数学教育研究基础丛书

Fundamental Series for Mathematics Educational Studies

顾泠沅 / 主编

邵光华 / 著

作为教育任务的数学思想与方法

Mathematical Thoughts and Methods as Educational Tasks

上海教育出版社

数学教育研究基础丛书
Fundamental Series for Mathematics Educational Studies

顾泠沅／主编
邵光华／著

作为教育任务的数学思想与方法

上海教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

作为教育任务的数学思想与方法/邵光华著.—上海：上海教育出版社，2009.9
ISBN 978-7-5444-2123-2

Ⅰ.作… Ⅱ.邵… Ⅲ.数学方法：思想方法-研究
Ⅳ.01-0

中国版本图书馆CIP数据核字（2009）第126846号

作为教育任务的数学思想与方法

邵光华 著

上海世纪出版股份有限公司
上 海 教 育 出 版 社 出版发行

易文网：www.ewen.cc

（上海永福路123号　　邮政编码：200031）

各地新华书店经销　　苏州望电印刷有限公司印刷

开本 787×1092 1/16 印张 23 插页 2

2009年9月第1版　　2009年9月第1次印刷

印数 1-5,000本

ISBN 978-7-5444-2123-2/O·0080　定价：48.00元

(如发生质量问题，读者可向工厂调换)

从书序

一

2004年元宵刚过，十多位数学教育方向的年轻博士，聚集在上海市教育科学研究院. 他们中有华东师范大学王建磐校长和我所带的五届学生，还有北京师范大学林崇德的学生、香港大学梁贯成的学生等. 久未谋面，话题特别多，谈得最集中的是数学教育研究中的问题与困惑. 整个白天谈不完，晚上移师瑞金宾馆再继续，而且还邀请了我的两位同事与朋友——上海市教科院教师发展中心主任周卫和上海市教育报刊总社副社长陈亦冰. 真是一个令人难忘的夜晚，就在那天，大家不约而同地意识到，年轻人重任在肩，群策群力编撰一套数学教育基础研究丛书，条件似已初具，于是策划了一个初步的方案. 此后每年有一或两次碰头，分工有所调整，人员不断扩大. 但编著原则不变：不求急就，力戒浮躁，成一本，出一本. 四五年过去了，当可逐一考虑出版.

其实，这也是我们这一代人的一个企盼. 我从大学数学系毕业，后来主持青浦教育改革实验，做到1987年，国家教育委员会要我攻读研究生，名为在职读书，实为补上教育基本理论这一课. 当时全国没有数学教育的博士点，我的导师刘佛年校长召集华东师范大学不同系所的六位著名教授联合培养，可是，全程六年就是没有数学教育的课程. 1999年，王建磐校长邀我合作创建数学教育的博士方向，设在课程与教学论专业，全国招生，至今已满十届，平心而论，我们藉以培养学生的数学教育内容，虽有初步框架，但仍然是数学与教育学、心理学的“领养儿”，尚无自己的独立品格. 这是个跨世纪的期待. 如今一批年富力强的精英，志愿自己组织力量来打造研究的基础，当然是件特别有意义的事情. 于是我建议，这套丛书要由“1960后”的中青年人来担纲，理由是只有他们才有15年至30年的时间来初成并打磨出自己的力作.

二

17世纪中叶，夸美纽斯号召“把一切事物教给一切人”，他的百科全书式的教材——《世界图解》，包括自然、人类活动、社会生活和语言文字诸方面，还没有独立成科的数学. 数学成为普通学校的一个科目，那是18世纪的事. 因此不少学者以为，严格地说学校数学教育萌芽于18世纪. 究其内容，仍沿袭古希腊以来重视“和行动没有关系的真科学”(如数论和抽象的几何学)的传统，几何学就是欧几里得《几何原本》的最初六卷，代数学和三角限于17世纪前材料的简缩，这一现象一直延续到19世纪之末，随着近代科学的迅速崛起和各国产业革命的深远影响，数学教育才有了迟来的觉醒.

20世纪的数学教育风云迭起. 回望这一百年，首先是出现所谓改造运动，冲破以往数学教育纯粹理性的象牙之塔，倡导应用的特别重要性. 1901年，彼利(J. Perry)在英国科学协会作“启蒙的改造”的演讲，主张由实践发现数学的法则，不光是说些教授的技巧. 几乎与此同时，克莱因(F. Klein)在自然科学会议席上作“对于中学数学和中学物理的注意”的演讲，推动了德国的新主义数学并形成“梅兰要目”；慕尔(E. Moore)在美国数学年会上发表“数学之基础”的会长演讲，指责初等数学范围内“理论和应用的划界分疆”，提出数学教育的根本问题是两者的“融合”，使数学、物理和日常生活有密切的关系. 这场运动开启了将数学教育作为研究对象的思想闸门. 然而，紧接着的是两次世

界大战的相继爆发，战争带来了混乱，刚开始发生变化的数学教育，有的搁置了，有的倒退了，当然也有像美国那样受战争影响小，可收渔翁之利、得以继续推进的. 当时教育界所谓传统派与现代派、接受式学习与活动式学习的激烈争论，对于美国数学教育的实用主义倾向起了推波助澜的作用.

