

中學數學參考資料

中學算術習題解法

Н. В. Каверин 著

蔣 巍 譯

新中國聯合出版社出版

中學數學參考資料

中學算術習題解法

卡維苓著

蔣巍譯



55 00221100
新中國聯合出版社出版

版權所有·不准翻印

中學數學
參考資料

中學算術習題解法

著	者	卡	維	荅
譯	者	蔣		巍
出	版	者	新中國聯合出版社	
			上海:(9)石門二路41弄44號	
發	行	者	通 聯 書 店	
			上海:(11)九 江 路 295 號	
經	售	處	全 國 各 大 書 店	

一九五三年十月初版

00001—10000

售價 1700 元

譯 序

這本小冊子根據卡維苓 (Н. В. Каверин) 著的中學算術習題解法 (Методы решения арифметических задач в средней школе) 蘇俄教育部國營教育出版社 1952 年莫斯科版譯出。原著者是一個經驗豐富的中學數學教師，他在這本書中通過解具體的習題敘述了如何教會學生統一地運用分析與綜合。

在我們中學裏，解算術習題仍使許多學生感到困難，其主要原因是他們沒有掌握解算術習題的基本方法——分析與綜合。最嚴重的是部份教師亦沒有注意到這方面，因此，我認為把這本小冊子介紹給中學數學教師、師範學校學生，以及中學低年級的學生是非常必要的，但受能力所限，譯文中錯誤在所難免，希讀者指出，以便在再版時更正。

譯 者

1953 年 9 月於瀋陽

目 錄

緒 言	1
-----	---

第 一 章

1. 分析和綜合——解習題的基本方法	5
2. 習題條件的解析方法	16
3. 分析法	27
4. 綜合法	34
5. 分析綜合法——結論	40

第 二 章

1. 對習題條件的認識和自覺地掌握	48
2. 習題的解析和作解題計劃	51
3. 解習題和檢驗	53
4. 解習題以後的補充工作	58

緒 言

算術習題的解法是數學教學中最重要問題之一，習題有很大的教養的，教育的和實踐的意義。

在解習題的過程中，我們的學生能更深刻地理解算術運算和算術概念的意義，學會把複雜的整體分解為較簡單的因素，把簡單的因素結合、聯繫、組成較複雜的整體，學會合理的工作方法，鍛鍊克服困難的精神。在解題時能培養意志，發展兒童的邏輯思惟，創造性、主動性、判斷力和建設性的才能。除此以外，習題還是數學理論聯繫實踐的有效材料。能熟練地解題就保證了今後教學工作的順利進行和有助於解決實際生活中的問題，這些是在社會主義制度的各部門中所必需的。

解題過程本身的複雜性亦是我們所以注意習題解法的原因。教會學生們解算術習題遠較使學生掌握數學理論問題困難。到現在為止，學生們在解習題上缺乏足夠的技能仍是數學學習成績下降以及妨礙中學，專門學校，高等學校順利地繼續進行教育的主要原因之一。

在本文中，作者希望再一次地引起教師們對這個重要問題的注意，同時論及兩個問題：

- 1) 分析和綜合為解算術習題的基本方法。
- 2) 在解習題中的獨立階段。

第一章

1. 分析和綜合——解習題的基本方法

分析和綜合是認識的基本方法：恩格斯說，「思惟不僅在於把同類的因素，綜合成爲統一體，而且更在於以同樣的程度把意識的對象分解爲它們的因素，沒有分析，不會有綜合」（恩格斯著反杜林論，三聯1949年版第52頁）。

