

高等数学

第二卷

R. 罗德著

邓立生 秦裕瑗译

高等教育出版社

高 等 数 学

第 二 卷

R. 罗 德 著

邓立生 秦裕璆译

高 等 教 育 出 版 社

本书系根据莱比锡托伊布纳出版社 (B. G. Teubner Verlagsgesellschaft) 出版的罗德 (R. Rothe) 著“高等数学” (Höhere Mathematik) 第二卷 1958 年第 11 版译出。原书特点是叙述简要, 内容丰富, 注重近似方法, 计算技巧与科技应用, 而又不忽视必要的理论基础。此外, 并附有相当数量的例题和习题。虽然书中对较重要与较难的材料有足够详尽的与富于启发性的讲解, 但有许多地方仍需读者作相当大的努力才能深入理解, 确实得到好处。本书可以推荐给教学经验丰富的教师; 如果吸取其中的优点, 适当加以发挥, 可以帮助他们在教学上取得较好的效果。

原书是供德国大学数理系及工科各系学生用的, 因此对我同同类性质的各系也有相当大的参考价值, 特别是适用于需要数学较多的工科各系。

本书原由人民教育出版社出版。现经上级决定, 自 1965 年 1 月 1 日起, 另行成立“高等教育出版社”; 本书今后改用高等教育出版社名义继续印行。

高等数学

第二卷

R. 罗德著

邓立生 秦裕瑗译

北京市书刊出版业营业许可证出字第 119 号

高等教育出版社出版(北京景山东街)

人民教育印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号 K13010·1058 开本 850×1168 $\frac{1}{32}$ 印张 7 $\frac{12}{16}$

字数 200,000 印数 6,501—8,500 定价(6) 0.75

1962 年 5 月第 1 版 1965 年 3 月北京第 3 次印刷

序 言

本书第二卷包括：第一章是积分学的进一步阐述；第二章讲无穷级数比较详尽；第三章讲依赖于一个参数的积分，线积分以及复数域中的积分，最末的第四章则是讲行列式与矢量及其应用的。本卷中共有 86 个练习题分成七批。本卷的其他练习题与应用举例(包括它们的解答)读者可以在第四卷第三至第四部分找到。

这一版中改正了第一版以来印刷上的错误及某些较小的前后不一致的地方，改进了一些叙述并且作了许多补充。

本书从第八版起增添了“福里哀级数的唯一性定理”一节，而以后的第九至第十一版基本上没有变动。

读者多次来函指出关于本书前后不一致以及需要改进的地方，这些意见对我们很有好处，谨向他们深致谢意。

W. Schmeidler

柏林，1957 年 11 月

目 录

| | |
|--|-----|
| 序言 | vii |
| 第一章 积分学 | 1 |
| § 1. 求不定积分的一般法则 | 1 |
| 1. 积分法。 2. 基本积分与积分法则。 3. 复变函数的积分。 4. 例。 5. 递推公式。 6. 例。 | |
| § 2. 其他的积分法则及应用 | 11 |
| 1. 推广的分部积分公式。 2. 累积分。 3. 两个定理(估值定理)。 4. 具有确定下界的累次定积分。 | |
| § 3. 含二次式的积分 | 17 |
| 1. 积分 $L = \int dx/q(x)$, $M = \int dx/\sqrt{q(x)}$, $N = \int \sqrt{q(x)}dx$, 其中 $q(x) = \alpha + \beta x + \gamma x^2$ 。 2. 例。 3. 在阻力介质中的自由落体运动。 | |
| § 4. 有理函数的积分法 | 21 |
| 1. 分解为部分分式。 2. 有理函数的积分。 3. 例。 4. 代数无理函数 或超越函数的积分。 | |
| § 1. 至 § 4 的练习题 | 28 |
| § 5. 作为和的极限的定积分 | 32 |
| 1. 引言。积分学的基本问题。 2. 内积分与外积分。 3. 可积函数。 4. 一致连续定理。 5. 第 3 小节中定理的证明。 | |
| § 6. 作为和的极限的定积分的性质 · 不利用不定积分而计算 定积分 · 中值定理 | 40 |
| 1. 定积分的性质。 2. 定积分的计算。 3. 例。 4. 定积分对于其上限的 导数。 5. 可积函数的性质。 6. 积分中值定理。 | |
| § 7. 近似积分法, 图解积分法 | 47 |
| 1. 梯形公式, 切线公式, 辛普生法则。 2. 辛普生法则的准确度。 3. 图 解求积。 4. 图解积分法。 | |
| § 8. 积分学在几何与力学上的一些应用 | 54 |
| 1. 在斜角坐标系中图形的面积。 2. 有向闭图形。 3. 弧长。 4. 正柱 体的体积。 5. 卡瓦里利原理。 6. 旋转体的体积。 7. 旋转曲面的侧 面积。 8. 例。环面。 9. 匀质平面图形的质量中心。 10. 匀质平面曲 线段的质量中心。 11. 匀质物体的质量中心。 | |
| § 5 至 § 8 的练习题 | 70 |