接着，到了五六十年代，由于苏联人造卫星上天，引起了美国的教育改革，首当其冲的是数学教育，这就是遍及欧美诸国的新数学运动，推行数学教育的现代化. 其中布鲁纳(J. Bruner)主张任何年龄的儿童都能学会任何深奥的学问，只要加以针对性的处理. 改革中采纳了现代纯数学高度抽象和形式化的许多特点，例如小学引入集合，初中讲代数结构与逻辑结构，线性代数取代解析几何，再对微积分作形式改造等，几乎完全忽视对数学应用的考虑；方法上沿袭当时工业界用于技术开发的模式，先由专家学者研发然后自上而下推行，这样的变动严重脱离儿童的认识实际和常态的学校生活，既缺乏广大家长的支持，又没有必要的师资准备，结果陷入困境，整个七十年代，世界各国纷纷处于回到基础的调整阶段.

最后，进入八九十年代，数学教育改革重又蓬勃发展，这一浪潮以学生学习数学为立场，关注课程内容、教师培养和教学研究、课堂情境及其相互影响，主要有问题解决、非形式化和大众数学等口号的提出，还有计算机和计算器的使用. 改革又一次点燃争论，比如美国教育界的“数学大战”. 数学的学习，走问题化之路，还是结构化之路；要学习的过程，还是要学习的结果；浪漫的合情推理与严格的逻辑演绎、探究学习与基本训练，等等. 直到 20 世纪末，争论才以调和的方式告一段落，叫做平衡基本技能、概念理解和问题解决. 2008 年 4 月，美国“国家数学咨询委员会”公布《成功需要基础》的总结性报告，重申基础的重要性，提倡“阶梯式”进步的理念.

在我国，学校普遍开设数学课程，当在辛亥革命(1911 年)之后，至今也是一百年. 开始时移学日本，后曾模仿美国. 新中国成立之初，基本上照搬苏联. 后来经过五六十年代的大跃进和调整巩固，六七十年代的“文革”和拨乱反正，直到始于 20 世纪七十年代末的改革开放. 数学教育的撞击和动荡随处可见，其中有活跃也有纷乱，有繁荣也显无力，思想多元了，观点分歧了，但这正是时代复兴的伟大征兆，这正是诞生适合自己的数学教育之路的前夜.

三

我国学者关于数学教育的早期研究，不能不关注陈建功先生的“20 世纪的数学教育”一文(原载《中国数学杂志》第一卷第二期，1952 年). 该文提出了支配数学教育目标、材料和方法的三大原则，他写道：(1) 实用性的原则，数学在日常生活中有广泛的实用价值，自然科学、产业技术、社会科学的理解、研究和进展都需要数学. 假如数学没有实用，它就不应该编入教科书之中. (2) 论理的原则，数学是由推理组成的体系，推理之成为说理体系者，限于数学一科. 忽视数学教育论理性的原则，无异于数学教育的自杀. (3) 心理的原则，站在学生的立场，顺应学生的心理发展去教学生，才能满足他们的真实感. 学生不发生任何真实感的教材，简直没有教育的价值. 而且提出三原则必须统一，心理性和实用性应该是论理性的向导；选择教材不应该先将实用性和论理性分别采取，然后合拢，数学的真理性具有向实在进展和内部对应联系的两面，两面不会分道扬镳、各自存在. 据此三原则，陈先生评述了 20 世纪以前数学教育偏重理论、排斥应用的弊病，肯定了 20 世纪初彼利等改造运动的重要意义. 更为有趣的是，这一世纪后来相继出现以结构主义为特征的新数学运动和站在学生学习立场的第三波浪潮，竟然都是三原则的各自倚重和摇摆，而最终却都以平衡各方为结局.

把数学教育作为一种理论来研究，荷兰数学家和数学教育家弗赖登塔尔(H. Freudenthal)在国际上作出了重大贡献. 他于 1967 年至 1970 年间任国际数学教育委员会(ICMI)主席，在他倡议下召开了首届国际数学教育大会. 他认为，数学源自常识，人们通过自身的实践与反思，把这些常识组织起来，不断在横向或纵向上系统化. 因此他提出数学学习主要是如前所说的“数学化”，或者是进行

"再创造",从而培养学生自己获取数学的态度,构建自己的数学.弗赖登塔尔从数学发生发展的特有过程出发,架设了一条通往教育的桥梁.1987年冬,他曾应邀来华讲学.他的《作为教育任务的数学》一书和许多独特而深刻的见解,在我国广为传播.与数学家迥然不同,心理学与现代认知理论却以精密研究的姿态介入到数学学习的探讨中来,从行为分析到认知理论,从建构主义到情境学习,视角新颖,有的还切中当今数学教育的流弊,一时间如异军突起,影响颇深,推动了数学教育科学化的进程.但是,科学方法对人的心理研究毕竟处于比较肤浅的程度,一旦用于数学,显见其琐碎与凌乱.学习的理论与数学教育的现实,还是一个未曾跨越的缺口,基础演绎的数学教育研究尚在起始阶段.与此同时,致力于扎根、总结、归纳、借鉴乃至升华的事情尤须实实在在地做.于是,凭借教育工作领域严格分门别类的研究骨架终于被多数人接纳.20世纪八十年代美国凯伦(T. Kieren)的"数学教育研究——三角形"一文也被介绍到我国,他把数学教育研究比作一个三角形,三个顶点分别是课程设计者、教师和学生,对应着课程、教学和学习"三论";三角形的内部以儿童和成人实际学习数学的经验为兴趣中心,包括① 数学教师在备课、教学和分析课堂活动时所做的非正式研究,② 定向观察,③ 教学实验;三角形的外部有数学、心理学、哲学、技术手段、符号语言等很多方面.这一图式在数学教育理论框架的初建中影响较大,但它显然并不仅仅适用于数学教育,而是属于通式的分类.

