21世纪高职高专数学规划教材

高等数学

Advanced Mathematics

东北大学出版社
Northeastern University Press

21 世纪高职高专数学规划教材

高 等 数 学

Advanced Mathematics

东 北 大 学 出 版 社

· 沈 阳 ·

图书在版编目（CIP）数据

高等数学·/ 陈博，李建华主编．— 沈阳：东北大学出版社，2009.8
(21 世纪高职高专数学规划教材)
ISBN 978-7-81102-718-1

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①陈…②李…　Ⅲ. 高等数学—高等学校：技术学校—教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 129389 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号
邮编：110004
电话：024—83687331（市场部）　83680267（社务室）
传真：024—83680180（市场部）　83680265（社务室）
E-mail：neuph@neupress.com
http：//www.neupress.com
印 刷 者：沈阳市第六印刷厂书画彩印中心
发 行 者：新华书店总店北京发行所
幅面尺寸：184mm×260mm
印　　张：9.25
字　　数：243 千字
出版时间：2009 年 8 月第 1 版
印刷时间：2009 年 8 月第 1 次印刷
责任编辑：刘　莹　刘宗玉
封面设计：唐敏智
责任校对：郎　坤
责任出版：杨华宁

ISBN 978-7-81102-718-1　　　　定　　价：15.00 元

前　　言

近年来，随着高职高专教学改革的不断深入，对数学课程的基本要求有了很大变化，并提出了一些新的要求．如何实现高职高专学生的专业培养目标，与“工学结合”培养模式相适应；怎样才能在数学课程学时不断减少的情况下，为学生们打好数学基础，这些都给数学教学工作者提出了新的课题．正是在这样的背景下，我们结合教学改革的实际要求和多年积累的一些成功经验，精心编写出这套《21世纪高职高专数学规划教材》，本书为其中的少学时《高等数学》．

本书是根据教育部“高职高专教育高等数学课程教学基本要求”而编写的，遵循“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，并充分考虑了相当多的学校高等数学课程学时减少这一实际情况．为此，确立编写本书的指导思想为：联系实际，深化概念，侧重计划，注重应用．本书具备如下特色：

1．重视基本概念

在引入基本概念的时候，我们注意从实际问题出发，尽量借助于几何直观图形和物理意义来解释数学概念和定理，力求使抽象的数学概念形象化，同时注意基本理论的完整性和系统性．在教学理念上不过分强调严密论证、研究过程，而更多的是让学生体会高等数学的思想方法，提高学生的逻辑思维能力．

2．结合实际，注重实用

例题、习题中注重工程上或经济方面实际问题的选取，意在培养学生解决实际问题的意识和能力，最终实现培养应用性人才的高职高专教育目标．

3．侧重运算、解题能力

在解题方法方面有较深入的论述，其用意在于让学生在掌握基本概念的基础上，熟悉运算过程、掌握解题方法，最后达到加快运算速度、提高解题能力的目的．

全书共六章，依次为第一章函数与极限、第二章导数与微分、第三章中值定理与导数的应用、第四章不定积分、第五章定积分及其应用、第六章常微分方程．各章节后均配有习题，书后附有全部习题的参考答案．标有＊的内容是教学大纲不要求的内容．