| | |
|---|-----|
| § 9. 解析上的一些应用 | 72 |
| 1. 中值。 2. 台劳公式。 3. 三角和。 尤拉-福里哀公式。 4. 諧量分析。 5. 前例的特殊情形。 | |
| § 10. 广义积分 | 89 |
| 1. 广义积分。 2. 例。 3. 具有无穷限的积分。 4. 无界函数的积分。 5. Γ -函数或高斯 π -函数。 6. $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$ 。 7. $\int_0^{\pi} \ln \sin x dx$ 。 8. 斯蒂芬-波尔茨曼总放射能量定律。 | |
| § 11. 关于面积仪与积分仪 | 90 |
| 1. 面积仪公式。 2. 綫面积仪及极点面积仪。 3. 刃面积仪。 4. 积分仪。 | |
| § 9 至 § 11 的練習題 | 94 |
| 第二章 无穷級数·幂級数 | 96 |
| § 12. 无穷級数概說 | 96 |
| 1. 基本概念。 2. 收斂的必要条件。 3. 一般的收斂定理。 4. 正項級数一級数的比較。 5. 收斂判別法 $u_{n+1}:u_n \leq k < 1$ 。 6. 收斂判別法 $\sqrt[n]{u_n} \leq k < 1$ 。 7. 例。 8. 任意項級数·綫性組合。 9. 絕對收斂。 10. 例。 11. 萊布尼茲定理。 12. 級数的乘法定理。 13. 亞貝尔收斂定理。 14. 例。 15. 附言。 | |
| § 13. 幂級数·基本定理 | 108 |
| 1. 引言。 2. 收斂定理。 3. 收斂半径。 4. 幂級数的导数。 5. 幂級数的积分。 | |
| § 14. 几个重要的幂級数·台劳級数 | 115 |
| 1. 几何級数的导級数。 2. $e^x, \cosh x, \sinh x$ 的級数。 3. 对数級数。 4. $\arctg x$ 及 π 的級数。 5. 台劳級数。 6. 例。 二項式級数。 7. 反正弦級数。 8. 台劳公式与台劳級数之間的关系。 9. 待定系数法。 10. $x \operatorname{ctg} x$ 級数。 11. 前述級数公式汇集。 | |
| § 12 至 § 14 的練習題 | 125 |
| § 15. 无穷級数的补充定理·一致收斂 | 127 |
| 1. 无条件收斂。 2. 定理。 3. 定理。 4. 黎曼定理。 5. 例。 6. 定理。 7. 一致收斂概念。 8. 魏耶斯特拉斯定理。 9. 定理。 10. 不一致收斂的級数举例。 11. 定理。 12. 級数的积分法定理。 13. 級数的微分法。 14. 附言。 15. 三角級数。 16. 福里哀級数的唯一性定理。 17. 例。 | |
| § 16. 幂級数的应用 | 146 |
| 1. 近似公式。 2. 密切拋物綫。 3. 平面曲綫的曲率。 4. 圓弧用直綫表示的近似作图公式。 5. 利用幂級数求积分。 6. 橢圓的弧长。 7. 橢圓周长的近似公式。 8. 双紐綫的弧长。 9. 橢圓积分。 10. 积 | |