就数学学科本身的特点来说,中西方的差别也非常值得注意,这对中国特色的数学教育理论不可或缺.吴文俊先生在20世纪八十年代发表了《对中国传统数学的再认识》、《出入相补原理》等多篇文章,明确指出:以《几何原本》为代表的欧几里得体系,着重抽象概念与逻辑思维以及概念与概念之间的逻辑关系,表达形式由定义、公理、定理、证明构成;而我国的传统数学,以《九章算术》为例,基本上是一种从实际问题出发,经过分析提炼出一般的原理、原则与方法,以最终达到解决一大类问题的体系.吴先生所说的两种思维各具特色,一直发展到当代公理化与算法化的两大分野.两种思维、两大分野的融会,也许能为数学教育新体系的建立提供思路.看来我们对中华文化中的精华还是不能妄自菲薄的.

四

然而,中国文化绝非仅执实用一端,而是讲求明体达用,体用一源.这里的"体"是个相对稳定且一以贯之的系统,而"用"则随时随物而变具有区别对待的特性.西方人侧重达用,中国人素好明体.与欧美学者接触,他们讲区别,我们说求同;他们讲变易,我们说万变不离其宗;他们赞赏不同意见和对立,我们崇尚中和与圆融;他们善用形式逻辑,我们喜好辩证思维.如此巨大的文化差别,在世纪之交竟以"悖论"的形式呈现了一个国际关注的热点:华人如何学习数学.20世纪八十年代以来,一方面,中国学生无论在数学测试的国际比较,还是奥林匹克数学竞赛中,表现都优于西方学生;另一方面,许多西方研究者认为,中国学生的学习环境不太可能产生好的学习,比如教师单一讲授、低认知水平的频繁考试等,被形容为被动灌输和机械训练.这种看似矛盾的结果引出了深入的讨论,有的认为是由于有好的课程,有的认为是由于教师的有效教学,关注扎实的基础知识和基本技能的学习,也有的认为这是华人家庭、社会特有的包括考试在内的文化支撑.个中原因,还在进一步的研究中.

这里,我们不妨从另一角度去看看,前面说到美国《成功需要基础》的总结报告,它针对美国数学教育重点不清、逻辑关系不明等要害,在改进的要点中强调重点突出、基础扎实、前后连贯这三条,其中国文化元素的浓重色彩,当是不言自明的.事实上,我国的百年数学教育,尤其是新中国成立以来,经历正面如传统经验的深厚积淀,反面如"文革"的一时劫难,再加上最近30年来的改革开放,吸纳世界上各种先进的教育理念与精神,在整个"正反合"的洗礼中,中国数学教育改革取得的

如下原则是宝贵的：第一是兴趣与爱好，没有兴趣没有学习、不讲致用、缺乏责任难有好的数学学习. 第二是循序渐进的儒家文化，数学教学尤其要讲究有层次推进的中国理念，这已被境内外广泛推崇. 第三，实践和探索中的感悟，尤其是数学活动经验中的学习、数学思想方法的累积，这是实践型、创新型人才培养的途径，但这一条正是我国数学教育的软肋，进一步的改革却要在这方面苦意极思、痛下工夫. 第四，反省和反馈，作为掌握知识技能、激励信心和创造精神的有力保障，已成为反思文化的重要组成部分.

五

一种文化有了深厚的根，才能吸收外来文化. 无根而移用，屡试屡挫. 今天，世界的数学教育不能不包括中国的数学教育，并作为其发展的重要的组成部分；我们也应把我国数学教育的基础研究与发展置于全球数学教育的视野之中. 在策划并撰写本套丛书的时候，大家都清醒地意识到这一点. 这件事要真正做到家，恐怕需要几代人的努力. 我们这一代人，不过是铺路的石子，中青年学者来日方长，分步走是个办法. 首先尽量翔实地收集国际、国内数学教育研究的有关资料、基础性观点和重要样例；然后是在枚举基础上的分类与梳理，逐步做到明源头、辨流派，适当附以评论；完成了这两步之后，才是力图形成一定的体系，抒发著者的独立见解. 整个丛书的编撰过程，本身就是个完整的研究过程. 现在付梓的几本，也许仅是属于开头一两步的初成之作. 在此，我代表著者诸君，诚恳地希望读者阅读后多提意见，以备日后进入后两步时采纳. 在这里，我想所谓好的研究者，应该是这样的人，他用自己的脚走别人没有走过的路，而平庸的研究者不仅走现成的路，而且永远拄着别人的拐杖.

最后，本丛书的编撰，各位中青年学者、教授在繁忙的工作之余付出了艰辛的劳动，他们常常夜以继日地写作，每年还要挤出时间认真参加丛书碰头会，为此，对他们表示深深的谢意. 还要感谢上海市教育科学研究院的杨玉东博士在联络各位著作者中所做的出色工作，感谢上海教育出版社王耀东、刘懿和赵海燕三位对出版本丛书的支持和指导，使本丛书得以呈现在广大读者面前.

