运筹学基础

YUNCHOU XUE JICHU

李苏北 编著

四川大学出版社

运筹学基础

李苏北 编著

四川大学出版社

2002年·成都

责任编辑:谭同余
责任校对:张　斌
封面设计:杨　翼
责任印制:曹　琳

图书在版编目(CIP)数据

运筹学基础 / 李苏北编著. —成都:四川大学出版社,2003.1

ISBN 7-5614-2527-9

Ⅰ.运… Ⅱ.李… Ⅲ.运筹学 Ⅳ.O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 110641 号

书名　**运筹学基础**

作 者	李苏北　编著
出 版	四川大学出版社
地 址	成都市一环路南一段 24 号 (610065)
印 刷	四川大学印刷厂
发 行	四川大学出版社
开 本	850mm×1 168mm　1/32
印 张	10.625
字 数	233 千字
版 次	2003 年 1 月第 1 版
印 次	2003 年 1 月第 1 次印刷
印 数	0 001～1 000 册
定 价	20.00 元

◆读者邮购本书,请与本社发行科联系。电 话:85408408/85401670/85408023　邮政编码:610065
◆本社图书如有印装质量问题,请寄回印刷厂调换。
◆网址:www.scupress.com.cn

前　言

运筹学(Operations　Reasearch 简称 O. R.)是制定计划、实行科学管理的重要数学方法,它从复杂纷呈的现实问题中抽象出本质的因素,并在此基础上建立数学模型,通过对数学模型的分析和求解,形成实际工作中各种可行的方案和对策.经验证明,学习和掌握运筹学的基本原理和方法是指导经济管理、实行科学决策的必要前提.

本教材在编写时力求深入浅出,通俗易懂,着重于模型的建立,尽量避开数学上的严格推导.在介绍方法时,着重于思路分析和典型例题说明.阅读本教材全部内容所需的数学基础是微积分、线性代数和概率论的基本知识.

鉴于编者水平有限,时间仓促,书中不足乃至错误之处,在所难免,恳切希望读者指正.

编　者

2001 年 12 月

绪　论

运筹学一词起源于20世纪30年代.据《大英百科全书》释义，“运筹学是一门应用于管理有组织系统的科学”，“运筹学为掌管这类系统的人提供决策目标和数量分析的工具”.《中国企业管理百科全书》(1984年版)中的释义为运筹学是“应用分析、试验、量化的方法，对经济管理系统中人、财、物等有限资源进行统筹安排，为决策者提供有依据的最优方案，以实现最有效的管理”.

运筹学一词在英国称为 Operational reasearch，在美国称为 Operations reasearch(缩写为 O.R.)，可直译为“运用研究”或“作业研究”.由于运筹学涉及的主要领域是管理问题，研究的基本手段是建立数学模型，并比较多地运用各种数学工具，从这点出发，有人将运筹学称作“管理数学”.1957年我国从“夫运筹帷幄之中，决胜千里之外”(见《史记·高祖本纪》)这句古语中摘取“运筹”二字，将 O.R. 正式译为运筹学，包含运用筹划，以策略取胜等意义，比较恰当地反映了这门学科的性质和内涵；同时也显示出其军事起源及其萌芽早已在我国出现.

朴素的运筹学思想在我国古代文献中就有不少记载，例如齐王赛马、丁谓主持皇宫的修复等故事都体现了运筹学的思想.运筹学这个名词的正式使用是在1938年，当时英国为解决空袭的早期预警做好反侵略战争准备，积极进行“雷达”的研究，但随着雷达性能的改善和配置数量的增多，出现了来自不同雷达站的信息以及雷达站同整个防空作战系统的协调配合问题.1938年7月，波得塞(Bawdsey)雷达站的负责人罗伊(A. P. Rowe)提出立即进行整个防空作战系统运行的研究，并用“Operational reasearch”一词作为这方面研究的描述，这就是 O. R.(运筹学)这个名词的起源.

1940 年 9 月英国成立了由物理学家布莱克特(P. M. S. Blackett)领导的第一个运筹学小组,后来发展到每一个英军指挥部都成立运筹学小组.1942 年美国和加拿大也都相继成立运筹学小组,这些小组在确定扩建舰队规模,开展对潜艇的侦察和组织有效的对敌轰炸等方面,做了大量研究,为取得反法西斯战争的胜利及运筹学有关分支的建立做出了贡献.1939 年,苏联学者康托洛维奇出版了《生产组织与计划中的数学方法》一书对列宁格勒胶合板厂的计划任务建立了一个线性规划的模型,并提出了"线乘数法"的求解方法,为数学与管理科学的结合做出了开创性的工作.

第二次世界大战以后,运筹学的活动扩展到工业和政府等部门并取得很大成就.20 世纪 50 年代随着计算机技术的迅速发展,使得运筹学中一些方法如单纯形法、动态规划方法等得以用来解决实际管理系统中的优化问题,促进了运筹学的推广应用,也使得运筹学的各个分支日趋成熟.

