,

$$0+1i=i.$$

虛單位 i 的實倍數, $yi=0+yi$, 叫做**純虛數**. 複數 $x+iy$, 在 $y\neq 0$ 時,也常叫做**虛數**.

實數 x 與 y 叫做複數 z 的**實分值**與**虛分值**; 也有把它們叫做 z 的**實部**與 z 的**虛部的係數**. 有時因便利起見, 採用下面記法去分別指示複數 z 的實分值與虛分值,

$$\mathcal{R}(z)=x, \quad \mathcal{I}(z)=y.$$

兩個複數

$$z_1=x_1+iy_1, \quad z_2=x_2+iy_2$$

相等, 必須且祇須它們的實分值與實分值相等, 虛分值與虛分值相等; 卽 $z_1=z_2$ 是說 $x_1=x_2$ 與 $y_1=y_2$. 旣然 $0=0+0i$, 所以複數 z 是零,必須且祇須它的實分值與虛分值都是零; 卽 $x+iy=0$ 是說 $x=y=0$.

2. 基本運算 在複數的定義中，尙含有另外兩個特性：這兩個特性是複數適用的加法律與乘法律． 茲令 z_1 與 z_2 是任何兩個複數，

$$z_1=x_1+iy_1,\quad z_2=x_2+iy_2.$$

它們的和是一複數；這複數的實分值是 z_1 與 z_2 的實分值的和，虛分值是 z_1 與 z_2 的虛分值的和；就是，

(1) $$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2).$$

兩個複數 z_1 與 z_2 的積是一個由下面公式表示的複數，

(2) $$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

當 $z_1=z_2=i$，結果是虛單位 i 自身的乘積，等於 -1；就是，

(3) $$i^2=-1.$$

乘法律公式 (2)，由下一積式

$$(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)$$

應用實數的運算律，而以 -1 替代 i^2，卽可展得．

減法運算是加法的逆運算． 因此，如 z_1-z_2 的差叫做 z_3，

$$z_1-z_2=z_3,$$

那末，z_3 就是加上 z_2 等於 z_1 的一個複數，

$$z_2+z_3=z_1.$$

由加法律公式 (1)，

$$(x_2+x_3)+i(y_2+y_3)=x_1+iy_1,$$

於是

$$x_2+x_3=x_1,\quad y_2+y_3=y_1.$$

解 x_3 與 y_3，我們就得到減法律

(4) $$z_3=z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

這減法律當然我們可以把它先行寫出，然後從它看出減法是加法的逆運算．

除法是乘法的逆運算；就是，$\dfrac{z_1}{z_2}=z_3$ 是說 $z_2z_3=z_1$． 由乘法律 (2)，

我們可以寫出

(5) $$(x_2x_3-y_2y_3)+i(x_2y_3+x_3y_2)=x_1+iy_1.$$

使這方程兩邊的對應部份相等，我們得着含未知數 x_3 與 y_3 的兩個聯立實方程．由它們的解答，就得到除法律，

(6) $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} \qquad (z_2\neq 0).$$

必須注意，下一分式

$$\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}$$

的分子與分母同乘以 x_2-iy_2，再應用實數的運算律把乘積展開，並以 -1 替代 i^2，結果就是式(6)．

用零除是沒有意義的．

舉例，應用四種基本運算，把下式簡化成 $x+iy$ 形式，

$$\frac{(1+i)(-1+2i)+(2-i)}{2-3i}-2i=\frac{(-3+i)+(2-i)}{2-3i}-2i$$

$$=\frac{(-1)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}-2i=\frac{-2-3i}{4+9}-2i$$

$$=-\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i-2i=-\frac{2}{13}-\frac{29}{13}i.$$

3. 代數律 由上面兩節複數的定義，可知複數適用代數的結合律、交換律與分配律．

複數的加法與乘法的交換律，

(1) $$z_1+z_2=z_2+z_1,$$

(2) $$z_1z_2=z_2z_1,$$

是根據複數的加法與乘法的規定及實數適用這些交換律的事實．例如，

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)=(x_2+x_1)+i(y_2+y_1)=z_2+z_1.$$