| | |
|---|-----|
| 分 $J_m = \int_0^{\infty} \frac{x^m dx}{e^x - 1}$ | |
| § 17. 幂级数的应用(續)·复变数幂级数·广义积分与级数 | 154 |
| 1. 复数项级数。 2. 例。 3. 例。 4. 广义积分与级数。 5. 对数积分。 6. 斯特林公式。 | |
| § 15 至 § 17 的练习题 | 161 |
| 第三章 依赖于一个参数的积分·綫积分·复变函数的积分 | 164 |
| § 18. 定积分对参数的微分法与积分法 | 164 |
| 1. 定积分对参数的微分法。 2. 莱布尼兹法则的推广。 3. 应用。 | |
| 4. 定积分对参数的积分法。 5. 例。 | |
| § 19. 广义积分对参数的微分法与积分法 | 169 |
| 1. 广义积分关于参数的一致收敛性。 2. 一致收敛的广义积分对参数的微分法与积分法。 3. 应用。 | |
| § 20. 綫积分 | 174 |
| 1. 綫积分。 2. 定理。 3. 全微分的綫积分。 4. 可积条件。 5. 积分因子。 | |
| § 21. 应用 | 180 |
| 1. 功与势。 2. 例。 3. 热力学。 4. 嫡。 5. 嫡(續)。 | |
| § 22. 复变函数的积分 | 184 |
| 1. 复变函数的积分·柯西积分定理。 2. 应用。 3. 佛萊耐尔积分。 | |
| § 18 至 § 22 的练习题 | 187 |
| 第四章 行列式与矢量及其应用 | 189 |
| § 23. 行列式 | 189 |
| 1. 概說。 2. 二阶行列式。 3. 行列式的性质。 4. 应用。 5. 二元綫性方程。 6. 三阶行列式。 7. 应用。 | |
| § 24. 行列式續·綫性方程的解 | 197 |
| 1. 三元綫性方程的解。 2. 例。 3. 任意阶的行列式。 4. 例。 | |
| 5. 行列式的乘法定理。 6. 例。 7. 行列式的微分。 | |
| § 25. 空間矢量 | 206 |
| 1. 前言。 2. 定义。 3. 数与矢量的乘积。 4. 矢量的和。 5. 基本矢量。 6. 分量。 7. 矢量的长度与方向余弦。 8. 矢量的分量表示。 | |
| § 26. 矢量的乘法 | 211 |
| 1. 內积(数积)。 2. 分配律。 3. 矢量沿另一矢量的分矢量。 4. 外积或矢积。 5. 矢积的分量。 6. 分配律。 7. 三个矢量的数积。 8. 以矢量 A, B, C 为棱的平行六面体体积。 | |
| § 27. 矢量在几何上的应用 | 219 |
| 1. 空間直角坐标系的变换。 2. 例。 3. 空間直綫。 4. 平面。 | |

| | |
|---|-----|
| 5. 平面的截距式方程。 6. 二平面的交角。 7. 二非平行直线的最短距离。 | |
| § 28. 矢量在几何与力学上的其他应用 | 227 |
| 1. 功。 2. 力矩。 3. 矢量的导数。 4. 空间曲线。 5. 弧长。 | |
| 6. 速度与加速度。 7. 例。 8. 切线与法线加速度。 9. 法平面, 密切平面, 主法线。 10. 曲率。 11. 挠率。 12. 相伴三角形。 13. 螺旋线。 14. 角速度矢量。 | |
| § 23 至 § 28 的练习题 | 238 |
| 本书中较难的练习题标有符号 †。 | |

第一章 积分学

§ 1. 求不定积分的一般法则

1. 积分法通常称为“微分法的逆运算”。这句话要这样来理解：设 $f(x)$ 是实变数 x 的给定的单值函数，微分法的任务便是求出导数 $f'(x)$ (只要 $f(x)$ 可微)；反之，积分法的任务是定出所有的函数 $J(x)$ ，使其导数为已给函数 $f(x)$ ，或者说，使其满足微分方程

$$J'(x) = f(x) \text{ 或 } dJ(x) = f(x) dx. \quad (0)$$

由微分学可知，具有相同导数的函数之间只可能相差一个常数。由此，我们以下式来表示所有满足微分方程(0)的那一批函数

$$\int f(x) dx = J(x) + C, \quad (1)$$

其中 C 表一任意常数。 $\int f(x) dx$ 称为 $f(x) dx$ (或简称为 $f(x)$) 的不定积分(参阅第一卷, § 13)。

式(0)和式(1)的含义是完全相同的；式(1)只是形式地表出(0)的解，然而，要从给定的 $f(x)$ 去求出 $J(x)$ ，这一问题并未因此得到解决。暂时，我们还只能用微分法来检验式(0)是否确实满足。