在我国,第一个运筹学小组于 1956 年在中国科学院力学研究所成立,1958 年建立了运筹学研究室,1980 年 4 月成立了中国运筹学会,在农林、交通运输、建筑、机械、冶金、石油、化工、水利、邮电、纺织等部门,运筹学的方法已开始得到应用、推广.

运筹学是由许多分支组成的学科,它的内容十分丰富且应用范围非常广泛.资金、资源的最优利用;人力、物力的最佳分配;交通运输的最优调度;水利、电力的合理利用;建港口、建厂地点的最佳选择;设计施工的最优方案;经营销售的最佳决策;服务系统的最优服务;商品原料的最佳库存等都可以用运筹学方法来解决.

本教材着重介绍在经济管理中常用的一些分支,这些分支是:线性规划、整数规划、目标规划、动态规划、统筹法、存贮论、决策论等.

由于这些内容所涉及的数学模型是经济管理中常用的,因而掌握这些知识对于经济和管理工作是很重要的.

目 录

第一章　线性规划

线性规划(Linear Programming)是运筹学中研究较早、应用较广、比较成熟的一个重要分支.它研究的问题主要有两方面:一是如何统筹安排一项任务,以尽量用最少的资源来完成它;二是如何利用一定量的人力、物力和资金等来完成最多的任务.线性规划问题的数学模型可以叙述为:在满足一组线性约束条件下,求多变量线性函数的最优值(最大值或最小值).

§1.1　线性规划问题及其数学模型

一、线性规划问题

在经济活动及工程技术中会遇到各种各样的实际问题,数学模型是描述实际问题共性的抽象的数学形式.建立线性规划问题数学模型的一般步骤:

(1) 明确问题中有待确定的未知量(称为决策变量),并用数学符号表示;

(2) 明确问题中所有的限制条件(称为约束条件),并用决策变量的一组线性方程或线性不等式表示;

(3) 明确问题的目标,并用决策变量的一个线性函数(称为目标函数)表示,按问题的不同取最大值或最小值.

下面结合几个实际例子按上面给出的三个步骤来建立它们的数学模型.通常模型的建立往往需要经验和技巧以及相关的专业知识,只有通过大量的实践才能得心应手地建立模型.

例 1.1－1　生产计划问题

假设某厂计划生产甲、乙两种产品，这两种产品都要分别在A,B,C,D四种不同设备上加工. 按工艺资料规定：生产每件甲产品需占用设备的小时数分别为2,1,4,0；生产每件乙产品需占用设备的小时数分别为2,2,0,4.

已知各设备计划期内用于生产这两种产品的能力(小时数)分别为12,8,16,12；又知每生产一件甲产品，该厂会获得2元利润，每生产一件乙产品，该厂能获利润3元，问该厂应安排生产两种产品各多少件才能使总的利润收入为最大？

解　(1) 明确决策变量

工厂需要确定的是甲、乙两种产品的计划生产量.

设 x_1, x_2 分别为甲、乙两种产品的计划生产量. 总的利润为 z.

(2) 明确约束条件

因设备A在计划期内有效时间为12小时，不允许超过.

故有
$$2x_1 + 2x_2 \leqslant 12.$$

对设备B,C,D也可列出类似的不等式
$$x_1 + 2x_2 \leqslant 8;\quad 4x_1 \leqslant 16;\quad 4x_2 \leqslant 12.$$

此外产品的产量 x_1, x_2 只能取非负值，即 $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$. 这种限制称为变量的非负约束条件.

(3) 明确目标

工厂的目标是在各种设备能力允许的条件下，使总利润收入 $z = 2x_1 + 3x_2$ 为最大.

综合起来，该问题的数学模型为求一组变量 x_1, x_2 的值在满足约束条件

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leqslant 12, \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ 4x_1 \leqslant 16, \\ 4x_2 \leqslant 12, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

的情况下,使利润

$$z = 2x_1 + 3x_2$$

为最大.

例 1.1 - 2 运输问题

设有三个地方 A_1,A_2,A_3 生产某种物资(A_1,A_2,A_3 简称为产地),四个地方 B_1,B_2,B_3,B_4 需要该种物资(B_1,B_2,B_3,B_4 简称为销地),产地的产量和销地的销量以及产地到销地的单位运价表见表 1.1 - 1,问如何组织物资的运输,才能在满足供需的条件下使总的运费最少.

表 1.1 - 1 产销运输表

单位运价(元/吨) 销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产地的产量(万吨)
A_1	2	9	10	7	9
A_2	1	3	4	2	5
A_3	8	4	2	5	7
销地的销量(万吨)	3	8	4	6	21 / 21

本问题是一个总产量等于总销量的运输问题,通常称为产销平衡运输问题.