顾泠沅

2009 年新春

Contents | 目 录

第一章

数学思想与方法概论

学校数学一直以来都把算术、测量、代数和几何作为基础. 但是,作为数学的根系——把营养供给正在生长的数学分支和深刻的思想,还有许多主题. 我们可以想到:

特殊的数学结构:

◆数 ◆形 ◆算法 ◆函数 ◆比 ◆数据

或者属性:

◆线性的 ◆随机的 ◆周期的 ◆极大的
◆对称的 ◆近似的 ◆连续的 ◆光滑的

或者行动:

◆表示 ◆建模 ◆控制 ◆实验
◆证明 ◆分类 ◆发现 ◆可视化
◆应用 ◆计算

或者抽象:

◆符号 ◆等价 ◆无穷 ◆变化
◆优化 ◆相似性 ◆逻辑 ◆递归

或者态度:

◆惊异 ◆美 ◆意义 ◆实在

或者行为:

◆运动 ◆稳定性 ◆混沌 ◆收敛
◆共振 ◆分岔 ◆迭代 ◆振动

或者关系:

◆离散对连续 ◆有限对无穷 ◆算法的对存在的
◆随机的对决定论的 ◆精密的对近似的

这些不同维度的观点显示出数学的结构的复杂性. 从每种观点,我们都能认出各种线索,其中每条线索都具有一定的力量,使我们能够从孩提时期的日常直觉,经过学校和学院一直到科学或数学的研究发展,形成有重要意义的数学思想. 数学科学的健全的教育要求我们实际上同所有这些极为不同的观点和思想打交道. ①这深刻反映了数学思想的丰富性和多样性.

第一节 数学思想与方法释义

数学的逻辑结构的一个特殊的和最重要的要素就是数学思想,整个数学科学就是建立在这些思想的基础上,并按照这些思想发展起来的. ……数学的各种方法是数学最重要的部分. ②

——弗利德曼

方法就是把我们应注意的事物进行适当的整理和排列. ③

——笛卡儿(Descartes,1596—1650)

---

① 林恩·阿瑟·斯蒂恩编. 胡作玄等译.《站在巨人的肩膀上》. 上海:上海教育出版社,2000. 3—4.
② [苏] Л. М. 弗利德曼著. 陈心五译.《中小学数学教学心理学原理》[M]. 北京:北京师范大学出版社,1987. 21.
③ [美] G. 波利亚著. 刘远国,秦璋译.《数学的发现——对解题的理解·研究和讲授》(第二卷)[M]. 北京:科学出版社,1987. 437.

我们知道，一段文字，有其段落大意；一篇课文，有其中心思想. 同样，一门学科也有该学科的核心思想，这种思想在意义上如同课文的中心思想，是建立在这门学科内容之上、蕴含在学科内容之中而又高于学科内容的东西. 数学学科亦然. 当今数学教育中，数学思想可谓是个核心概念，然而，对什么是数学思想，却没有统一的答案. 多角度、多层面理解数学思想可能更有益. 数学方法较数学思想容易理解，但也没有公认的界定. 所以，我们能看到关于数学思想和数学方法的各种不同的论述.

一、数学思想及其特征

1. 数学思想的含义

丁石孙在《数学思想的发展》一文中，表达了自己关于数学思想的观点. ①在他看来，数学思想就是人们对于数学的看法. 这些看法包括：数学在人类的知识体系中所占的地位，数学与生产实践的关系，数学与其他科学的关系，以及数学发展的规律，数学研究方法的特点等. 这些看法随着数学的发展在不断地发展，反过来，这些看法在每一个时期对数学的进一步的发展都有着或多或少的影响. 数学发展的历史应该成为数学思想研究的出发点，具体可以从三个方面着手研究. 第一，以数学发展的各个阶段作为对象，研究在数学发展的各个阶段上，人们对数学有哪些主要的看法，这些看法与当时的数学发展的状况的关系，与当时的社会及一般的哲学观点的关系，以及这些看法对数学的发展所起的影响. 第二，研究过去与近代的大数学家的科学研究的方法，他们对数学的看法，以及他们的哲学观点. 第三，由于数学的概念标志着数学的发展，反映着人类对客观世界认识的深度，因此对每个概念是如何反映客观世界的某一个侧面进行哲学分析应作为数学思想研究的内容之一. 重要的数学概念有数与数系、空间、集合、连续性、函数、变量、序、等价、运算、不变量、概率、公理化方法、证明论、可行性等.

张奠宙与过伯祥认为②，数学思想尚不成为一种专有名词，人们常用它来泛指某些有重大意义的、内容比较丰富、体系相当完整的数学成果. 比如，微积分思想、变换群下的不变量思想等. 往小一点的方面说，函数映射观点、方程平衡观点、向量观点、参数观点等也是数学思想. 同一个数学成就，当用它去解决别的问题时，就称之为方法；当评价它在数学体系中的自身价值和意义时，则称之为思想. 比如，用"极限"去求导数、求积分时，人们就说"极限方法"，当我们讨论它的价值，即将变化过程趋势用数值加以表示，使无限向有限转化时，人们就讲"极限思想"了. 为了将这两重意思合在一起说，于是也有"极限思想方法"之类的提法——"数学思想方法"的提法正与之类似.