至於乘法交換律(2)以及下面的結合律與分配律的證明，已列入習題，由讀者自證．

加法與乘法的結合律是

(3) $$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3,$$

(4) $$z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3.$$

分配律是

(5) $$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

由以前所下定義，尙有另一特性須加注意． 如果兩個複數的積是零，那末，其中至少有一個複數是零． 就是，

(6) $$z_1z_2=0 \quad 是說 \quad z_1=0, \quad 或 \quad z_2=0, \quad 或 \quad z_1=z_2=0.$$

由乘法律 (2) 得到：如果 $z_1z_2=0$，則

(7) $$x_1x_2-y_1y_2=0 \quad 與 \quad x_1y_2+x_2y_1=0$$

因此

$$(x_1x_2-y_1y_2)^2+(x_1y_2+x_2y_1)^2=0.$$

上式再化爲

$$(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)=0.$$

由這式就可推得 $x_1=y_1=0$，或 $x_2=y_2=0$，或 $x_1=y_1=x_2=y_2=0$.

習 題

將下列 1 到 8 各題化成 $x+iy$ 形式：

1. $(3+2i)-(4-i)$. 答. $-1+3i$.
2. $(2-3i)(-2+i)$. 答. $-1+8i$.
3. $i(2-7i)$.
4. $\dfrac{1+i}{2-i}$.
5. $(1-i)^4$ 答. -4.
6. $(3+i)(3-i)\left(\dfrac{2+i}{10}\right)$ 答. $2+i$.
7. $\dfrac{1+2i}{3-4i}+\dfrac{2-i}{5i}$ 答. $-\dfrac{2}{5}$.
8. $\dfrac{2i}{(i-1)(i-2)(i-3)}$
9. 表明 $z=1+i$ 與 $z=1-i$ 都適合方程 $z^2-2z+2=0$.
10. 表明 $z=(-1\pm i\sqrt{2})/3$ 都適合方程 $3z^2+2z+1=0$.

①关于此处的叙述宜参阅 Bronwell《Advanced Mathematics in Physics and Engineering》p.20脚注.

11. 應用兩個複數的積的定義,證明如果 k 是一實數,則

$$kz=kx+iky.$$

並注意 $k=-1$ 的特殊情形;由這情形可知變 z 的號就是變 x 與 y 兩者的號.

12. 證明:如果 $z_1z_2z_3=0$, 則 $z_1z_2z_3$ 三者之中至少有一個是零.

13. 試證加法結合律 $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$.

14. 試證乘法交換律 $z_1z_2=z_2z_1$.

15. 試證乘法結合律 $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$.

16. 試證分配律 $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$.

17. 證明 $z_1(z_2+z_3+z_4)=z_1z_2+z_1z_3+z_1z_4$.

4. 幾何表示　實數 (x,y) 的序偶與複數 $x+iy$ 之間有一一對應關係. 例如,與實數序偶 $(2,-3)$, 或 $x=2$, $y=-3$ 對應的複數是 $2-3i$, 反過來說也是一樣. 於是, 可使複數 $x+iy$ 與 xy 平面上具有正交笛卡兒坐標 (x, y) 的一點相結合, 就是, 每點 (x,y) 有一複數 $z=x+iy$ 與之對應及每一複數 z 有一定點與之對應. 在表示複數時,所用 xy 平面及其上表示複數的點叫做阿千德圖. 這面有時簡單地叫做**複平面**或 **z 平面**.

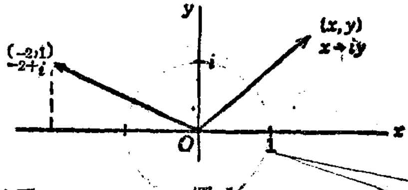

圖 1

①

例如,複數 $-2+i$ 用平面上點 $(-2,1)$ 表示(圖 1). 複數 $z=0$ 用原點表示,實數用 x 軸上的點表示,及純虛數用 y 軸上的點表示.