分析在希臘文字中是 analysis，它意味着分解、分割、分辨。

分析是藉分解物質對象或邏輯對象爲組成部份的科學的認識方法。分析在數學教學中和在認識中一樣，有重要的意義。

綜合（希臘文字是 Synthesis，它意味着化合、結合、組合）是研究物體的完整性以及統一體和它部份間相互的關係的方法。在認識過程中，綜合與分析是有密切聯繫的。

在列寧和斯大林的天才的著作中，把認識這一問題提到難以到達的高度。物體與現象的相互聯繫，相互制約是由它們的存在規律出發的。

馬克思列寧辯證法教導我們，任何科學只有在它正確地反映客觀現實，不是反實踐而是推動實踐前進的時候，才是真正的科學。

根據這些情形，我們認爲，在我們的教學方法和教學實踐

中，不應該把分析與綜合看成是彼此孤立的，而在它們中是辯證的統一體。事實上，不僅是解困難的、複合的習題時，而且甚至在解只含有一個運算的簡單的習題時，學生要同時應用分析和綜合。如果在解習題時，學生應用了所有的數，得到了正確的答案，他是從習題的已給條件轉入主要的問題，或者從主要的問題開始，作出解題計劃和為提出的問題收集了必要的材料，則在此兩種情形中，他運用了分析，亦運用了綜合。甚至在簡單的習題中，如果學生從一般的習題的本文中提出了給予的問題，找到了必需的數和說明了解這個問題應該如何運算，則實際上他已應用了分析，亦應用了綜合。這樣的思惟過程不僅發生於解習題時，而且亦發生於解例題時，從十以內的加法例題開始直到五、六年級中較複雜的整數和分數的混合運算的例題止。

關於在這方面此地有一點說明：當給予學生含有 6-7 個或更多個運算的數字例題時，則學生必須把這個複雜的例題分解成為獨立的因素——運算，即作了分析；但是在作了這樣的分解後要完成運算，學生要採用綜合：他為每一個運算結合必需的數，即他重新從各個部份組成一個整體，即應用了綜合。

從很低的程度開始，分析和綜合一樣，在教學和認識中有着廣泛的應用。還是在一年級的識字教學中，就應用了分析綜合法，且以這樣的方法應用於解析語句和各種不同的文藝作品與報導作品上。甚至從二歲到四歲的兒童，在認識每一個新的物體，新的玩具時具有分析和綜合的應用：他們設法把物體，玩具分解成為各個部份，然後聯合這些部份，當他們獲得成功時就很

滿意，但當進行得不順利時，就會非常不滿意。這樣的實踐，兒童們是易於達到的。

可惜在個別的教學法中，闡明分析時常有這種說法：「困難」，「難於做到」等等，而較多地應用綜合，在中學裏，僅僅在含有兩三個問題的習題或以前用綜合法解過的習題才用分析法來解析習題。從個別的教師那兒亦曾聽到過這種類似的見解。

這樣解釋分析法與綜合法是不正確、不科學和反實踐的。優秀的數學教師的工作達到了很大的成就是廣泛地應用了這兩種方法的結果，無論是分析，或者是綜合，在它們中是統一體，這就反駁了分析對學生是難以做到的說法。在解習題的過程中，我們要應用分析，亦要應用綜合，所以認為在解習題時我們單獨應用分析法或者綜合法是完全不正確的。

對於分析和綜合的解析方法，可以說是解習題的過程中的各個階段，至於作出這樣的結論，認為在學校中主要是應該使用綜合法，那是完全不正確的。這是減低了分析的作用，且不符合認識論和在我們學校中解習題的教學實踐的。

有些教師偏重於綜合法，因為在解習題時它能很快地達到目標。但這僅僅在解所謂內容很顯著的習題時是正確的，這種習題中所含有的數可以順次地一對對地取出或者新求出的數與以下的條件中的數亦可一對對地取出，在這些數上可以不加思考，沒有分析地進行運算，並且得到需要的答案。現在我們舉一個這種習題的例題。

習題 1. 斯塔哈諾夫工作者定購建築管理處給他們建築的、

五年內分期付款的房子。房子的總值是 14580 盧布，在第一年應該付出總值的 $\frac{1}{3}$ ，第二年付剩餘數的 $\frac{1}{3}$ ，第三年付新的剩餘數的 $\frac{1}{3}$ ，第四年又付剩餘的 $\frac{1}{3}$ ，第五年掃數付清，問工人在第五年付出多少錢？