郑毓信认为③，"数学思想"应有两种意义的理解. 第一种意义是在与具体的数学知识内容特别是其最终的、严格的表述形式相对立的意义上得到了确认，也就是在对数学研究活动中的思维活动与思维活动的最终产物之间进行明确区分的基础上，界定了"数学思想"的意义. 即如某一研究问题是如何产生的，数学家们又是如何创立了某一新的理论或方法的，此类问题属于"数学思想"范畴，尽管这里所说的数学思想不同于相应的知识内容，但在这两者之间又存在着密切联系，第一种意义上的数学思想的一个重要特征是它从属于具体的数学知识. "数学思想"的第二种意义是指与具体的数学内容相分离并具有更大的普遍意义的思维模式或原则. 即如数学家们通常是如何去确定自己的研究方向的，他们在解决问题的过程中又常常采取哪些策略，此类问题属于这一意义的"数学思想"范畴. 由于第二种意义上的数学思想具有较强的方法论意义，因此就可被特称为"数学思想方法"或"数学思维方法"，这个意义上的数学思想方法不再从属于任一特定的数学分支，从而成为数

① 丁石孙.《数学思想的发展》[J].《自然辩证法通讯》，1956(0).
② 张奠宙，过伯祥.《数学方法论稿》[M]. 上海：上海教育出版社，1996. 3.
③ 郑毓信.《数学思想、数学思想方法与数学方法论》[J]. 科学技术与辩证法，1993(5).

学方法论的研究对象.

蔡上鹤认为①,所谓数学思想,是指现实世界的空间形式和数量关系反映到人的意识之中,经过思维活动而产生的结果,它是对数学事实与数学理论的本质认识.数学思想属于科学思想的一种,但科学思想只有被"数学化"后才成为数学思想.例如,分类思想是各门科学都要运用的思想,语文分为文学、语言和写作,外语分为听、说、读、写、译,物理学分为力学、热学、声学、电学、光学和原子核物理学,化学分为无机化学和有机化学,生物学分为植物学和动物学等.同样,只有将科学思想应用于空间形式和数量关系时,才能成为数学思想.如果用逻辑划分作为标准,那么,当该逻辑划分与数理有关时(可称之为"数理逻辑划分"),可以说是数学思想;当该逻辑划分与数理无直接关系时(例如把社会中的各行各业分为工、农、兵、学、商等),不应该说是运用数学思想.同样,当且仅当哲学思想(例如一分为二的思想、量质互变的思想和肯定否定的思想)在数学中被大量运用并且被"数学化"时,它们也才可以被称为数学思想.

张国栋与李建华认为②,通常关于数学思想(包括方程思想、函数思想、数形结合思想、转化思想、分类讨论思想和公理化思想等)的认识理解缺乏有机的联系和层次,或过于宽泛如函数思想、转化思想,或过于细微如方程思想、分类讨论思想,很难反映数学思想的整体面貌.在数学教学过程中,人们更多的是利用它们对问题的解答作出解释和说明,而不是通过对数学思想本质的理解来指导教学.由此,张国栋和李建华二人从数学知识系统的结构特点、数学的认识论特点和数学发展的历史学特点出发,提出了基元与整体、转化与整合、扩张与因袭的数学思想的基本框架.

曲立学认为③,"数学思想,是人们对数学科学研究的本质及规律的深刻认识.这种认识的主体是人类历史上过去、现在以及将来的有名与无名的数学家;而认识的客体则包括数学科学的对象及其特性,研究途径与方法的特点,研究成就的精神文化价值及对物质世界的实际作用,内部各种成果或结论之间的互相关联和相互支持的关系等."

臧雷认为④,应该从两个方面来理解数学思想.一种是狭义理解,主要是就中学数学知识体系而言,中学数学思想往往是指数学思想中最常见、最基本、较浅显的内容,比如函数思想、化归思想,等等.这些最常见、最基本的数学思想也是从某些具体的数学认识过程中提升出来的认识结果或观点,并在后继的认识活动中被反复运用和证实其正确性.另一种是广义理解,即数学思想除上述内容外,还应包括关于数学概念、理论、方法以及形态的产生与发展规律的认识.

关于数学思想的认识之所以出现如此大的差异,主要是因为人们看待数学思想的视角不同.有些学者是从数学领域内部来看待数学思想的,有些学者是跳出数学领域而站在哲学认识论高度来审视数学思想的,还有些学者是从数学教育角度释义的.尽管观点不同,但透过这些观点能够看出,"数学思想的历史也就是数学基本概念、重要理论产生和发展的历史,也是数学家和哲学家的数学观发展的历史",从数的概念的产生和发展,到微积分的发明和现代数学各分支的形成,无不体现着某种数学思想.

那么,究竟什么是数学思想?让我们先了解一下关于数学和思想的界定.关于数学,目前公认的还是恩格斯的定义:数学是关于客观世界数量关系和空间形式的科学.关于思想,《现代汉语词典》中,思想被解释为客观存在反映在人的意识中经过思维活动而产生的结果;《辞海》里称思想为理性认识;《中国大百科全书》视思想为相对于感性认识的理性认识结果.而理性认识是认识过程的高级阶段和高级形式,是人们凭借抽象思维把握到的关于事物的本质、内部联系的认识,主要包括概念、判断和推理三种基本形式.理性认识以抽象性、间接性、普遍性为特征,以事物的本质、规律为对象和内容,是人们在实践基础上对客观事物的普遍本质和一般特性的反映.所以,思想一般被看

① 蔡上鹤.《数学思想和数学方法》[J].中学数学[J],1997(9).
② 张国栋,李建华.《数学思想与数学教育》[J].北京教育学院学报,1998(2).
③ 曲立学.《关于"数学思想"的探讨》[J].数学教育学报,1994(1).
④ 臧雷.《试析数学思想的含义及基本特征》[J].中学数学教学参考,1998(5).

