高等学校教学用書

高等数学教程

第一卷

B. И. 斯米尔諾夫著

高等教育出版社

高等学校教学用書

高等数学教程

第一卷 [illegible]

B. И. 斯米尔諾夫著
孙念增譯

高等教育出版社

本書系根据1952年苏联國家技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的斯米尔諾夫（В. И. Смирнов）著“高等数学教程”（Курс высшей математики）第一卷第十一版譯出的。原書經苏联高等教育部審定为綜合大学数理系以及高等工業学院需用較高深数学的各系作为教本之用。

本書系榮獲斯大林獎金的著作。

本書第一卷原分一、二兩分册由商务印書館出版，自1956年7月起改由本社出版合訂本。

高等数学教程

第一卷

В. И. 斯米尔諾夫著

孙念增譯

高等教育出版社出版
北京琉璃廠一七〇號
（北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號）

上海刘源記印刷廠印刷　新華書店總經售

書號 13010·136　開本 850×1168 1/32　印張 16 4/16
一九五二年十月第一卷第一分册商務初版 共印 56,000
一九五二年十一月第一卷第二分册商務初版 共印 53,000
一九五六年七月合訂本第一版
一九五六年十二月上海第三次印刷
印數 28,001—36,000　定價(8) ¥ 1.70

第一卷目次

第一章 變量與函數關係

第二章 極限論,微商概念及其應用

第三章 積分與不定積分概念

第四章 級數及其在函數的近似計算中的應用

第五章 多元函數

第六章 複數 高等代數初步 函數的積分法

譯者序

蘇聯科學院院士斯米爾諾夫著高等數學教程，共五卷，分爲六册（第三卷分爲上下二册）。著者曾因這部巨著獲得一九四八年斯大林獎金。蘇聯高等教育部批准，作爲大學物理——數學系教科書；其中第一二兩卷並可供高等工業學校之需用較高深數學的各系作爲教科書。

早在兩年以前，在科學院編譯局的領導下，由幾位同志分別進行了這部書的翻譯工作。由於譯者分散各地，未能取得連繫，所用名詞不一致，語氣也不一貫，所以雖然在去年已經譯出一部分，但未能出版。隨着院系調整，課程改革的逐步開展，爲了學習蘇聯的社會主義先進經驗，目前迫切需要蘇聯教材的譯本。於是中央人民政府教育部高等教育司決定讓我整理全部譯稿，即日付印。因爲各校開學在即，故將第一卷先分爲兩册出版，以便及時供應。以後各卷也將各分爲兩三分册陸續出版。

現將各卷包含的主要內容列在這裏，供使用本書的讀者參考：

第一卷　極限論。一元函數的微分學與積分學。級數論。多元函數的微分學。複數及高等代數初步。

第二卷　常微分方程。重積分線積分面積分及反常積分。矢量分析與場論。微分幾何。富氏級數。數學物理方程。

第三卷上册　行列式與方程組的解。線性變換與二次型。羣論基礎與線性變換羣。

第三卷下册　複變函數論基礎。保角變換與平面場。留數理論的

應用、整函數與分函數。多元函數與方陣的函數。線性微分方程。特殊函數。

第四卷　積分方程。變分法。偏微分方程論。邊值問題。

第五卷　斯提勒傑斯積分。集合函數與勒貝格積分。集合函數、絕對連續性。積分概念的一般化。希勒伯特空間。一般空間。

就目前各大學情況，本書第一二卷適於綜合大學數學，物理，力學，氣象，化學，天文等專業一二年級用；並可供工學院需要較高深數學的系科專業作爲參考書。

第一卷是根據一九四八年蘇聯技術理論出版社出版的第十一版翻譯的。名詞及術語，由於尚未統一，除一般常用的以外，多是採用了本書幾位譯者用的比較一致的，也有少數是我杜撰的；俟統一名詞決定後，再作最後更正，書後附有名詞對照表，以供參考。

限於譯者的能力，譯文中不妥的地方可能很多，希望同志們予以指正。至於各卷出版前後次序，希望能配合各校需要的緩急，關於這一點，也希望各方面儘量提出意見，

第一卷譯稿曾經華羅庚、趙訪熊、關肇直、周毓麟諸位同志分別審查校閱，有關物理方面的內容，曾經孫德兖同志審閱。他們都提出了很多修正的意見。譯者參照了這些意見，作了最後一次的改正。特此致謝。