由于水平所限，加之时间仓促，书中存在疏漏、不足之处在所难免，敬请广大师生不吝赐教，将不胜感谢．

编　者

2009年6月

《高等数学》编写人员

主　　　编：陈　博　李建华

副　主　编：付佑慧　姜晓明

其他编写人员：王学理

目　　录

第一章　函数与极限 …… 1

第一节　函数、极坐标与参数方程 …… 1

一、领域与区间 …… 1

二、函数的概念 …… 1

三、初等函数 …… 3

四、函数的性质 …… 4

五、参数方程 …… 4

六、极坐标 …… 5

习题 1-1 …… 6

第二节　函数的极限 …… 7

一、数列的极限 …… 7

二、函数的极限 …… 8

三、函数极限的性质 …… 10

习题 1-2 …… 11

第三节　极限的运算法则 …… 11

一、无穷小 …… 11

二、无穷大 …… 12

三、函数极限的四则运算 …… 12

四、复合函数的极限运算法则 …… 14

习题 1-3 …… 14

第四节　重要极限　无穷小的比较 …… 15

一、极限存在准则 …… 15

二、两个重要极限 …… 15

三、无穷小的比较 …… 17

习题 1-4 …… 19

第五节　连续函数 …… 19

一、函数的连续性 …… 19

二、函数的间断点 …… 20

三、初等函数的连续性 …… 21

四、闭区间上连续函数的性质 …… 22

习题 1-5 …… 23

总习题一 …… 24

第二章　导数与微分 …… **26**

第一节　导数的概念 …… 26
一、引　例 …… 26
二、导数的定义 …… 26
三、导数的几何意义 …… 28
四、可导与连续的关系 …… 29
习题 2-1 …… 29
第二节　函数的求导法则 …… 30
一、函数的和、差、积、商的求导法则 …… 30
二、反函数的求导法则 …… 31
三、复合函数的求导法则 …… 32
四、基本导数公式和求导法则 …… 34
习题 2-2 …… 35
第三节　隐函数及参数方程所确定的函数的导数 …… 36
一、隐函数的导数 …… 36
二、参数方程所确定函数的导数 …… 37
习题 2-3 …… 38
第四节　高阶导数 …… 39
习题 2-4 …… 40
第五节　函数的微分 …… 41
一、微分的定义 …… 41
二、基本微分公式与微分运算法则 …… 42
三、微分在近似计算中的应用 …… 43
习题 2-5 …… 44
总习题二 …… 44

第三章　中值定理与导数的应用 …… **46**

第一节　微分中值定理 …… 46
习题 3-1 …… 48
第二节　洛必达法则 …… 48
习题 3-2 …… 50
第三节　函数的单调性与极值 …… 50
一、函数的单调性 …… 51
二、函数的极值 …… 52
三、函数的最值 …… 53
习题 3-3 …… 54
第四节　曲线的凹凸性与拐点以及绘图 …… 55
一、曲线的凹凸性与拐点 …… 55

二、函数图形的描绘 …… 56
习题 3-4 …… 57
*第五节　曲　率 …… 58
一、弧微分 …… 58
二、曲率 …… 59
习题 3-5 …… 60
总习题三 …… 60

第四章　不定积分 …… 62

第一节　不定积分的概念与性质 …… 62
一、原函数与不定积分的概念 …… 62
二、基本积分表 …… 63
三、不定积分的性质 …… 64
习题 4-1 …… 65
第二节　换元积分法 …… 65
一、第一类换元法 …… 66
二、第二类换元法 …… 70
习题 4-2 …… 72
第三节　分部积分法 …… 72
习题 4-3 …… 74
总习题四 …… 75

第五章　定积分及其应用 …… 77

第一节　定积分的概念与性质 …… 77
一、引　例 …… 77
二、定积分的定义 …… 78
三、定积分的几何意义 …… 79
四、定积分的性质 …… 79
习题 5-1 …… 80
第二节　微积分基本公式 …… 81
一、积分上限函数 …… 81
二、微积分基本公式 …… 82
习题 5-2 …… 83
第三节　定积分的换元积分法和分部积分法 …… 84
一、定积分的换元积分法 …… 84
二、定积分的分部积分法 …… 86
习题 5-3 …… 87
第四节　广义积分 …… 88
一、无穷区间的广义积分 …… 88

二、无界函数的广义积分 …… 89
习题 5-4 …… 90
第五节 定积分的应用 …… 90
一、微元法 …… 90
二、定积分的几何应用 …… 91
三、定积分的物理应用 …… 93
习题 5-5 …… 94
总习题五 …… 95