成是认识的高级产物，是对事物本质的、抽象的、概括的理性认识结果. 由此推演，数学思想可以界定为“现实世界的空间形式和数量关系反映在人的意识中经过思维活动而产生的结果”.

上述定义哲学味道较重，也过于宽泛. 因为每一个数学知识都是人类理性认识的结果，根据上述定义，数学知识内容本身也就是一种思想，这样一来，数学思想就是几千年来人类关于数学范畴的理性认识的结晶，外延就非常广大，这种理解无助于数学教育实践. 所以，我们有必要从数学教育的角度给数学思想以具体化的阐释. 从数学教育角度来讲，我们认为数学思想应被理解为更高层次的理性认识，那就是关于数学内容和方法的本质认识，是对数学内容和方法进一步的抽象和概括. 例如，对微积分内容、概率统计内容的进一步概括而形成的微积分思想、概率统计思想，对形成欧几里得几何体系的演绎法、中国古代数学体现的“术”与“法”的进一步抽象而形成的公理化思想、算法化思想，都属于这个层面的数学思想. 这样，数学思想就被看成是从某些具体的数学内容和方法中提炼上升的数学观点，比一般的数学内容和方法具有更高的抽象和概括水平. 这种理解具有教育实践价值，因为只有这样，我们谈论“数学教学要重视数学思想的渗透”才有意义.

另外，我们认为，数学思想还应含有关于数学各分支之间的共性和联系以及整个数学的理性认识，这类思想可称为数学哲学思想，如数学中的辩证思想.

这样，从外延来看，数学思想就包括基于数学学科内容的思想、方法论层面的思想以及更高层次的数学哲学思想.

2. 数学思想的特征分析

根据我们对数学思想的理解，能够得出，数学思想含于数学内容和方法之中，而又高于数学内容和方法. 它是联系数学知识的纽带，对于具体的数学知识具有巨大的凝聚力，起着结晶核的作用. 它能将分散的知识统整串联起来，组成一个整体，使数学知识结构更加紧凑，使不同的领域能联系起来，具有举一纲而万目张的作用. 例如，对应思想将平面和数对联结起来，形成了解析几何，从而几何与代数建立起了实质性的联系；方程与函数思想将有关二次三项式、一元二次方程、一元二次不等式、一元二次函数等问题统整了起来，归结为一元二次函数的图像与坐标轴交点问题的探究，等等.

人们的理性认识之所以高于感性认识，是因为理性认识能反映、揭示事物普遍的、必然的本质属性及联系，这是理性认识的一大特点. 数学思想作为一种理性认识，是对数学对象本质属性及联系的深刻揭示，具有较高的概括性. 所以，数学思想除了是具体数学成果的本质体现之外，更是这些成果背后深层次的共性的概括. 这种概括性表现在数学内部，它是数学知识的“质”与“核”，是数学知识迁移的基础与源泉，是沟通数学各分支间联系的桥梁与纽带. 例如，由圆内接正多边形边数和圆外切正多边形边数倍增而趋于圆来求圆面积和求圆周长的极限思想进一步抽象概括发展为分割求和取极限的微积分思想，是众多学科发展的源头. 另一方面，这种概括性表现在数学外部，它能沟通数学与其他学科及社会科学的联系，对社会科学的建立产生了重要影响. 如欧几里得(Euclid, BC 330—275)《几何原本》的公理化思想已超越数学理论范围，渗透到其他学科领域. 莱布尼茨(Leibniz, 1646—1716)曾写过一篇题为《选立波兰王的政治证明典范》的论文，利用《几何原本》所体现的公理化思想方法用 60 个命题和论证证明了诺依堡君主一定要被选为波兰王. ①意大利学者维柯“用一种严格的数学方法”，即公理化方法，写成了一部名为《普遍法律的唯一原则》的著作. ②17 世纪的唯心主义学者斯宾诺莎仿效《几何原本》，用公理化思想为指导，把人的神、心灵、情感和理智等当作几何学中的点、线、面来研究，写出了名著《伦理学》，全书分 5 部分，每部分都由“定义”、“公则”、“公设”、“命题”组成，“命题”下不但有“证明”，“证明”下还有一些“附释”. ③著名的人口学家马

① [德] 文德尔班著. 罗达仁译.《哲学史教程：下卷》[M]. 北京：商务印书馆，1993. 545.
② [意] 维柯著. 朱光潜译.《新科学》(下册)[M]. 北京：商务印书馆，1989. 656—657.
③ [荷兰] 斯宾诺莎著. 贺麟译.《伦理学》[M]. 北京：商务印书馆，1983.

尔萨斯 1789 年的《人口论》，也是借鉴了欧几里得的演绎模型，他把下面两个公设作为他的人口学的出发点：人需要食品；人需要繁衍后代．接着他从对人口增长和食品供求增长的分析中建立了他的数学模型．这个模型简洁，有说服力，对各国的人口政策产生了重大影响．可见，数学思想曾在人类思想史上扮演过极其重要的角色．正如怀特海（A. N. Whitehead，1861—1947）所言："由于 17 世纪数学家盛极一时，18 世纪的思想便也是数学性的，尤其是在法国的影响占优势的地方更是如此．"①

数学思想是数学的根本，也是数学产生和发展的基础，日本学者米山国藏深刻指出："……数学的精神、思想和方法却是创作数学著作、发现新的东西，使数学得以不断地向前发展的根源．"②数学学习也一样，了解和掌握数学学科的基本思想是数学学习的基础，能帮助学生更好地理解数学这门学科的本质．