孫念增

一九五二年九月北京清華大學

原書第八版序

這一版與以前有很大的區別，主要是删去了關於解析幾何的材料，連帶着也把其餘的材料重新組織了一下。特別是這一卷第二章 §6，講微分學在幾何方面的應用一節，全部更動了。再有，以前第二卷第一章，講複數，多項式的基本性質，以及函數的系統的積分法；現在放在第一卷末一章。

原有的補充材料，又略有補充與更動。見於以下幾卷內，要遇到近代分析中相當精密而複雜的問題，在第二章 §1 之末，講極限理論之後，增加了無理數的理論，並用以證明了極限存在的判別法以及連續函數的性質。同時也引入了初等函數的嚴格定義，並討論了初等函數的性質。在第五章中，講多元函數時，介紹了隱函數存在定理的證明。

書中內容是這樣安排的，可以只學習印成大字的材料。小字包含有：例題，各別的補充問題，以及上面所說的理論材料；第四章最後一節，也是補充的理論材料。

在內容方面，費赫金戈教授給我很多寶貴的意見；作最後一次校訂時，這些意見給我很大的幫助。爲此，我向他致深深的謝意。

B. 斯米爾諾夫

原書第十一版序

這一版，主要是在第二章與第五章的有關材料中，與以前不同。

B. 斯米爾諾夫

第 一 卷

第一章 變量與函數關係

1. 量與測量 在自然科學中，數學分析具有基本的重要性。每一種別的科學，只是着重於研究環繞我們的宇宙中的某些特殊方面，相反的，數學是在探討適用於一切科學所研究的現象的共通性質。

量與測量是一個基本概念。量的特性就在於它可以被測量，就是取某一個定量作爲測量單位時，可以比較出大小來。比較的方法依賴於討論的量的本質，比較的步驟叫做測量。測量的結果得到抽象的數，它表達所考慮的量與用作測量單位的量之比。

任一自然律給我們量與量之間的關係，也可以說是表達這些量的數之間的關係。數學研究的對象，就是數以及它們之間的關係，而不問產生這些數與關係的量或定律所獨有的特性。

固然，由比較的方法來測量，每一個量都有它抽象的數。但是這個數依賴於測量時用的單位或標準。測量一個給定的量，用較大的單位得到較小的數；反之，用較小的單位就得到較大的數。

標準的選擇要看所討論的量的特性以及作測量的場合。爲了測量同類的量，標準量可以在相當大的限度內更換，——以測量長度爲例，在精確的光學研究中，用一埃之長（一毫米的千萬分之一，$10^{-10}m.$）作

單位；而在天文學中普通用的長度單位叫做**光年**，就是一年內光所經過的距離（一秒鐘光大約走 300000 km.）。

2. 數 由測量的結果得到的數，可以是**整數**（若考慮的量是單位量的整數倍），**分數**（若存在另一新單位，被測量的量與原來用的單位量都是新單位量的整數倍——簡單來說，就是被測量的量與測量單位可以通約），以及**無理數**（上述的公共單位不存在時，就是被測量的量與測量單位不可以通約）。

例如，在初等幾何學中證明了正方形的對角線與它的邊長不可以通約，所以若我們用邊長作單位，測量正方形的對角線，則得到的量數 $\sqrt{2}$ 是無理數。用直徑長作單位，測量圓周，得到的量數 π 也是無理數。

為要弄清楚無理數的概念，可以應用十進制小數。由算術知道，任一有理數可以表示成有限小數或循環無窮小數（純循環或混循環）的樣子。例如，由十進制除法法則，用分母除分子，我們得到

$$\frac{5}{33}=0.151515\cdots=0.(15).$$

$$\frac{5}{18}=0.277\cdots=0.2(7).$$

反之，由算術我們也知道任一十進制循環小數表示一個有理數。

測量與所用單位量不可以通約的量時，我們可以先計算被測量的量包含若干單位量，再看剩餘的量包含若干十分之一的單位量，再看新的剩餘量包含若干百分之一的單位量，如此繼續作下去。用這方法測量與單位量不可以通約的量時，就作成一個不循環無窮小數。任一無理數對應一個這樣的無窮小數；反之，任一不循環無窮小數對應一個無理數。若只取一個無窮小數的前幾位，則得到對應於這個小數的無理數的一個較小的近似值。例如，用普通法則開平方到三位小數，得到：

$$\sqrt{2}=1.414\cdots$$

1.414 與 1.415 就各是$\sqrt{2}$的，準確到千分之一的，較小的與較大的近似值。

利用十進制小數，可以比較無理數彼此之間的大小，以及無理數與有理數之間的大小。

在許多問題中，考慮的量帶有不同的符號，正號或負號(溫度高於或低於零度，直線運動中正的或負的速度等等)。這樣的量分別用正數或負數來表達。若 a 及 b 是正數，而 $a>b$，則 $-a<-b$。任一正數或零必大於任一負數。如此全部有理數與無理數排列成一定的順序。所有這些數組成實數集合。