第六章 常微分方程 …… 97

第一节 微分方程的概念 …… 97
习题 6-1 …… 98
第二节 一阶微分方程 …… 98
一、可分离变量的微分方程 …… 98
二、齐次方程 …… 99
三、一阶线性微分方程 …… 101
习题 6-2 …… 103
第三节 可降阶的高阶微分方程 …… 104
一、$y^{(n)}=f(x)$型 …… 104
二、$y''=f(x, y')$型 …… 104
三、$y''=f(y, y')$型 …… 106
习题 6-3 …… 107
第四节 二阶常系数线性微分方程 …… 107
一、二阶线性微分方程解的结构 …… 108
二、二阶常系数线性齐次方程 …… 109
三、二阶常系数线性非齐次方程 …… 111
习题 6-4 …… 114
总习题六 …… 114

习题答案 …… 116

附录Ⅰ 积分表 …… 126

附录Ⅱ 常用平面曲线及其方程 …… 135

数学家简介 …… 137

第一章　函数与极限

高等数学主要的研究对象是变量，而变量的表达形式是函数．函数关系就是变量之间的依赖关系．极限方法是高等数学的最基本的方法．本章将重点讨论函数的极限与函数的连续性．

第一节　函数、极坐标与参数方程

一、邻域与区间

在初等数学中，介绍过区间的概念，如

$$(a, b)=\{x \mid a<x<b\},$$
$$[a, b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\},$$
$$[a, +\infty)=\{x \mid a \leqslant x<+\infty\},$$

等等．

下面介绍邻域的概念．

设 δ 为一正数，开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域，记做 $U(a, \delta)$．即

$$U(a, \delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

若不含点 a，则记做 $\mathring{U}(a, \delta)$，即

$$\mathring{U}(a, \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

$U(a, \delta)$ 称为有心邻域，$\mathring{U}(a, \delta)$ 称为去心邻域．

二、函数的概念

函数，英文为 function，就是一种作用．如自由落体运动，设 x 为时间，y 为物体下落的距离，则 $y=\frac{1}{2} g x^{2}$，也就是

$$f(x)=\frac{1}{2} g x^{2}.$$

给一个 x 值，就有一个 y 值与其对应，相关于有一个作用 f，使得 x 成为 y．

定义　设 D 是实数集 $\mathbf{R}$ 的非空子集，则从 D 到 R_f 的对应关系 f 称为定义在 D 上的函数，记做

$$y=f(x), \ x \in D.$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为函数 f 的定义域，记做 D_f．集合 $R_f=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$ 称为函数 f 的值域．

在平面直角坐标系下，点集

$$\{(x,\ y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ $x\in D$ 的图像(如图 1-1 所示).

下面举几个函数的例子.

例 1 求函数 $y=\sqrt{1-x^2}$的定义域和值域，并画出其图像.

【解】 定义域

$$1-x^2\geqslant 0,\ 即\ D=[-1,\ 1].$$

值域 $R_f=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 1\}$. 图像为半圆(如图 1-2 所示).

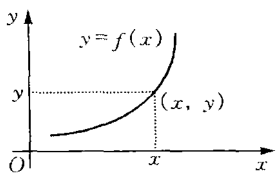

图 1-1

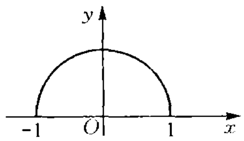

图 1-2

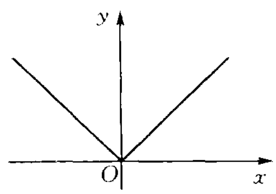

图 1-3

例 2 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x>0; \\ 0; & x=0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,\ +\infty)$、值域 $R_f=[0,\ +\infty)$，图像如图 1-3 所示.

例 3 符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0; \\ 0, & x=0; \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

的图像如图 1-4 所示.

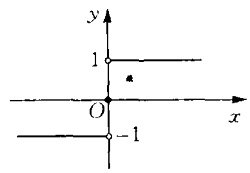

图 1-4

例 4 取整函数

$$y=[x]$$

表示不超过 x 的最大整数. 如$[1.25]=1$，$[-3.5]=-4$，$[-1]=-1$，图像如图 1-5 所示.