此地量之間的依存關係很簡單，主要是需要學生會解一個運算的習題，且知道計算的技巧。

但是如果廣泛地應用主要是綜合法，則在解困難的，或已給量之間的依存關係是不明顯的習題時，將使學生處於很困難的境地。這兒有一個這樣的習題。

習題 2. 全校共購買 380 張電影票和戲票，一張戲票與一張電影票的價值的比是 $3\frac{1}{4} : 1.3$ 。一張電影票比一張戲票賤 2 盧布 40 戈貝。戲票數是電影票數的 $27\frac{3}{11}\%$ 。問所有的電影票和戲票共值多少錢？

在解這樣的習題時，用一個綜合法以及與這個方法相配合的解析：先求什麼？然後求什麼？等等，是不可能得到良好的結果的。毫無疑義，此地應該用兩種方法：分析和綜合。

2. 習題條件的解析方法

解析的方法區分如下：分析法，分析綜合法和綜合法。如果解析的方法是從習題的主要問題開始到次要的問題，則通常這個解析方法認為是分析法。但如果解析是按照相反的順序進行，即從已給的條件，從次要的問題到主要的問題，則這個方法列入

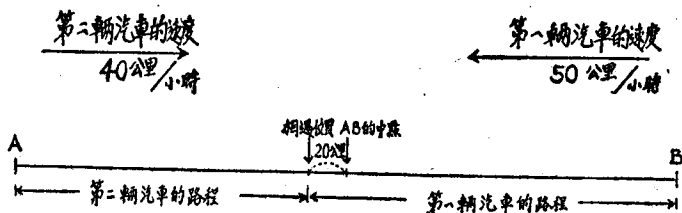
綜合法。

在許多情形中，實際應用着這兩種方法。這時不是開始就把複合的習題分解為幾個只含有一個運算的簡單的習題，而是分成內容較已給的習題簡單的幾個亦是複合的習題，然後轉入綜合的解析，解每一個派生出來的習題。最後這一種解析法通常稱為分析綜合法。

現在我們舉幾個解析習題的條件的例題。

習題 3. 兩輛汽車同時各從 A, B 兩處相向而行，一輛汽車從 B 出發，它的速度是每小時 50 公里，第二輛汽車從 A 出發，它的速度是每小時 40 公里。兩車在距 A 和 B 兩處的中點 20 公里處相遇。試確定 A 和 B 之間的距離。

習題 3 的圖解



在圖形上標明了運動的方向，路程的中點和相遇的位置，這個相遇的位置是分析了習題的條件大概地確定的，就是因為兩輛汽車同時出發，即它們在路程中行駛的時間是相同的，且第一輛汽車的速度是 50 公里/小時，而第二輛汽車的速度是 40 公里/小時，因此，第一輛汽車所經過的距離大於第二輛汽車所經過的距離，所以在條件中已表明，相遇的位置應該在偏向第二輛汽車出發

點的方向距中點 20 公里處。

按照下列的方式來記載習題的條件是合適的。

名 稱	路 程 (公 里)	速 度 (公里/小時)	時 間 (小 時)	確 定
第一輛汽車 第二輛汽車 第一和第二 兩輛汽車	距中點 20 公里處相遇。 它們的路程等於 AB。	50 公里/小時 40 公里/小時	同時出發	A 和 B 之 間的距離

作圖解和簡略的條件的記載過程已是某些條件的分析。假設把這樣的記載已作在黑板上和學生的練習本中，進一步的解析如下進行：

1) 確定在已給的習題中，下面這些是已知的條件：

a) 汽車的速度(每小時 50 公里和 40 公里)；

6) 出發的時間(同時出發)；

b) 相遇點的位置(距中點 20 公里處)。

2) 需要求 A 和 B 之間的距離。

我們想一下在問題中所含的量之間的基本依存關係，即距離，速度和時間之間的關係。我們要注意到全程 AB 是由兩段距離組成的：第一輛汽車行駛的路程和第二輛汽車行駛的路程。因此爲了求出主要問題的答案，必須先知道兩個數：運動時間及第一、第二兩輛汽車的速率和。