注意，在用十進制小數表示實數的情形下，我們可以把任一有限小數用循環節是 9 的無窮小數來替代。例如，$3.16=3.1599\cdots$。若不用有限小數則得到實數與無窮小數恰好一一對應，就是任一實數對應一個確定的無窮小數，而任一無窮小數對應一個確定的實數。負數對應冠有負號的無窮小數。

在實數範圍內，除去用零除以外，四種演算都可以實行。任一實數的奇次根永遠有一個確定的值。正實數的偶次根有兩個值，只是符號相反。負實數的偶次根，在實數範圍內無解。至於實數以及它們的演算的嚴格理論，在後面的小字中再講。

將表達一個已知量的數，取十號，叫做這個量的絕對值。一個數 a 所表達的量的絕對值，也可以說是這個數 a 的絕對值，記作$|a|$。如此，我們就有：

若 a 是正數， $|a|=a$；

若 a 是負數， $|a|=-a$。

不難證明，和的絕對值$|a+b|$，僅當 a 與 b 同號時，與各項絕對值

的和 $|a|+|b|$ 相等；否則 $|a+b|$ 較小；所以

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|.$$

例如，$+3$ 與 -7 的和的絕對值等於 4，而各項絕對值的和是 10。

同樣可證，當 $|a| \geqslant |b|$ 時，

$$|a-b| \geqslant |a|-|b|.$$

積的絕對值等於各因數絕對值的積，商的絕對值等於除數的絕對值除被除數的絕對值之商

$$|a\ b\ c| = |a|\cdot|b|\cdot|c|, \qquad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

3. **常量與變量**　數學中所討論的量分為二類：**常量與變量**。

在給定的問題中，不變的，保持一個值的量叫做常量；在給定的問題中，由於某種緣故，取不同的值的量叫做變量。

由這定義顯見，常量與變量的概念，要依賴於研究這個現象所在的場合。同一的量，在某種情況下可以認為是常量；而在別的情況下，就可能是變量。

例如，測量物體的重量時，要認清，稱量是在地球表面上同一地方舉行，還是在不同的地方舉行；若在同一地方稱量，則確定重量的重力加速度是常量，於是不同物體的重量只依賴於它們的質量；若在不同的地方稱量，則因為重力加速度依賴於地球轉動的離心力，就不能把它算做常量；據此，設稱量時不用槓桿做的秤，而用彈簧秤，則同一物體在赤道上比在兩極較輕。

同樣，在較粗略的實用的計算中，一個樞軸的長度可以算作是不變的量；若比較精確些，把溫度變化的作用計入，樞軸的長度就成了變量，而全部計算也就複雜了。

4. **區間**　測量變量時，有很多不同情況。有的變量可以取任一實

數值，沒有任何限制(例如，由一定時刻開始計算，時間 t 可取任一實數值，可正可負)；有的只取限於某一不等式的值(例如，絕對溫度 T°，須 $>-273^\circ C$)；還有的變量只能取某些值，而不能任意取值(如只取整數——某城居民數，定積氣體內分子數——或有理數等)。

我們講幾種在理論研究與實際應用中，測量變量時常見的情況。

a, b 爲二已知實數，若變量 x 可以取適合條件 $a \leqslant x \leqslant b$ 的全部的實數值，就說是 x 在區間(a, b)上變化。這種包含兩端的區間，常叫做閉區間。若變量 x 能取區間 (a, b) 中，除兩端外，全部的數值，即 $a<x<b$，就說是 x 在區間(a, b)內變化。這種不含兩端的區間叫做開區間。此外，x 變化的範圍也可能是一端閉一端開的區間：$a \leqslant x<b$ 或 $a<x \leqslant b$。