从例 2 到例 4 看到，有时一个函数要用几个式子来表示. 这种在自变量的不同变化范围中，对应关系用几个不同式子表示的函数，称为分段函数.

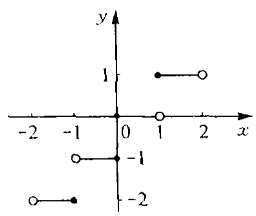

图 1-5

例 5 确定函数的表达式

(1) 设 $f(x)=x^2+3x-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}$，求 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$；

(2) 设 $f(x-1)=\dfrac{x+3}{(x+1)^2}$，求 $f(x)$.

【解】 (1) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+3\cdot\dfrac{1}{x}-x^2+2x=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x}-x^2+2x.$

(2) 令 $x-1=t$，则 $x=t+1$，即

$$f(t)=\frac{(t+1)+3}{(t+1+1)^2}=\frac{t+4}{(t+2)^2},$$

所以

$$f(x)=\frac{x+4}{(x+2)^2}.$$

三、初等函数

1. 基本初等函数

初等数学对下面 6 类函数的定义域、值域及函数的性态进行了讨论：

常数函数　$y=C$　(C 为常数)；

幂函数　$y=x^{\alpha}$　($\alpha\in\mathbf{R}$)；

指数函数　$y=a^x$　($a>0$，且 $a\neq1$)；

对数函数　$y=\log_a x$　($a>0$，且 $a\neq1$)；

三角函数　$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

反三角函数　$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$.

这 6 类函数统称为基本初等函数.

2. 反函数

在函数定义中，若 f 是从 D 到 $\mathbf{R}$ 的一一映射，则它的逆映射 f^{-1} 称为函数的反函数，记做 $x=f^{-1}(y)$. 显然，f^{-1} 的定义域为 R_f，值域为 D.

例如，函数 $y=x^3$，$x\in R_f$ 是一一映射，所以它的反函数存在，其反函数为 $x=y^{\frac{1}{3}}$，$y\in\mathbf{R}$. 习惯上写为 $y=x^{\frac{1}{3}}$，$x\in\mathbf{R}$.

一般地，函数 $y=f(x)$，$x\in D$ 的反函数记做 $y=f^{-1}(x)$，$x\in R_f$. 把函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像画在同一坐标平面上，这两个图像关于直线 $y=x$ 对称(如图 1-6 所示).

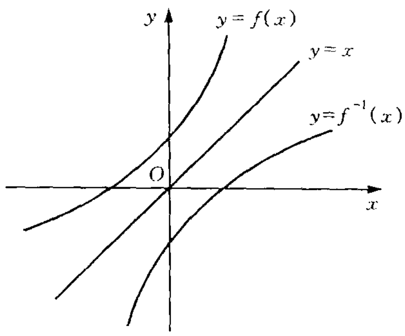

图 1-6

3. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义，且 $g(D)\subset D_1$，则由

$$y=f[g(x)],\ x\in D$$

确定的函数称为由函数 $y=f(u)$ 和函数 $u=g(x)$ 构成的复合函数，它的定义域为 D，变量 u 称为中间变量.

不是任何两个函数都能构成复合函数，如 $y=\arcsin u$，$u=x^2+2$ 就不能构成复合函数. 两个及多个函数能够构成复合函数的过程叫**函数的复合运算**.

例 6　函数 $y=\arcsin(x^2-1)$ 可以看成由函数 $y=f(u)=\arcsin u$ 和 $u=g(x)=x^2-1$ 复合而成的函数. $y=f(u)$ 的定义域 $U_0=\{u\mid |u|\leqslant1\}$，$u=g(x)$ 的定义域 $D=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$，复合函数 $y=\arcsin(x^2-1)$ 的定义域为 $\{x\mid -\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\}$.