在这一节中，我们将回顾在第一卷, § 13 中所讲积分法中的一些基本定理，并在有些方面作进一步的阐述。

2. 下列基本积分与积分法则可以直接由微分学中相应的公式推得(参阅第一卷, § 13, 2 和 3)，而且实质上只是它们的另一种写法。

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (\text{当 } n+1 \neq 0). \quad (2)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C. \quad (3)$$

$$\int e^x dx = e^x + C. \quad (4)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C = a^x \log_a e + C. \quad (5)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C. \quad (6)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C. \quad (7)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C. \quad (8)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C. \quad (9)$$

$$\int \cosh x dx = \sinh x + C. \quad (10)$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C. \quad (11)$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \operatorname{tgh} x + C. \quad (12)$$

$$\int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\operatorname{ctgh} x + C. \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C. \quad (14)$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccotg} x + C. \quad (15)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsinh} x + C = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C. \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C. \quad (17)$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{artgh} x + C = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C$$

$$= \operatorname{arctgh} x + c = \ln \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + c. \quad (18)$$

附言: a) 自然只有当 x 所取的实数值使积分号下的函数与公式的右端同时有意义时, 上面这些公式才是有意义的。例如, (3) 仅当 $x > 0$ 时才是正确的。然而, 设 $x = -|x| < 0$, 我们有

$$\frac{d}{dx} \ln|x| = \frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{(-x)} \cdot (-1) = \frac{1}{x},$$

于是

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

显然, 该式对于所有异于零的 x 的实数值都是适合的。同样, (14) 仅当 $|x| < 1$ 时适合, 而 (17) 仅当 $|x| > 1$ 时适合 (还可参阅下面的 3)。

b) 上面各公式中, 记为 C 或 c 的积分常数恒为一完全任意的, 且与 x 无关的常数。但若在积分号下含有一个参数, 则积分“常数”亦为该参数的函数; 例如, 在 (2) 中 $C = C(n)$ 是参数 n 的函数。 C 确实是个常数的情形, 当然也包括在 $C = C(n)$ 这一般的情形内。

$$\int A f(x) dx = A \int f(x) dx \quad (A \text{ 为常数}), \quad (I)$$

$$\int (u(x) + v(x)) dx = \int u(x) dx + \int v(x) dx$$

(分解公式), (II)

$$\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x)$$

(分部积分公式), (III)

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

(引入新的变量 $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t) dt$, 这里 $x = \varphi(t)$ 假定是可微的且有单值的反函数), (IV)

定积分为不定积分在其积分上下限处两个值的差:

$$F(a, b) = \int_a^b f(x) dx = [J(x)]_a^b = J(b) - J(a) \quad (V)$$

(参阅第一卷第 88 页)。在那里对 $f(x)$ 所作的假定, 即在区间

$a \leq x \leq b$ 上 $f(x)$ 須是連續的，現在仍暫時保留。定积分与积分变量是无关系的，例如，我們仍然有

$$F(a, b) = \int_a^b f(u) du.$$

因若 $F(a, x) = \int_a^x f(u) dv$ ，則有 $\frac{dF(a, x)}{dx} = f(x)$ 。

以上諸法則在所給函数 $f(x)$ 总有一个不定积分的条件下是已經証明了的。我們假定，这些公式的用法，讀者已多少懂得一些。

3. 复变函数的积分 在第一卷，§ 30, 1 中，已經說明了一个复变数 z 的解析函数 $F(z)$ 以及它的导数 $F'(z)$ 的意义。若是 $F'(z) = f(z)$ ，則称 $F(z)$ 为 $f(z)$ 的一个积分或原函数。显然，前面讲过的积分法則，全都可以照样用在复变数的解析函数上。对于复变函数的积分，在 2 的附言 a) 中所作的一些限制大都可以去掉，例如公式(3)对于所有 $x \neq 0$ 都成立，而公式(14)和(17)則对于所有 $x^2 \neq 1$ 都成立；并且，我們还可以将表中的某些积分化为其中别的积分，例如，若在(18)中設 $ix = z$ ， $i dx = dz$ ，这一积分就化为(15)中的积分；因为