速率和是很容易求出來的，因爲已知第一輛汽車的速度是 50 公里/小時，第二輛汽車的速度是 40 公里/小時。所以應該把注意力集中在求運動的時間上。

如何確定時間？爲了求時間，應該利用習題中的那些條件？應該求出什麼？

藉下面這些問題與學生一起來確定：

我們知道，汽車在距中點 20 公里處相遇，我們肯定地說，汽車相遇的位置是按照第一輛汽車運動的方向在中點的左邊，因爲第一輛汽車比第二輛汽車行駛得快，而它們在路程中的時間相同，所以它們行駛了不同的距離，即第一輛汽車已越過中點 20 公里，但第二輛汽車還沒有到達中點，而距中點 20 公里。因此，我們可以求出來，到相遇時爲止，第一輛汽車較第二輛汽車多行駛多少公里。（從習題條件的圖解中可以看出，即 20 公里加 20 公里）。

所以，我們得到了在全部時間內第一輛汽車較第二輛汽車多行駛 40 公里。由此不難理解，如果在全部時間內第一輛汽車較第二輛汽車多行駛 40 公里，則知道它們的速率差，就可以求出汽車行駛的時間。顯然，時間等於每一輛汽車行駛的距離差除以它們的速率差。

現在很容易作出整個解題計劃。

在解題計劃中所進行的順序與分析時相反。

1. 如果已知第一輛汽車與第二輛汽車在 1 小時內各行駛 50 公里與 40 公里，則第一輛汽車較第二輛汽車在 1 小時內多行駛多少公里？

2. 知道汽車在距全部中點 20 公里處相遇，求到相遇時止，第一輛汽車較第二輛汽車多行駛的路程是多少？

3. 如果已知第一輛汽車比第二輛汽車多行駛 40 公里，且第一輛汽車每小時比第二輛汽車多行駛 10 公里，則兩輛汽車在行程中共有多少時間呢？

4. 如果已知第一輛汽車與第二輛汽車在 1 小時內各行駛 50 公里與 40 公里，那末兩輛汽車在 1 小時內行駛多少公里呢？

5. 如果已知兩輛汽車在 1 小時內相向行駛 90 公里，且運動 4 小時後相遇，則 A 和 B 之間的距離是多少公里？

解：

1) $50 - 40 = 10$ (公里)，

2) $20 + 20 = 40$ (公里)，

3) $40 \div 10 = 4$ (小時)，

4) $50 + 40 = 90$ (公里)，

5) $90 \cdot 4 = 360$ (公里)，

答：AB=360 公里。

現在我們再來研究一個習題。

習題 4. 在一個倉庫中有 185 噸煤，在另一個倉庫中有 220 噸煤，每日從每一個倉庫撥出 15 噸煤，問經過幾日後，第二個倉庫的煤是第一個倉庫的煤的二倍？

解這個習題是以減法的各部份的依存關係及善於按照差和倍數關係解習題為基礎的，即不僅是五年級的、而且甚至是四年級的教學大綱上所規定的知識。

在條件中說明，撥出煤以後，第二個倉庫所剩的煤是第一個倉庫所剩的煤的 2 倍，即已給了倍數關係，而按照存煤可以求它

們差的關係。提出這樣的問題是有益的：

1) 可以如何比較在倉庫中的存煤？(可以求出第二個倉庫的存煤比第一個倉庫存的煤多若干或者第二個倉庫的存煤是第一個倉庫的多少倍)。

2) 爲了用一個運算解出主要的問題，必須求出什麼？(必須求出在全部時間內，每一個倉庫撥出了多少煤以及每天撥出多少(後面那個數，即每天撥出的煤是 15 噸)。)

知識與經驗應該使學生信服，原存煤量的差與在每一個倉庫撥出同樣噸數的煤後所留下來的煤量的差，沒有改變，因爲在被減數和減數減去同樣的數時差不變。[這在我們的習題中就有：原來的差 $220 - 185 = 35$ (噸) 保持不變，因爲從 220 噸與 185 噸減去 15 噸的同樣的倍數]。