4. 四则运算

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域分别为 D_1，D_2，记 $D=D_1\cap D_2$，且 $D\neq\varnothing$　($\varnothing$ 是空集)，

在 D 上，通过加、减、乘、除四则运算可以定义新的函数

$$f(x)\pm g(x),\quad f(x)\cdot g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}\ (g(x)\neq 0).$$

5. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算得到的并且可用一个式子表示的函数称为初等函数. 例如

$$y=ax^2+bx+c,\quad y=\sin\frac{1}{x},\quad y=e^{\cos^3\frac{1}{x}}$$

等都是初等函数.

四、函数的性质

1. 有界性

设函数 $f(x)$的定义域为 D. 若存在数 M，使得对任意 $x\in D$，都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$在 D 上有界. 如果这样的数 M 不存在，就称函数 $f(x)$在 D 上无界.

例如，$y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界；$y=e^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上无界.

2. 单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，若对于 D 上的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 D 上是单调增加的；若

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 D 上是单调减少的.

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称. 若对于任意 $x\in D$，都有

$$f(-x)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$为偶函数；若对于任意 $x\in D$，都有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称函数 $f(x)$为奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称，奇函数的图像关于原点对称.

4. 周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D. 若存在一个正数 T，使得对于任意 $x\in D$，有 $(x\pm T)\in D$，且

$$f(T+x)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$为周期函数，T 称为$f(x)$的周期. 通常所说周期函数的周期是指最小正周期，即使上式成立的最小正数.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，函数 $y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

五、参数方程

在取定的坐标系中，如果曲线上任意一点 $M(x,y)$中的 x，y 都是某个变量 t 的函数，即

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t). \end{cases} \tag{1-1}$$

并且对于 t 的每一个允许值，由方程组(1-1)所确定的点 $M(x,\ y)$都在这条曲线上，那么方程组(1-1)就叫做这条曲线的参数方程，联系 x，y 之间关系的变量t 叫做参变量，简称参数.参数方程中的参数既可以是有物理、几何意义的变量，也可以是没有明显意义的变量.

直线的参数方程：$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t, \\ y = y_0 + \beta t; \end{cases}$ （t 为参数）

圆的参数方程：$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta; \end{cases}$ （θ 为参数）

椭圆的参数方程 $\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = b\sin\theta. \end{cases}$ （θ 为参数）

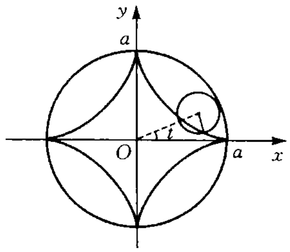

图 1-7

下面再介绍两个参数方程.

星形线：星形线是内摆线的一种(如图 1-7 所示). 当小圆在大圆内沿圆周滚动时，小圆上定点轨迹的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases} \quad (t\ 为参数)$$

化为直角坐标方程为

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

摆线：圆在直线上滚动，圆上定点的轨迹如图 1-8 所示.摆线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta), \\ y = a(1 - \cos\theta). \end{cases} \quad (\theta\ 为参数)$$

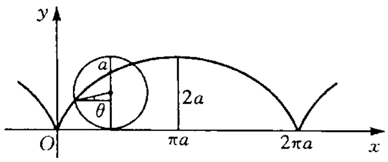

图 1-8

六、极坐标

在平面上定义由一定点和一条定轴所确定的坐标系称为极坐标系，其中定点称为极点，定轴称为极轴. 如图 1-9 所示. 坐标系中的点 P 用有序数$(r,\ \theta)$表示. 其中 r 表示点P 到极点 O 的距离，θ 表示射线OP 与极轴正向的夹角. 这里

$$r \geqslant 0,$$
$$0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

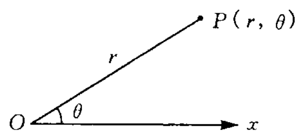

图 1-9

其中，r 称为极径，θ 称为极角.