解 建立数学模型:

(1) 问题是要确定从产地 $A_i(i = 1,2,3)$ 调运多少物资到销地 $B_j(j = 1,2,3,4)$.

设 x_{ij} 表示由 A_i 调到 B_j 的物资数量.

(2) 由于产销平衡,因而,从 $A_i(i = 1,2,3)$ 运到 B_1,B_2,B_3,B_4 的物资数量之和应等于 A_i 的产量,即

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=9,$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=5,$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=7.$$

而且　$B_j(j=1,2,3,4)$ 收到 A_1,A_2,A_3 的物资数量之和应等于 B_j 的销量，即

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=3,$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=8,$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=4,$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=6.$$

在不允许有倒运条件下运量必须非负，即

$$x_{ij}\geqslant 0 \quad \begin{pmatrix} i=1,2,3 \\ j=1,2,3,4 \end{pmatrix}$$

(3) 目标是使调运的总运费最少，即

$$z=2x_{11}+9x_{12}+10x_{13}+7x_{14}+x_{21}+3x_{22}+4x_{23}+2x_{24}+8x_{31}+4x_{32}+2x_{33}+5x_{34}$$

达到最少.

综合起来，该运输问题的数学模型为求一组变量 $x_{ij}(i=1,2,3,\ j=1,2,3,4)$ 在满足约束条件

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=9, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=5, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=7, \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=3, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=8, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=4, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=6, \\ x_{ij}\geqslant 0 \quad (i=1,2,3;\quad j=1,2,3,4) \end{cases}$$

的情况下，使运费

$$z = 2x_{11} + 9x_{12} + 10x_{13} + 7x_{14} + x_{21} + 3x_{22} + 4x_{23} + 2x_{24} + 8x_{31} + 4x_{32} + 2x_{33} + 5x_{34}$$

取得最小值.

例 1.1－3　合理下料问题

某工厂生产某一种型号的机床，每台机床上需要 2.9m，2.1m，1.5m 的轴分别为一根、二根、一根，这些轴需用同一种圆钢制作，圆钢的长度为 7.4m，如果要生产 100 台机床，问应如何安排下料，才能使用料最省？

解　建立数学模型

对于每一根 7.4m 长的钢材，可有若干种下料方式把它截取成我们所需要的轴，比如可在 7.4m 的钢材上截取 2 根 2.9m 的轴和 1 根 1.5m 的轴，合计用料 $2.9\times2+1.5=7.3$m，残料为 0.1m，现把所有可能的下料方式列表如表 1.1－2：

表 1.1－2　合理下料

轴 \ 各方式下的轴的根数 \ 下料方式	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	轴的需要量
2.9m	2	1	1	1	0	0	0	0	100
2.1m	0	0	2	1	2	1	3	0	200
1.5m	1	3	0	1	2	3	0	4	100
残料(m)	0.1	0	0.3	0.9	0.2	0.8	1.1	1.4	

(1) 问题所要确定的每种下料方式应各用多少根 7.4m 的圆钢，于是设 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ 分别为按 $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, B_8$ 方式下料的圆钢根数.

(2) 由于每台机床所需不同长度的轴的根数是确定的，因此

生产 100 台机床所需 2.9m 的轴 100 根，2.1m 的轴 200 根，1.5m 的轴 100 根. 如果按 B_1 的方式下料，每根圆钢可截取 2.9m 长的轴 2 根，则 x_1 根圆钢可截取 2.9m 的轴 $2x_1$ 根；同样地，分别按 B_2，B_3，B_4 方式下料可在 x_2,x_3,x_4 根圆钢上分别截取 2.9m 的轴 x_2,x_3,x_4 根，因此所截下的 2.9m 长的轴的总数应不少于 100 根，即满足约束条件

$$2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 100.$$

相仿地，所截下的 2.1m 长的轴的总数应满足约束条件

$$2x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + 3x_7 \geqslant 200.$$

所截下的 1.5m 长的轴的总数应满足约束条件

$$x_1 + 3x_2 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 4x_8 \geqslant 100.$$

显然，按每种下料方式的圆钢根数应满足非负要求，且为整数，即 $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8 \geqslant 0$ 且为整数.

(3) 目标是使总的下料根数最小，即

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

达最小.

综合起来，该下料问题的数学模型为求一组变量 $x_j(j = 1,2,\cdots,8)$ 在满足约束条件

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 100, \\ 2x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + 3x_7 \geqslant 200, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 4x_8 \geqslant 100, \\ x_j \geqslant 0(j = 1,2,\cdots,8) \text{ 且为整数}, \end{cases}$$

使总下料根数 $z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$ 取得最小值.

尽管上面几个实际问题的意义不同，但它们的数学模型却有共同特点：

(1) 目标函数是决策变量的线性函数；