同時,複數 z 可以看做一個由原點到點 (x, y) 的矢量; 也可以看做一個由這矢量在平面上經過任何平移後的矢量. 如從點 $(2, 1)$ 到點 $(3,3)$ 的矢量, 它的 x 分量是 1 與 y 分量是 2, 所表示的複數是 $1+2i$. 複數的矢量表示與點表示都很有用. 此後我們提到複數 z 時, 它總含有點 z 或矢量 z 的意義.

由兩複數相加的定義, z_1+z_2 是與點 (x_1+x_2, y_1+y_2) 相對應. 它也是與 x 分量是 x_1+x_2 及 y 分量是 y_1+y_2 的矢量相對應. 因此, z_1+z_2 可用矢量 z_1 與 z_2 的矢量和來表示, 如圖 2.

z_1 與 z_2 的差可用一個從點 z_2 到點 z_1 的矢量來表示，如圖 3。

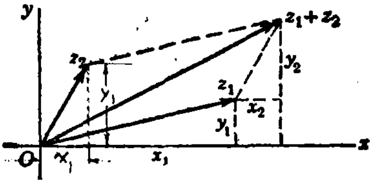

圖 2

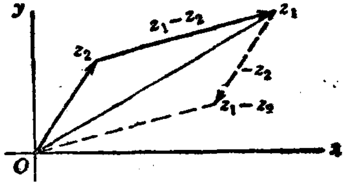

圖 3

習　　題

在下列 1 到 4 各題中，求 z_1+z_2 與 z_1-z_2，並用圖把它們表示出來：

1. $z_1=-3+i$,　　$z_2=1+4i$.
2. $z_1=-2i$,　　$z_2=2-4i$.
3. $z_1=3$,　　$z_2=-3+5i$.
4. $z_1=4$,　　$z_2=-3i$.
5. 表明矢量 $z_1+z_2+z_3$ 與 z_1, z_2, z_3 三個矢量構成一個閉合四邊形． 矢量 $z_1+z_2+z_3$ 是什麼方向？
6. 把習題 5 推廣到四個或更多複數的和．
7. 給定兩點 z_1 與 z_2，求點 $\frac{1}{2}(z_1+z_2)$．
8. 給定兩點 z_1 與 z_2，求點 $z_1+k(z_2-z_1)$，這裏 k 是一實數．

5. 共軛複數　複數 $z=x+iy$ 的共軛複數是

$$\bar{z}=x-iy.$$

就幾何方面來說，z 的共軛複數是 z 對實軸反射所成的像（圖 4）。

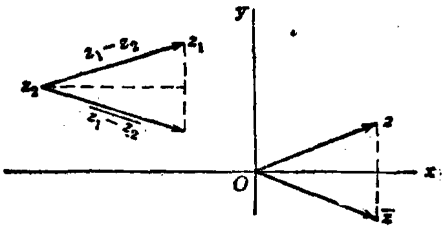

圖 4

如果 $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$，其中 x_1, x_2, y_1, y_2 都是實數，則

$$\overline{z_1+z_2}=(x_1+x_2)-i(y_1+y_2)=x_1-iy_1+x_2-iy_2=\bar{z}_1+\bar{z}_2.$$

就是

(1) $$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2.$$

因此，兩個複數的和的共軛複數是等於它們的共軛複數的和．

讀者可以同樣地去證明：

(2) $$\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2,$$

(3) $$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2,$$

(4) $$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}.$$

z_1-z_2 的共軛複數，用矢量表示，如圖 4．

同時注意 $\bar{z}$ 的共軛複數是 z．

實數的共軛複數是該數本身．

一個複數與它的共軛複數的和是一個實數

(5) $$z+\bar{z}=2x=2\mathcal{R}(z).$$

一個複數與它的共軛複數的差是一個純虛數

(6) $$z-\bar{z}=2iy=2i\mathcal{I}(z).$$

6. 絕對值　如果 x 與 y 都是實數，非負值的實數 $\sqrt{x^2+y^2}$ 叫做複數 $z=x+iy$ 的絕對值或模．就是，

(1) $$|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

就幾何方面來說，z 的絕對值就是矢量 z 的長度；它也是點 z 到原點的距離．因而 $|z_1-z_2|$ 是點 z_1 與點 z_2 之間的距離．這可由定義 (1) 看出，因爲