若取极点作为原点，极轴作为 x 轴建立直角坐标系，这样得到极坐标与直角坐标的关系为

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta \tag{1-2}$$

或

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \tan\theta = \frac{y}{x}. \tag{1-3}$$

建立 r 与 θ 关系的等式称为极坐标方程，如

$$r = 1$$

表示圆心在极点，半径为 1 的圆.

利用式(1-2)和式(1-3)，可以把直角坐标方程和极坐标方程进行互化.

例 7 将极坐标方程

$$r=2\cos\theta$$

化为直角坐标方程，并说明它表示什么曲线.

【解】 方程两边同乘以 r 得

$$r^2=2r\cos\theta.$$

由式(1-2)有

$$x^2+y^2=2x,$$
$$(x-1)^2+y^2=1,$$

所以它表示圆心为(1, 0)，半径为 1 的圆.

下面给出几个特殊曲线的极坐标方程.

(1) 心形线(外摆线的一种). 如图 1-10 所示极坐标方程为

$$r=a(1+\cos\theta),$$

化为直角方程为

$$x^2+y^2-ax=a\sqrt{x^2+y^2}.$$

(2) 双纽线(如图 1-11 所示). 极坐标方程为

$$r^2=a^2\cos2\theta,$$

化为直角坐标方程为

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

(3) 阿基米得螺线(如图 1-12 所示). 极坐标方程为

$$r=a\theta.$$

极坐标系里面的 ρ 也常用 r 表示.

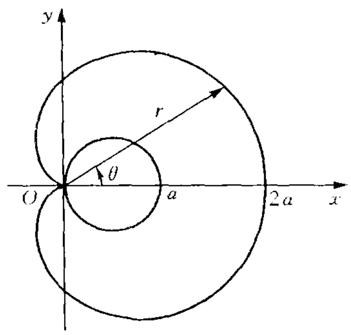

图 1-10

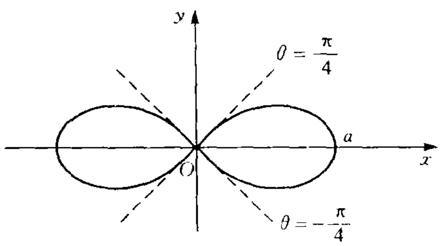

图 1-11

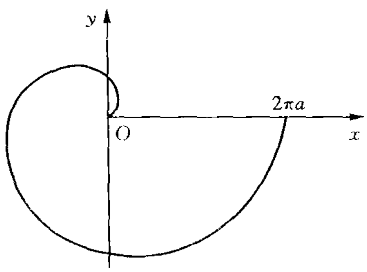

图 1-12

习题 1-1

1. 确定下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{9-x^2}$; (2) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$;

(3) $y=\dfrac{-5}{x^2+4}$; (4) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$;

(5) $y=\dfrac{\ln(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$; (6) $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$.

2. 设 $f(x)=\frac{x}{1-x}$，求 $f(f(x))$和 $f(f(f(x)))$.

3. 将函数 $y=5-|2x-1|$用分段形式表示，并作出函数的图形.

4. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\frac{1-x}{1+x}$；　　(2) $y=\frac{2^x}{2^x-1}$.

5. 判断函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$；　　(2) $y=x^2(1-x^2)$.

6. 在半径为 r 的球内嵌入一圆柱，试将圆柱的体积表示为其高的函数，并确定此函数的定义域.

7. 某化肥厂生产某产品 1 000t，每吨定价为 130 元，销售量在 700t 以内时，按照原价出售；超过 700t 时，超过的部分需打 9 折出售. 试将销售总收益与总销售量的函数关系用数学表达式表示.

8. 将方程 $x^2+y^2-2ax=0$ 化为参数方程.

9. 将参数方程$\begin{cases} x=t+\frac{1}{t}, \\ y=t-\frac{1}{t} \end{cases}$ (t 为参数)化为普通方程，并画出它的图形.

10. 把 $r=\frac{3}{1-2\cos\theta}$化为直角坐标方程.

11. 求过点$\left(3,\ \frac{\pi}{6}\right)$且垂直于极轴的直线的极坐标方程.