若 x 被測的範圍，由不等式 $a \leqslant x$ 確定，就說是 x 在一個左端閉右端開的區間 $(a,+\infty)$ 上變化。同樣的，對不等式 $x \leqslant b$，我們有左端開右端閉的區間$(-\infty, b)$。若 x 可以取任一實數值，就說是 x 在一個兩端開的區間$(-\infty,+\infty)$上變化。

5. **函數概念** 在實際問題中，常是不僅有一個變量，而是同時有幾個變量。

例如，就一公斤的空氣來講，確定它的情況的變量，就有它所受的壓力 $p\ {}^{kg}/{}_{m^2}$，所佔的容積 $v\ m^3$，以及它的溫度 $t^\circ C$。現在假設空氣的溫度保持在 $0^\circ C$；t 就是個常量，等於 0，只剩下 p 與 v 兩個變量。若改變壓力 p，則容積 v 也被改變，例如若空氣被壓縮，則容積減小。在這裏，我們可以隨意改變壓力 p(在實際許可限度內)，所以我們把 p 叫做自變量；顯然，對每一個壓力的值，氣體應佔有一個完全確定的容積；於是應該有一個定律，用這定律，對每一個 p 的值，可以找到對應於它的 v 的值。這就是著名的波義耳——馬瑞特定律。它說，氣體，當溫度不變

時，容積與壓力成反比。

應用這定律到一公斤的空氣上，就得到 v 與 p 之間的關係如方程

$$v=\frac{273\cdot 29.27}{p}.$$

在這情形下，變量 v 叫做自變量 p 的函數。

由這個例推廣，理論上講，我們可以說，自變量的特性就是：有一個它可能取的值的集合，在這個集合中我們可以隨意爲它選擇任何一個值。例如自變量 x 的值的集合，可能是任何區間 (a, b) 或是這區間的內部，就是自變量 x 能取滿足不等式 $a \leqslant x \leqslant b$ 或 $a < x < b$ 的任意一個值。也有時 x 可以取任一整數值。上述例中，p 起着自變量的作用，v 就是 p 的函數。現在給函數一個理論的定義。

定義 若對於自變量 x 的任何一個確定的值（在可能取的值的集合內），對應的，量 y 有確定的值，y 就叫做自變量 x 的函數。

若 y 是 x 的函數，確定於區間 (a, b) 上，則對於 x 在這區間上的任何一個值，對應的，y 有確定的值。

兩個量中，x 或 y 那個算作自變量，常是看怎樣方便。上例中我們也可以隨意改變容積 v，於是每次確定壓力 p，把 v 算作自變量而壓力 p 看作 v 的函數。由上面的方程解 p，就得到由自變量 v 表達函數 p 的公式：

$$p=\frac{273\cdot 29.27}{v}.$$

上面關於兩個變量的敍述，不難推廣到隨便幾個變量的情形，並且我們可以分別出自變量與因變量或函數。

回到我們的例，假設溫度不總是 $0°C$，而是可以變的。波義耳——馬瑞特定律就應當換成克拉波朗關係式：

$$pv = 29.27(273 + T),$$

這裏指出,研究氣體的情況時, p, v, 與 T 中只有兩個可以隨意改變,若是兩個給定了值,第三個就完全定了。例如我們取 p 與 T 作自變量,v 就是它們的函數:

$$v = \frac{29.27\ (273 + T)}{p},$$

或者把 v 與 T 算作自變量,p 就是它們的函數。

看另一個例,由三角形的邊長 a, b, c 表達面積 S, 有公式

$$S = \sqrt{p\ (p-a)(p-b)(p-c)},$$

其中 p 是三角形的半周

$$p = \frac{a + b + c}{2}.$$

三邊 a, b, c 可以隨意改變,只須每邊大於其餘兩邊之差而小於其和。如此變量 a, b, c 是限於不等式的自變量,S 是它們的函數。

我們也可以隨意取三角形的兩個邊,如 a, b, 與面積 S;應用公式

$$S = \frac{1}{2}\ ab \sin C,$$

求 a, b 兩邊的夾角 C, 這裏 a, b, S 是自變量, C 是函數。而 a, b, S 應該限於不等式

$$\sin C = \frac{2S}{ab} \leqslant 1.$$

注意,在這例中,我們得到 C 的兩個值。因爲 C 可以取作一個銳角或是一個鈍角,都可能使

$$\sin C = \frac{2S}{ab}.$$

這裏我們遇到多值函數,它的詳細情形以後再講。