(2) $$|z_1-z_2|=|(x_1-x_2)+i(y_1-y_2)|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

不等式 $|z_1|>|z_2|$ 是說點 z_1 距原點是較點 z_2 距原點遠．複數之間大於或小於的意義是就它們的絕對值比較而言，因爲它們的絕對值是實數．除非 z_1 與 z_2 都是實數，$z_1>z_2$ 是沒有意義的．表示複數的次序可以有很多的方法，但是在這裏並不需要，因此從略．

由上面已經下過的定義,每個複數附有三個實數,絕對值 $|z|$, 實部 $\mathcal{R}(z)$, 及虛部的係數 $\mathcal{I}(z)$. 它們之間的關係是方程

$$|z|^2=[\mathcal{R}(z)]^2+[\mathcal{I}(z)]^2,$$

與不等式

(3) 它们何关係可图: $|z|\geqq|\mathcal{R}(z)|,\quad |z|\geqq|\mathcal{I}(z)|.$

既然 $z=x+iy$ 與 $\bar{z}=x-iy$, 那顯然的有

(4) $$z\bar{z}=x^2+y^2=|z|^2,$$

$z=x+iy$ $|z|=x^2+y^2$
$\bar{z}=x-iy$ $|\bar{z}|=x^2+y^2$

與

(5) $$|\bar{z}|=|z|.$$

兩個複數的積的絕對值等於它們的絕對值的積,就是,

(6) $$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|,$$

上式可以從乘積的定義與絕對值的定義來得到. 但如應用上面公式 (4) 與共軛複數的性質,可以更簡單地得到它. 因此,

$$|z_1z_2|^2=(z_1z_2)\overline{(z_1z_2)}=(z_1z_2)(\bar{z}_1\bar{z}_2)$$
$$=(z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2)=|z_1|^2\cdot|z_2|^2,$$

同時因爲絕對值是非負數,所以從上式就得到方程 (6).

同樣地可以證明

(7) $$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\qquad (z_2\neq 0)$$

因爲三角形的任何一邊小於其它兩邊的和,參閱圖 2, 於是有

(8) $$|z_1+z_2|\leqq|z_1|+|z_2|.$$

圖 3 中所示三角形,它的邊長是 $|z_1|$, $|z_2|$ 與 $|z_1-z_2|$. 因爲三角形的任何一邊是大於其它兩邊的差,於是有

(9) $$|z_1-z_2|\geqq\big||z_1|-|z_2|\big|.$$

在任何實例中,可以選取 z_1 與 z_2, 使得 $|z_1|\geqq|z_2|$, 那上式右邊最外層的絕對值符號就不需要了.

由(a)(b) $|z_1+z_2|^2=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2)$
$=|z_1|^2+|z_2|^2+2R(z_1\bar{z}_2)\leqq|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1z_2|=(|z_1|+|z_2|)$

方程 (8) 與方程 (9) 當然也可以用純粹的代數方法去證明. 但在證明時,應用共軛複數的性質是比較方便些. 因而方程 (8) 可以證明如下:**

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2).$$

既上式 $\bar{z}_1z_2$ 是 $z_1\bar{z}_2$ 的共軛複數. 所以

$$z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=2\mathcal{R}(z_1\bar{z}_2).$$

但是由方程 (3) 與 (5), $\mathcal{R}(z_1\bar{z}_2)\leqq|z_1\bar{z}_2|=|z_1z_2|$. 因此

$$|z_1+z_2|^2\leqq|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1z_2|=(|z_1|+|z_2|)^2.$$

再將上面兩邊開方,並取它們的正值平方根,就得到方程 (8).

由方程 (8) 可以得到

$$|z_1+z_2+z_3|\leqq|z_1+z_2|+|z_3|\leqq|z_1|+|z_2|+|z_3|.$$

用數學歸納法,不難把它推廣到下面形式

$$\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|\leqq\sum_{k=1}^{n}|z_k|. \qquad (n=1,2,\cdots). \tag{10}$$

習 題

在下列1到4各題,求 $\bar{z}$; $\mathcal{R}(z)$, $\mathcal{I}(z)$ 與 $|z|$.