第二节　函数的极限

一、数列的极限

按照一定规律排列而成的一列数

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots$$

称为数列，简记做$\{u_n\}$. u_n 称为数列的通项或一般项. 例如

$2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \cdots,\ \frac{n+1}{n},\ \cdots$　　通项 $u_n=\frac{n+1}{n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$；

$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^4},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots$　　通项 $u_n=\frac{1}{2^n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$；

$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$　　通项 $u_n=(-1)^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$.

现在要讨论的是：当 n 无限增大时，对应的 u_n 是否能与某个常数无限接近. 如果能，这个常数是多少？

当 n 无限增大时，数列 $u_n=\frac{n+1}{n}$无限接近于常数 1，常数 1 就称做数列 $u_n=\frac{n+1}{n}$当 $n\to\infty$时的极限；

当 n 无限增大时，数列 $u_n=\frac{1}{2^n}$无限接近于常数0，常数0就称做数列 $u_n=\frac{1}{2^n}$当$n\to\infty$时的极限；

当 $n\to\infty$时，数列 $u_n=(-1)^n$ 在两个常数 -1，1 上交替变换，不能无限接近于一个常数，因此说数列 $u_n=(-1)^n$ 没有极限.

下面给出数列极限定义.

定义 1 设数列$\{u_n\}$，a 为常数，当 n 无限增大时，数列 u_n 无限接近于a，则称常数 a 为数列$\{u_n\}$的极限，或称数列$\{u_n\}$收敛于 a，记做

$$\lim_{n\to\infty}u_n=a \quad 或 \quad u_n\to a \quad (n\to\infty).$$

当 n 无限增大时，数列 u_n 不能无限接近一个确定的常数，就称数列$\{u_n\}$发散.

注 数列极限的精确定义：

设数列$\{u_n\}$，a 为常数$\forall$(对于任意给定充分小的正数)ε，$\exists$(总存在正整数)N，当 $n>N$ 时，不等式

$$|u_n-a|<\varepsilon$$

总成立，则称数列 u_n 收敛于常数a.

例如，数列$\left\{\frac{n+(-1)^{n+1}}{n}\right\}$收敛于 1；数列$\{2^n\}$发散.

收敛数列的几何意义：将常数 a 和数列u_1，u_2，u_3，…，u_n，…在数轴上表示出来，如图 1-13 所示，可以看出，无论 ε 多么小，当 $n>N$ 时，所有的点 u_n 都落在开区间$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$内.

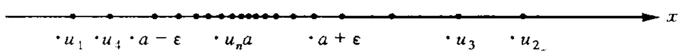

图 1-13

收敛数列有下列几个性质(证明从略).

(1) 收敛数列的极限一定唯一.

此性质可以说明数列$\{(-1)^n\}$是发散的.

(2) 收敛数列必有界.

数列有界只是数列收敛的必要条件，而不是充分条件. 如数列$\{(-1)^n\}$有界，但发散.

(3)(收敛数列的保号性) 若 $\lim_{n\to\infty}u_n=a$，且 $a>0$ $(a<0)$，则存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，都有 $u_n>0$ $(u_n<0)$.

二、函数的极限

1. 自变量趋于无穷大时函数的极限

例如，函数

$$y=1+\frac{1}{x},$$

当$|x|$无限增大时，y 无限地接近于 1，如图 1-14 所示.

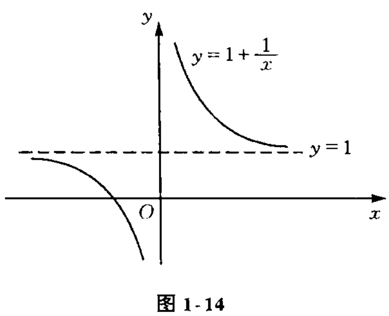

图 1-14

定义 2 设函数 $f(x)$在$|x|$大于某一正数时有定义，a 是一个常数，若当$|x|$无限增大时，对应的函数值 $f(x)$无