二、数学方法及其分类

1. 数学方法

要想回答什么是数学方法，首先对方法应有一个清楚的认识．然而，人们对方法也有不同的理解，有人对古今中外方法的不同理解进行过详细总结．③

（1）方法是一种规则和标准

古代《墨子·天志》云，轮人有规，匠人有矩（规即圆规；矩是直角拐尺，尺上有刻度，长为股，短为勾）．"今轮人操其规，将以量度天下之圆与不圆也，曰：中吾规谓之圆，不中吾规谓之不圆．是以圆与不圆可得而知也，此其故何？是圆法明也．匠人亦操其矩，将以度量天下之方与不方也，曰：中吾矩者谓之方，不中吾矩者谓之不方．是以方与不方皆可得而知之．此其故何？则方法明也．"可见，"方法"一词即为度量圆形或方形之法，泛指一种标准和规则，又为一种行事之理．

（2）方法是一条道路和途径

17 世纪英国哲学家霍布斯认为，"在哲学里，'方法'就是根据结果的已知原因来发现结果，或者根据原因的已知结果来发现原因时所采取的最便捷的道路．"其实，西方"方法"一词最早起源于希腊语，字面意思是沿着道路运动，其语义学解释是指关于某些调节原则的说明，这些调节原则是为了达到一定的目的所必须遵守的．

（3）方法是一种工具和手段

著名哲学家黑格尔认为，"在探索的认识中，方法也就是工具，是主观方面的某种手段，主观方面通过这个手段和客体发生关系．"俄国生理学家巴甫洛夫也指出："科学方法乃是作为客观世界主观反映的人类思维运动的内部规律性，或者也可以说它是'被移植'和'被移入'到人类意识中的客观规律性，是被用来自觉地有计划地解释和改变世界的工具．"科学方法是在正确理论指导下研究问题、解决问题的手段和工具．

（4）方法是一种程序和结构

亚里士多德（Aristotle，约 BC 384—322）把逻辑证明的方法称为"科学的实际程序"，培根把实验方法称为"实验程序"．"研究科学的方法来自科学本身，来自研究科学的全过程．有的科学家为了使他的作品精美，在做出结果后把'脚手架'拆掉，也就是把过程都删掉．不过，我们可不能忘记：方法就是程序，就是过程，只有在那并不完美的过程中，才能找到完善的方法．"④可见，方法被认为是人们活动的程序和步骤，是为了某种目的而采用的途径、手段、方式和操作的总和．

---

① ［英］怀特海著．何钦译．《科学与近代世界》[M]．北京：商务印书馆，1959. 32.
② ［日］米山国藏著．毛正中，吴素华译．《数学的精神、思想和方法》[M]．成都：四川教育出版社，1986. 序.
③ 韩增禄．《"方法"概念初探》[J]．自然辩证法研究，1986(4).
④ 欧阳绛著．《数学的艺术》[M]．农村读物出版社，1997. 208.

(5) 方法是一种技巧

意大利学者佩拉认为,“首先,科学方法是一个程序;其次,科学方法是一套规则;第三,科学方法是一种概念上和操作上的技巧,由于它的作用,由程序构成规则规定的一个步骤才被实际完成.”其实,著名数学家和数学教育家波利亚(George Polya,1887—1985)说过:一个想法使用一次是一个技巧,经过多次的使用就可以成为一种方法.

(6) 方法是一种理论知识的实际应用

苏联学者什托夫认为,“理论和科学方法之间的区别是相对的,甚至可以说,科学方法就是理论的实际应用,就是行动中的理论.”

(7) 方法是问题的对立面

方法都是相对问题而言的,有了问题,人们才会寻找解决问题的方法,没有问题就没有方法产生,方法是与问题相对的,从这个意义上讲,方法是问题的对立面.

上述关于方法的各种认识,都有一定道理,都是对方法概念的一种解读.再看各种辞书,对方法也有不同解释.如我国《辞源》中对“方法”的解释是“办法、方术或法术”;《苏联大百科全书》对“方法”一词的界定是“表示研究或认识的途径、理论或学说,即从实践上或理论上把握现实的、为解决具体课题而采用的手段或操作的总和”;美国麦克来伦公司的《哲学百科全书》将“方法”解释为“按给定程序达到既定成果必须采取的步骤”.

从以上论述能够看出,方法一词是一个可多角度理解的概念.将这些观点综合起来,我们可给方法一个界定:方法是指人们为了达到某种目的而采取的手段、途径或行为规则,具有程序性、规则性、可操作性、模式性等特征.方法因问题而产生,因能解决问题而存在.

对于数学方法,逻辑上讲,只需在“方法”一词前加限制词“数学”就行了,即数学领域中的方法或有关数学的方法,但这样是不能深刻揭示数学方法的内涵的.于是,也出现了关于数学方法的不同的观点和表述形式.