1. $z=3-4i$.

2. $z=-2i$.

3. $z=4$.

4. $z=2-2i$.

證明下列公式 5 到 13.

5. $\overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2$.

6. $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$.

7. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ $\quad(z_2\neq0)$.

8. $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$, 把絕對值寫成 $\sqrt{x^2+y^2}$ 形式.

9. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ $\quad(z_2\neq0)$.

10. $\overline{iz}=-i\bar{z}$.

11. $\overline{(z^4)}=(\bar{z})^4$.

** 根據(4),
$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})$
但由(1) (P.7/L.2) $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$
$\therefore|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$
$=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2)$
由(4) $\left.\begin{array}{l}z_1\bar{z}_1=|z_1|^2\\ z_2\bar{z}_2=|z_2|^2\end{array}\right\}$ (a)
$\bar{z}_1z_2$是$z_1\bar{z}_2$的共軛複數
$\therefore\ \bar{z}_1z_2+z_1\bar{z}_2=2R(z_1\bar{z}_2)$ —
根據(3) 實部的絶對值(或虛部)的絶對值必小於複數的絶對值
$\therefore|R(z_1\bar{z}_2)|\leq|z_1\bar{z}_2|$
由(b) $|z_1\bar{z}_2|=|z_1|\cdot|\bar{z}_2|$
由(5) $|\bar{z}_2|=|z_2|$
$\therefore|z_1\bar{z}_2|=|z_1|\cdot|\bar{z}_2|=|z_1|\cdot|z_2|=|z_1z_2|$
$\therefore|R(z_1\bar{z}_2)|\leq|z_1\bar{z}_2|=|z_1z_2|$ 因之, $2R(z_1\bar{z}_2)\leqq2|z_1z_2|$, 讀兩邊
$\to R(z_1\bar{z}_2)$

12. $\overline{z_1z_2z_3}=\bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3$.

13. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2z_3}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2\bar{z}_3}\qquad(z_2z_3\neq0)$.

14. 如果$z^2=(\bar{z})^2$，表明z須是實數或純虛數.

15. 用代數方法證明$|z_1-z_2|\geqq||z_1|-|z_2||$.

16. 證明$|z_2+z_3|\geqq||z_1|-|z_2||$.

17. 如果$|z_2|\neq|z_3|$，表明

$$\left|\frac{z_1}{z_3+z_3}\right|\leqq\frac{|z_1|}{||z_2|-|z_3||}.$$

18. 證明$|z|\geqq(|x|+|y|)/\sqrt{2}$.

19. 如果$|z|=1$，點z的軌跡是什麽?

20. 如果$|z-2|=3$，點z的軌跡是什麽?

21. 如果$\mathcal{R}(z)=\dfrac{1}{2}$，點的軌跡是什麽?

22. 如果z滿足方程

$$z\bar{z}-\bar{a}z-a\bar{z}+a\bar{a}=b\bar{b},$$

式中a與b都是複常數，則點z的軌跡是什麽?

23. 用幾何方法決定z_1與z_2滿足方程

$$|z_1+\ _2|=|z_1|+|z_2|.$$

的條件.

24. 用幾何方法決定z_1與z_2滿足方程

$$|z_1+z_2|=|z_1|-|z_2|.$$

的條件.

7. 極型 令r與θ是點z的極坐標，參閱圖5，則

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

及複數$z=x+iy$可以寫做

$$(1)\qquad z=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

這是z的極型. z的共軛複數$\bar{z}$的極型是

$$\bar{z}=r[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)].$$

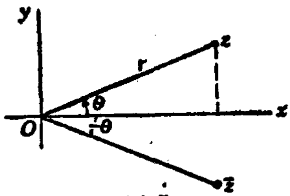

圖 5

複平面上所有的點都可不用r的負值而用極坐標表示出來. 我們取$r\geqq0$. 既然$r=\sqrt{x^2+y^2}$，所以它就是z的絕對值，

$$(2)\qquad r=|z|.$$