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = -i \int \frac{dz}{1+z^2} = -i \operatorname{arctg} z + C = -i \operatorname{arctg} ix + C.$$

由于(第一卷，§ 30, (19))

$$i \operatorname{arctg} z = \ln \sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}},$$

于是，若限于考虑反正切函数的主值，就有

$$-i \operatorname{arctg} ix = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

它与反正切函数的其他的值只相差一个常数，而这一常数总可合

并于积分常数中；因而我們得到与公式(18)相同的結果。

4. 例 a) $J_1 = \int (a + bx^p)^m x^{p-1} dx (bp \neq 0)$. 令 $a + bx^p = t$, $bp x^{p-1} dx = dt$, 于是, 若 $m+1 \neq 0$, 則有

$$J_1 = \int t^m \frac{dt}{bp} = \frac{t^{m+1}}{bp(m+1)} + C = \frac{(a + bx^p)^{m+1}}{bp(m+1)} + C,$$

若 $m = -1$, 則

$$J_2 = \int \frac{x^{p-1}}{a + bx^p} dx = \frac{1}{bp} \int \frac{dt}{t} = \frac{\ln t}{bp} + C = \frac{\ln(a + bx^p)}{bp} + C.$$

b) $J_3 = \int \frac{x dx}{\sqrt{a + bx^2}}$. 令 $a + bx^2 = u^2$, $bx dx = u du$, 于是

$$J_3 = \frac{1}{b} \int \frac{u du}{u} = \frac{u}{b} + C = \frac{1}{b} \sqrt{a + bx^2} + C.$$

c) $J_4 = \int \sqrt{1-x^2} dx$. 令 $x = \sin \varphi$, $dx = \cos \varphi d\varphi$, 于是

$$\begin{aligned} J_4 &= \int \cos^2 \varphi d\varphi = \int \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int d\varphi + \frac{1}{2} \int \cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \cos \varphi + C, \end{aligned}$$

所以 $\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C$. (19)

并且 $J_5 = \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$.

d) $J_6 = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$. 我們可以将它分解为

$$J_6 = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

上式右端的第二个积分是 J_3 当 $a=1, b=-1$ 的情形, 于是我們立即得到

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C. \quad (20)$$

e) $J_m = \int x^m \ln x \, dx$. 由分部积分公式(III), 令 $u = \ln x$, $v = x^{m+1}$, 于是, 若 $m+1 \neq 0$, 则 $v = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, 我們有

$$\begin{aligned} J_m &= \ln x \cdot \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{m+1} \int x^m \, dx = \\ &= \frac{x^{m+1}}{m+1} \left(\ln x - \frac{1}{m+1} \right) + C; \end{aligned}$$

特別, 当 $m=0$ 就有

$$\int \ln x \, dx = x(\ln x - 1) + C. \quad (21)$$

但若 $m = -1$, 則

$$\int x^{-1} \ln x \, dx = \int \ln x \, d \ln x = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C.$$

下面的一般公式是值得注意的:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \ln f(x) + C. \quad (22)$$

$$\int f'(x) f(x) \, dx = \frac{1}{2} f^2(x) + C. \quad (23)$$

例如, 設 $f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, 則由(22)可得

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C. \quad (24)$$

如果在上式中以 $\frac{\pi}{2} - x$ 代替 x , 則容易得到

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + C. \quad (25)$$

5. 递推公式 在許多情況下, 含参数 n 的积分可化为另一相同形式的积分, 使所含参数的值减小 1 或者 2. 若 n 为一正整数, 則接連化过几次以后常可求出积分来。

a) $J_n = \int e^{-x} x^n dx$. 由分部积分公式 (III), 設 $u = x^n$, $v = -e^{-x}$, 則可得递推公式 $J_n = -x^n e^{-x} + nJ_{n-1}$, 由此

$$J_{n-1} = -e^{-x} x^{n-1} + (n-1)J_{n-2}, \dots, J_1 = -e^{-x} \cdot x + J_0,$$