第一种观点认为,数学方法是人们从事数学活动时所使用的方法,是指解决数学问题的途径、策略和手段.第二种观点认为,将数学方法只看作是解决数学问题的方法仅是数学方法这一概念外延的一个部分,由于用数学去解决实际问题也需要有一定的门路与程序,所以数学方法这一概念外延的另一个方面是用数学去解决实际问题的方法.第三种观点从数学方法形成过程来描述数学方法,认为人们通过长期的实践,发现了许多运用数学思想的手段、门路或程序,同一手段、门路或程序被重复运用了多次,并且都达到了预期的目的,这种手段、门路或程序就成为数学方法.第四种观点从数学作为一门工具性学科来谈论数学方法,认为应同时考虑数学内部和数学外部,既应该作为“科学研究方法”,又应该作为“应用方法”看待,即将其作用范围扩展到数学以外的领域——自然科学、技术科学或社会科学等各个方面,可更广义地理解为用数学语言表述事物的状态、关系和过程,并加以推导、演算和分析,以形成对问题的解释、判断和预言的方法.①

我们认为,从作为数学教育任务的角度看,数学方法应被看成是在数学地提出问题、研究问题和解决问题(包括数学内部问题和实际问题)的过程中,所采用的各种手段或途径.

显然,数学知识内容是数学方法的基础和载体,没有数学知识内容做基础,数学方法无从谈起.但从数学的产生历史考察,不是有了某个数学知识之后,才产生某种方法,往往是知识和方法同时产生,方法也作为知识内容的一部分.

数学方法具有高度的抽象性,而且技巧复杂,不懂数学语言的人,即便告诉他方法程序,他也难以运用到具体问题上去.如因式分解的十字相乘法,初学时即便懂得原理,也难以运用.这表明,数学方法的特殊性在于:数学方法不在记忆,重在理解,只有理解了,才可能用好.

---

① 蔡上鹤.《数学思想和数学方法》[J].中学数学,1997(9).

如果把知识分为陈述性知识、程序性知识和策略性知识的话，则数学陈述性知识与数学方法差别最大，数学策略性知识与数学方法最为接近．数学教科书上呈现的多是数学知识，运用这些知识解决问题才能形成数学方法．

2．数学方法的分类

数学方法是个大家庭，种类繁多，层次也不同．例如，解二元一次方程组的方法有三个层次：消元法是第一个层次，起宏观主导作用，规定着方法的主方向；为了消元可考虑加减消元法或代入消元法，所以，加减消元法或代入消元法可以看作第二个层次的方法；更为具体一点，如若选择了代入法，那么，就要对一个方程进行具体变形，使其中一个未知数用另一个表示，那么如何从一个方程中将其中一个未知数用另一个表示的变形方法，可以看作第三层次的方法，具有直接操作性．为了更深入地研究，人们对数学方法进行了各种分类或分层．

张奠宙等将数学方法分为四个层次①：第一层次是基本和重大的数学思想方法，如模型化方法、微积分方法、概率统计方法、拓扑方法、计算方法等；第二层次是与一般科学方法相应的数学方法，如类比联想、分析综合、归纳演绎等；第三层次是数学中的特有方法，如数学表示、数学等价、数形转换等；第四层次是中学数学中的解题方法和技巧．

罗增儒将数学方法分为三个层次②：第一层次除了包含有观察、实验、比较、分析、归纳、类比等一般科学方法外，还包含有符号化、公理化、模型化、结构化、化归、数形结合等数学特有的思想方法；第二层次包含有分布在各数学分支中具体的数学思想方法，如集合与对应的思想方法、函数与方程的思想方法、抽样统计的思想方法、变换群划分几何学的思想方法、极限思想方法、逐次逼近的思想方法等；第三层次是指涵盖在具体的数学思想方法下面具体进行解题的方法，包括：① 适应面较广的求解方法，如消元法、换元法、降次法、待定系数法、反证法、同一法、数学归纳法（及递推法）、坐标法、三角法、数形结合法、构造法、配方法等；② 适应面较窄的求解技巧，如因式分解法以及因式分解中的“裂项法”，函数作图中的“描点法”以及三角函数作图中的“五点法”，几何证明中的“截长补短”法、“补形法”，数列求和中的“拆项相消法”等．

蔡上鹤将数学方法区分为宏观的和微观的．宏观的数学方法包括：模型方法、变换方法、对称方法、无穷小方法、公理化方法、结构方法、实验方法．微观的且在中学数学中常用的基本数学方法又分为以下三类③：

（1）逻辑学中的方法．例如分析法（包括逆证法）、综合法、反证法、归纳法、穷举法（要求分类讨论）等．这些方法既要遵从逻辑学中的基本规律和法则，又因运用于数学之中而具有数学的特色．

（2）数学中的一般方法．例如建模法、消元法、降次法、代入法、图像法（代数中常称图像法，解析几何中常称坐标法）、向量法、比较法（数学中主要是指比较大小，这与逻辑学中的多方位比较不同）、放缩法、同一法、数学归纳法（这与逻辑学中的不完全归纳法不同）等．

（3）数学中的特殊方法．例如配方法、待定系数法、加减法、公式法、换元法（也称之为中间变量法）、拆项补项法（含有添加辅助元素实现化归的数学思想）、因式分解诸方法以及平行移动法、翻折法等．

另外，也有人将数学方法分为狭义和广义两类：狭义的数学方法是指只与某些特定类的数学问题有关的方法．例如，因式分解中的十字相乘法、解二次方程的配方法、变形中的等量代换法、证明与自然数有关命题时使用的数学归纳法、解析几何中常用的数形转换法（也称坐标法），高等数学中的求导法、积分法，等等；广义的数学方法指不仅在数学一科中使用，也能在其他学科中使用的方

① 张奠宙，过伯祥．《数学方法论稿》[M]．上海：上海教育出版社，1996．6．
② 罗增儒．《数学思想方法的教学》[J]．中学教研，2004(7)．
③ 蔡上鹤．《数学思想和数学方法》[J]．中学数学，1997(9)．