這樣一來，可以作出下面的結論：

倉庫中原有的煤的數量間的差，與在每一個倉庫中每天撥出 15 噸煤後所留下來的煤的數量間的差，都等於 $220 - 185 = 35$ (噸)。由此：

1) 知道差以及倍數的比等於 2，可以求在這兩個倉庫中留下來的煤有多少。顯然，1 份留下來的煤是 35 噸，而 2 份等於 $35 \cdot 2 = 70$ (噸)。

2) 然後應該按照剩餘的煤和原有的煤確定撥出的煤有多少，因爲我們知道了留下來的煤與原有的煤各有多少。

3) 知道了每一個倉庫撥出的所有的煤的數量和每天撥出的煤的噸數，可以解主要的問題，即求經過幾天後，第二個倉庫

的煤是第一個倉庫的煤的 2 倍。

在這樣解析後，很容易擬定解題計劃：

- 1) 求第一與第二兩個倉庫原有的煤的差。
- 2) 求差的份數，假定在第一個倉庫中剩餘 1 份，而在第二個倉庫中剩餘 2 份，或者求出在第一個倉庫中剩下來的煤有多少。
- 3) 如果已知第一個倉庫原有的煤是 185 噸，而留下來 35 噸，求撥出了多少噸煤？
- 4) 如果已知每個倉庫每天撥出 15 噸，而總共撥了 150 噸，問撥了幾天？

解：

- 1) $220 - 185 = 35$ (噸)，
- 2) $2 - 1 = 1$ (份)，計 35 噸，
- 3) $185 - 35 = 150$ (噸)，
- 4) $150 \div 15 = 10$ (天)，

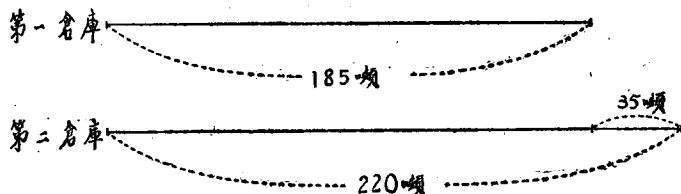
答：10 天。

爲了解這個習題，應用圖解法是合適的，那時習題的解析能大大地簡化，並且迅速地求出適當的解答。

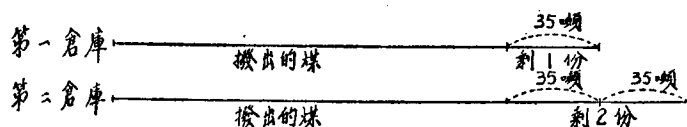
作圖解本身亦是分析的一部份。在圖形上可以看出，兩個倉庫中原有的及以後的煤的數量的差相同，且等於 35 噸。知道第二個倉庫留下來的煤是第一個倉庫留下來的煤的 2 倍，很易確定在第一個倉庫中剩餘這樣一份，而第二個倉庫中剩餘兩份，第一個倉庫剩餘的煤等於 35 噸。由此很易作出整個解題計劃，

這個解題計劃在前面習題條件的解析中導出。

1. 原有的煤。



2. 撥後剩餘的煤。



解習題以前應該解較簡易的類似的習題作為準備工作。

應該在口頭上解幾個較簡單的習題作為解習題 4 的準備工作。

- 1) 在第一個倉庫中有 40 噸煤，而在第二個倉庫中有 50 噸煤，一天內從每一個倉庫撥出煤 10 噸，問各剩煤多少？
- 2) 在兩天內，每天由每一個倉庫撥出煤 10 噸後，各剩煤多少？
- 3) 如果每天從每一個倉庫撥出煤 10 噸，三天後各剩煤多少？
- 4) 試比較，第二個所有的煤比第一個倉庫所有的煤多若干？
 - a) 開始時，
 - b) 在撥出 10 噸後，