其中 $J_0 = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$. 逐次代入可得

$$\begin{aligned} \int e^{-x} x^n dx &= -e^{-x}(x^n + nx^{n-1} + \\ &\quad + n(n-1)x^{n-2} + \dots + n!) + C. \end{aligned} \quad (26)$$

我們还可將上式表为

$$\begin{aligned} \int e^{-x} x^n dx &= -e^{-x}(x^n + (x^n)' + \\ &\quad + (x^n)'' + \dots + (x^n)^{(n)}) + C; \end{aligned} \quad (27)$$

若 $g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ 为某一整有理函数, 則由上式我們不难得到

$$\begin{aligned} \int e^{-x} g(x) dx &= -e^{-x}(g(x) + g'(x) + \\ &\quad + g''(x) + \dots + g^{(n)}(x)) + C. \end{aligned} \quad (28)$$

b) 設 $S_n = \int \sin^n x dx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 应用分部积分公式可得

$$\begin{aligned} S_n &= \int \sin^{n-1} x d(-\cos x) = \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + \int (n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x dx, \end{aligned}$$

在上式右端代入 $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, 于是有

$$S_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)(S_{n-2} - S_n),$$

由此得递推公式

$$S_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} S_{n-2} \quad (n \geq 2). \quad (29)$$

这样在 n 是偶数时, 能把 S_n 化到 $S_0 = \int dx = x + C$, 而当 n 为奇数时, 能把 S_n 化到

$$S_1 = \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

假如从 $x=0$ 到 $x=\frac{\pi}{2}$ 求积分, 则因

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } [\sin^{n-1} x \cos x]_0^{\pi/2} = 0,$$

故

$$S_n = \frac{n-1}{n} S_{n-2}, \quad S_0 = \frac{\pi}{2}, \quad S_1 = 1.$$

因而

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数,} \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}, & \text{当 } n \text{ 为奇数.} \end{cases} \quad (30)$$

若在(30)中分别代入 $x = \arccos z$ 及 $x = \operatorname{arctg} z$, 则不难得到

$$\int_0^1 (1-z^2)^n dz = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}, \quad (30a)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2}; \quad (30b)$$

(30b)中的上限 ∞ 对应于值 $x=0$ (参阅 § 10)。

6. 例 設 m, λ, μ 为整数, 于是

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos mx dx &= \left[\frac{\sin mx}{m} \right]_0^{\pi} = \frac{\sin m\pi}{m} = 0, \quad \text{当 } m \neq 0, \\ &= \pi, \quad \text{当 } m = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

$$\int_0^{\pi} \sin mx dx = \left[-\frac{\cos mx}{m} \right]_0^{\pi} = \frac{1 - (-1)^m}{m} \quad (32)$$

$= 0$, 当 $m \neq 0$ 且为偶数,

$= \frac{2}{m}$, 当 m 为奇数,

$= 0$, 当 $m = 0$.

积分

$$\int_0^{\pi} \cos \lambda x \cos \mu x dx, \quad \int_0^{\pi} \sin \lambda x \sin \mu x dx,$$

$$\int_0^{\pi} \cos \lambda x \sin \mu x dx$$

可以分别应用下列恒等式化为上面的积分:

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta),$$

$$-2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta),$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta).$$

由此可得

$$\left. \int_0^{\pi} \cos \lambda x \cos \mu x dx \right\} = \begin{cases} 0, & \text{当 } \lambda \neq \mu, \end{cases} \quad (33)$$

$$\left. \int_0^{\pi} \sin \lambda x \sin \mu x dx \right\} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{当 } \lambda = \mu \neq 0; \end{cases} \quad (34)$$

若 $\lambda = \mu = 0$, 则在(33)中的积分取得值 π , 而在(34)中的积分则取得值 0 。我们还可得到

$$\int_0^{\pi} \cos \lambda x \sin \mu x dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } \lambda = \mu \text{ 或者当 } \lambda, \mu \\ & \text{同为偶数或同为奇数,} \\ \frac{2\mu}{\mu^2 - \lambda^2}, & \text{当 } \lambda, \mu \text{ 不同时为偶数} \\ & \text{或不同时为奇数.} \end{cases} \quad (35)$$

同样, 我们可以得到下列结果: