大学

物理实验

（修訂本）

劳令耳
黃英才 编

贵州教育出版社

大学物理实验

（修订本）

劳令耳
黄英才　主编

贵州教育出版

内容提要

本书是根据《高等工业学校物理实验课程教学基本要求》编写而成。全书除绪论外分为五章，共选编了 39 个实验。

本书前两章较系统地阐述了与大学物理实验有关的测量误差与数据处理方面的知识，集中介绍了有关物理实验中的基本测量方法、操作调节技能、常用仪器等方面的知识。后三章将各个实验按训练的性质、层次进行分类，内容安排由浅入深、由易到难、由简到繁、循序渐进，以期达到较好的总体教学效果。

本书可供工科院校各专业物理实验课程教材使用，也可供其他高等学校相近专业物理实验课程选用。

再版前言

本书是根据《高等工业学校物理实验课程教学基本要求》(1993年修订、报审稿)、结合我们多年来物理实验教学和教学改革的经验，吸取其他院校物理实验教材之所长编写而成。本书可供工科院校本、专科各专业作物理实验教材使用，也可供其他高等学校相近专业物理实验课程选用。

本书除绪论外分为五章。绪论着重说明物理实验课的一般学习方法和实验室规则；第一章阐述测量误差与实验数据处理的基本知识。在误差估算中引进"不确定度"概念，但作了必要的简化处理，以适应大学低年级学生的需要，使物理实验教学跟上当前误差理论的研究和应用的发展趋势；第二章讨论了物理实验中基本的实验测量方法、实验操作技能和力、热、电、光实验的基本特点及常用基本仪器。将原来分散在各个实验中的零散知识集中起来进行介绍，以期学生有一个系统、全面的了解；第三、第四章和第五章共选编了39个实验。按实验内容、实验仪器和实验要求，分成基础实验、基本实验和综合性、应用性与近代物理实验三部分。使学生在实验知识、实验方法、实验技能和误差与数据处理各方面能够得到由浅入深、由易到难、由简到繁、循序渐进的系统训练，达到培养学生进行科学实验的能力、提高科学实验素养的目的。在编写方式上，前期实验写得比较细致、具体，给出了有关的数据记录表格、数据处理要求、误差计算和结果表示以及实验报告示例，以便学生参考学习。后续实验逐步简化实验步骤、数据处理方面的叙述，突出实验原理和思路，将一些具体细节问题留给学生去思考和探索，以利于开发学生智力，培养学生能力。在带设计性内容的实验中，则主要提出实验要求，给出必要的提示，以充分发挥学生的主观能动性。在每一实验中都有〔预习要求〕和〔思考与讨论〕，以便指导学生做好实验前的预习和学生实验后进一步的分析讨论与巩固提高。

这次再版，我们对几年来使用中发现的一些问题和不妥之处进行了修改订正，根据实验教学发展的需要对少数实验进行了改写或更换。参加再版编写工作的有劳令耳(绪论、第一章、实验6和总附表)、黄英才(实验15、16、17、18、37)、姜世淑(§2-1～§2-3、实验1、9、10、11、28)、杨桂艳(§2-4、实验4、13、19-Ⅰ、27、38)、刘毅(实验2、3、8、25、29、33、39)、刘泳(实验24、26、31、35)、贺平逆(实验7、12、14、21、30、32、36)、田卫(§2-5、实验5、19-Ⅱ、20、22、23、34)。

限于编者的经验和水平，书中难免有欠妥不足之处，恳请读者批评指正。

编　者

1998年9月

目　录

绪　论

物理实验的地位与作用

科学实验是人们按照一定的研究目的，借助特定的仪器设备，人为地控制或模拟自然现象，突出主要因素，对自然事物和现象进行精密、反复地观察和测试，探索其内部规律性的一种了解自然、改造自然的实践活动。这种对自然的有目的、有控制、有组织的探索活动是科学理论的源泉，是工程技术的基础。

物理实验在物理科学的创立和发展中占有非常重要的地位。无论是物理规律的发现，还是物理理论的建立，都必须以严格的物理实验为基础，并受到物理实验的检验。从伽利略的自由落体实验到杨氏的双缝干涉实验，从卢瑟福的 α 粒子散射实验到当今的高能粒子对撞实验都无不生动地说明了物理学是一门实验科学。

物理实验是众多现代高新技术发展的源泉和基础。原子能、半导体、激光、超导和空间技术等最新科技成果，其产生和发展离开了物理实验都是不可想象的。现代企业要不断地改进生产工艺和创新产品，也离不开实验研究工作，而物理实验是现代科学实验的先驱和基础。在物理学的发展过程中，人类积累了丰富的实验理论、方法和技能，创造出各种精密巧妙的仪器设备。物理实验的基本理论、方法和技能是现代科学实验的基本理论、方法和技能。因此，作为对高等工业学校学生进行科学实验基本训练的一门独立的必修基础课程，物理实验是学生进入大学后受到系统实验方法和实验技能训练的开端，是工科类专业对学生进行科学实验训练的重要基础。

物理实验课的目的与任务

物理实验教学和物理理论教学具有同等重要的地位，它们既有深刻的内在联系和配合，又有各自的任务和作用。物理实验课程应使学生在中学物理实验的基础上，按照循序渐进的原则，学习物理实验知识和方法，得到实验技能的训练，从而初步了解科学实验的主要过程与基本方法，为今后的学习和工作奠定良好的实验基础。本课程的具体任务是：

1. 通过对实验现象的观察、分析和对物理量的测量，学习物理实验知识，加深对物理学原理的理解。

2. 培养与提高学生的科学实验能力。其中包括：

（1）能够通过阅读实验教材或资料，作好实验前的准备；

（2）能够借助教材或仪器说明书正确使用常用仪器；

（3）能够运用物理学理论对实验现象进行初步分析判断；

（4）能够正确记录和处理实验数据，绘制曲线，说明实验结果，撰写合格的实验报告；

（5）能够完成简单的具有设计性内容的实验。

3. 培养与提高学生的科学实验素养。要求学生具有理论联系实际和实事求是的科学作风，严肃认真的工作态度，主动研究的探索精神，遵守纪律、团结协作和爱护公共财产的优良品德。

物理实验课是一门实践性课程，学生是在自己独立工作的过程中增长知识、提高能力。上述教学目的的达到，很大程度上取决于同学们自己的主动精神和不懈努力。

物理实验课的学习程序

物理实验课一般分为三个阶段进行。

1. 实验前的准备

物理实验课的教学任务一般较重，而课堂上的时间又很有限，因此必须做好课前预习工作。应当根据每一实验的“预习要求”，认真阅读教材有关内容及参考资料，弄清实验的目的、原理，了解所用实验仪器的结构、用法，明确测量对象和方法，了解实验的主要步骤及注意事项等等，以使对实验要做什么，怎样做有一个总体的认识。这样，在实验时才能有的放矢地听取教师讲解，积极主动地进行操作和测量，高质量地完成实验课的学习任务。

此外，在预习的基础上，应写好预习报告，列出必需的数据记录表格，回答有关的思考题，以及根据实验内容准备好实验中所需的绘图工具、计算器等。

2. 实验操作

实验时应严格遵守实验室的有关规章制度。实验前应首先结合仪器实物，对照实验教材或仪器说明书，认识和熟悉仪器的结构和用法，然后才能进行实验装置的安装和调整。实验操作应按实验步骤进行，注意观察实验现象，出现问题应及时向指导教师报告。实验测量应遵循“先定性、后定量”的原则。先定性观测实验全过程，确认整个实验装置工作正常，对所测内容做到心中有数，再定量读记实验数据。

做好实验记录是科学实验的一项基本功。实验时，应及时用钢笔将所测数据记人数据记录表格。注意数据的有效数字要正确。如发现测量数据有错误，可用一直线将其划去，在旁边补上正确数据，不得随便乱涂，保留“错误”数据，供必要时分析、讨论。实验时还应注意记录所用仪器的名称、规格、型号和主要技术参数，被测样品的编号，有关的室温、大气压等实验环境条件及实验中出现的故障情况和特殊现象等。

应逐步学会根据实验原理和实验数据来分析实验情况是否正常，测量误差是否合理，测量结果是否正确。逐步学会判断和排除实验中出现的简单故障。不能满足于机械地按照教材上的实验步骤进行操作、测取数据，而应随时注意对实验进行分析、思考，真正做到既动手又动脑，不断提高自己进行科学实验的能力。

实验数据，应先经自己检查，然后交由指导教师检查通过。若有错误或遗漏，应找出原因，及时补测或重做。

3. 撰写实验报告

实验报告是实验者对实验工作的全面总结。要用简练的文字、必要的数字和适当的图表将实验过程和完整的实验结果真实地反映出来。写报告时要文句通顺、字迹端正。对实验过程和结果的讨论要具体深入，有分析、有见解，不要空空洞洞泛泛而谈。对于实验原理、实验步骤等内容，应在理解教材内容的基础上，用自己的语言扼要表述，不能照抄书本。

预习报告和实验报告

为了减轻同学的学习负担，本课程将预习报告和实验报告合二为一。预习报告中写过的内容，实验后在实验报告中不再重写，即实验报告的内容分为两部分，一部分在实验前完成（即预习报告），一部分在实验后完成。

实验前应完成的内容包括：

1. 实验名称和日期

2. 实验目的

3. 实验仪器

4. 实验原理

原理应写得简明扼要，如列出实验所依据的主要公式，实验设计的思路等。电学实验和光学实验需画出电路图和光路图。

5. 简要的实验步骤

总结重要的或关键的几条，以备实验时按步骤进行。

6. 实验注意事项

7. 数据记录表格

仿照教材中的表格或按要求自行设计，以备实验时记录数据用。

实验后完成的内容包括：

8. 数据处理及实验结果

包括实验数据的记录，实验结果的计算，所要求的作图，实验误差的分析计算和实验结果的表达。

9. 思考与讨论

包括实验结果的说明，对实验中出现的问题的讨论，回答思考题或讨论题及实验的心得体会等。

实验报告统一用专门的实验报告纸书写。

实验室规则

为了保证实验正常进行，培养严肃认真的工作作风和良好的实验工作习惯，特制定下列规则：

1. 实验按实验分组和排定的实验顺序表进行。实验前必须认真预习，按要求写好预习报告。无预习报告者，不得做实验。

2. 实验在规定的时间内完成，不得无故缺席、迟到或早退，迟到时间超过 15 分钟按缺旷处理。无故缺旷不补课。因公、因病、因事缺课者，须由所在系出具证明，由指导教师安排补课。

3. 按编组与实验仪器编号对号做实验。实验前按仪器清单检查仪器，明确仪器使用方法和注意事项后方能进行实验。爱护仪器，未经允许不得动用其他仪器。仪器如有损坏，应立即报告指导教师进行登记，按学院有关规定处理。如发现实验仪器丢失，追查当事人和实验班责任，并作赔偿。

4. 进入实验室应保持安静，不准抽烟和随地吐痰。保持实验室清洁，做完实验后由同学轮流打扫实验室卫生。

5. 在实验室应服从教师和实验室工作人员的指导、严格按操作规程使用仪器。注意安全，防止损坏仪器或发生人身事故。

6. 实验完毕，整理好仪器，由教师检查仪器情况。按要求完成实验报告。

一、测量、误差、有效数字

1. 测量

直接测量：由相应仪器直接读出待测物理量的量值

间接测量

2 误差 客观存在的物理量的量值、真值　　误差=测量值−真值

x=由仪器得出的物理量值、测量值　　$\Delta x = x - a$ 绝对误差

$E_r = \frac{\Delta x}{a} \times 100\%$ 相对误差

3. 误差分类：(1)系统误差：在相同条件下，误差大小、方向恒定或有规律地变化

第一章　测量误差与实验数据处理

在物理实验中，除要定性地观察所发生的物理现象，还要定量地测出物理量的大小，找出物理量之间的定量关系。测量时必然伴随着测量误差。对测量误差进行分析、估算和对实验数据进行处理，是物理实验的重要组成部分。本章将介绍这方面的一些基础知识。

§1-1　测量与误差

1. 测量

对物理量进行测量，就是借助仪器或量具将待测的物理量与选定的标准量进行比较。比较的结果包括数值和单位两部分，单位即所选定的标准量，而测量数值就是被测量与单位的比值。根据《中华人民共和国计量法》，规定采用以国际单位制(SI)为基础的中华人民共和国法定计量单位，即以米(长度)、千克(质量)、秒(时间)、安培(电流强度)、开尔文(温度)、摩尔(物质的量)和坎德拉(发光强度)作为基本单位，其他量的单位都由这七个基本单位导出，称为国际单位制的导出单位(参见书末附表1)。

测量可分为直接测量和间接测量等类型。直接测量是指用仪器或量具直接得到被测物理量的数值的测量。例如用米尺测量物体的长度，用天平称量物体的质量，用秒表测量物体运动的时间等。间接测量则是要根据待测物理量和一个或多个直接测量量之间的函数关系，间接地计算出测量值。例如用千分尺测出钢球的直径 D，然后根据公式 $V=\frac{\pi}{6}D^3$ 计算出钢球的体积；或再用天平称量出钢球的质量 M，根据公式 $\rho=\frac{M}{\frac{\pi}{6}D^3}$ 计算出钢球密度，均属于间接测量。在物理实验中，多数是间接测量，而直接测量则是一切测量的基础。

2. 测量误差

表示x在 $[\bar{x}-\delta x,\ \bar{x}+\delta x]$ 范围内

待测物理量的大小是一个客观存在，而测量总是由具体的测量人员，通过一定的测量方法，使用一定的测量仪器和在一定的测量环境中进行。由于受到测量人员的操作、观测能力，测量方法的近似性，测量仪器的分辨力和准确性，测量环境的波动等等因素的局限和影响，物理量的测量值与其真实值之间总是有一定的差异，这个差异就是测量误差。测量值的误差 Δx 定义为

$$\Delta x = x - a \tag{1-1-1}$$

式中 x 为测量值，a 为被测量的真值。

上面定义的误差与测量值有相同的量钢，称为绝对误差，有时也用绝对误差与被测量真值的比值的百分数来表示测量误差

$$E_r = \frac{\Delta x}{a} \times 100\% \tag{1-1-2}$$

称为相对误差。

测量误差可以通过改进测量方法和测量仪器，提高人的实验能力，改善实验条件等得以减小，但是不可能完全消除。不存在没有误差的测量结果，测量误差存在于一切测量之中。因此，如何根据测量的实际需要尽量减小测量误差，怎样寻求被测物理量的最佳测量值（最佳值），以及如何估计最佳值的可靠程度（接近真值的程度），是测量的误差理论所面临的任务。

3. 误差的分类

根据误差的产生原因和性质，可将误差分为系统误差和偶然误差两大类。

（1） 系统误差

系统误差的特点是在同一条件下、对同一物理量多次测量时，误差的大小和方向保持恒定；或在测量条件改变时，误差的大小和方向按一定规律变化。系统误差来源于以下几个方面：

1） 实验原理和实验方法的近似性带来的误差。例如，单摆的周期公式 $T=2\pi\sqrt{l/g}$ 的成立条件是摆角趋于零，但实际上无法达到；伏安法测电阻时没有考虑电表内阻的影响等。

2） 实验仪器本身的缺陷或安装调整不当造成的测量误差。例如游标尺的零点不准；天平的两臂不等长；米尺刻度不均匀；气垫导轨没有调水平等。

3） 实验环境的影响造成的误差。例如，测量微小电流时，环境电场的影响；在 30℃时使用在 20℃时标定的标准电池等。

4） 观测者个人生理或心理特点造成的误差。例如，有的人估计读数总是偏大或偏小；有的人按秒表总是偏早或偏迟等。

系统误差在实验条件不变时有确定的大小和方向。因此，在同一条件下多次测量求平均值不能消除或减小它。但是，如果找到了系统误差产生的原因或规律，就可以采取一定的措施去消除它的影响或对测量结果进行修正。在实验中发现系统误差并找到其产生原因是一件困难而又重要的工作。在本课程的学习过程中，应注意这方面的学习和训练。

（2） 偶然误差（随机误差）

偶然误差的特点是在同一条件下，对同一物理量多次测量时，每次出现的误差的大小和正负变化不定，具有随机性。偶然误差来源于多种因素的微小扰动。例如，环境温度、气压、电场、磁场等的微小变化，观测者感官灵敏度和心理变化等。

偶然误差的发生总是时大时小，时正时负，带有很大的偶然性，但它却服从一定的统计规律。假设系统误差已消除，若在同一条件下对同一物理量进行多次重复测量，可以发现偶然误差的发生有如下规律（参见附录 1-1 的附图 1-1）：

1） 绝对值小的误差出现的次数比绝对值大的误差出现的次数要多得多。

2） 正误差和负误差出现的次数相接近。

3） 绝对值很大的误差出现的可能性为零。

根据偶然误差发生的上述规律，可以通过多次测量取平均值的方法来抵偿偶然误差的影响，使测量结果逼近待测物理量的真值。

系统误差与偶然误差，性质不同，来源不同，采用的处理方法也不同。人们通常用精密度好来表示测量的偶然误差小，用准确度高来表示测量的系统误差小，用精确度（或称为精度）来反映测量中系统误差和偶然误差的综合效果。这些术语在不同教材和论著中可能不尽统一，应予以注意。

4. 仪器误差

测量都是用仪器（或量具）进行的，仪器是测量误差产生的重要因素，由仪器引起的误差通

常同时包含系统误差和偶然误差。一般来说，精度差的仪器以系统误差为主，而精度高的仪器主要表现为偶然误差。相同规格的同种仪器，各台仪器测量时产生的误差不尽相同。即使是同一仪器，每次引起的测量误差也不会一样。为了反映仪器引起的误差对测量结果的影响，一般用该仪器测量时可能产生的最大测量误差，即误差限 $\Delta_{仪}$ 来表示仪器误差的大小。一般仪器生产厂家在仪器铭牌或仪器说明书中对仪器误差都有明确说明。对于未说明仪器误差的仪器，可以根据具体情况作出合理的估计，譬如说取仪器最小分度值的一半作为其仪器误差。

上面所说的误差并不包括测量错误。例如读错数，对错位置等，它们都不属于测量误差。只要我们严肃认真地对待实验，养成一丝不苟的工作作风，这种测量过失是可以避免的。

§1-2 直接测量的测量结果

由上所述，测量恒有误差。那么，怎样来表示测量的结果呢？怎样来评价测量结果的好坏呢？下面先就直接测量来讨论这一问题，并假定测量中的系统误差已被消除，只讨论偶然误差对测量结果的影响。

1. 最佳测量值

设 x_1、x_2、x_3、$\cdots x_n$ 是在同一条件下，对同一物理量重复多次测量后得到的一列等精度测量值。由于偶然误差的存在，这 n 个测量值与待测物理量的真值之间都有一定的误差，相互间一般也不相同。由偶然误差的性质，根据误差的统计理论，所有这 n 个测量值的算术平均值将最接近真值，并随着测量次数 n 的无限增加，该算术平均值将无限地接近真值。所以，我们就用多次测量值的算术平均值来作为测量结果的最佳估计值，即多次测量结果的最佳测量值为（参见附录 1-1）

$$\overline{x}=\frac{1}{n}(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{1-2-1}$$

以上讨论的是当测量中只存在偶然误差时的情况。若同时还存在系统误差，并已经知道系统误差的大小和正负，则应从上述平均值中扣除该系统误差之后，才作为最佳测量值，即

$$\overline{x}'=\overline{x}-\Delta x_{系} \tag{1-2-2}$$

2. 多次测量的标准偏差

在科学实验和工程技术中，通过采用标准偏差来估算测量的偶然误差。多次测量中每一测量值 x_i 与算术平均值$\overline{x}$之差称为偏差或残差，记为

$$\nu_i=x_i-\overline{x} \qquad i=1,2,3\cdots n$$

根据误差的统计理论，一列等精度测量值的标准偏差定义为

$$S_x=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\nu_i^2}{n-1}}=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}} \tag{1-2-3}$$

它是对偶然误差发生的分散程度的一个描述，反映了这列测量值与真值的接近程度。上式又称为贝塞尔公式。

3. 不确定度和测量结果的表达

对于一个测量结果，除了要知道其最佳测量值$\overline{x}$以外，还要估计此最佳值与真值的接近程度。为此，引入测量的不确定度 σ，将测量结果表达为

$$x=\overline{x}\pm\sigma \tag{1-2-4}$$

不确定度表示由于测量误差的存在而对被测量值不能肯定的程度。式(1-2-4)则表示：通过测量，虽然待测物理量的真值无法确切知道，但是它落在($\overline{x}-\sigma$,$\overline{x}+\sigma$)范围内的可能性(概率)最大。

对于多次测量，当测量次数不太少时，可简单地取测量值的标准偏差作为测量结果的不确定度，即

$$\sigma_x=S_x \tag{1-2-5}$$

例 1. 用千分尺多次测量一圆柱体的直径 D，所得测量值为：20.101、20.135、20.111、20.125、20.116、20.122(mm)。千分尺的零点读数为：-0.003(mm)。试求直径的最佳测量值和标准偏差，并表示出测量结果。

解：(1) 算术平均值

$$\overline{D}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}D_i=\frac{1}{6}(20.101+20.135+\cdots+20.122)=20.118\text{mm}$$

(2) 最佳测量值

$$\overline{D'}=\overline{D}-(-0.003)=20.121\text{mm}$$

(3) 标准偏差

$$S_D=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(D_i-\overline{D})^2}{n-1}}$$

$$=\sqrt{\frac{(20.101-20.118)^2+(20.135-20.118)^2+\cdots+(20.122-20.118)^2}{6-1}}$$

$$=0.01\text{mm}$$

(4) 测量结果

$$D=\overline{D'}\pm\sigma_D=\overline{D'}\pm S_D=20.12\pm0.01\text{mm}$$

上述$\overline{D}$和 S_D 的计算，也可利用函数型计算器的统计功能，将直径的各次测量值 D_i 直接输入计算器得到(参见本章附录 1-2)。

4. 一次测量的不确定度

在有的实验中，或者无法对被测物理量进行多次测量，例如被测量本身在变化；或者不必对被测物理量多次测量，例如实验中对该量的测量精度要求不高，或所用仪器反映不出测量的偶然误差。此时，可只对被测量进行一次测量，就用一次测量得到的测量值作为最佳测量值。用仪器误差来对测量结果的不确定度作出估计，即取

$$\sigma=\Delta_{仪} \tag{1-2-6}$$

特别要指出，实验中有时会出现多次测量的各次测量值都相同，算出的标准偏差 $S_x=0$ 的情况。这并不表示测量不存在测量误差，只说明仪器灵敏度不够或精度不高，反映不出测量的偶然误差。此时可只进行一次测量，按上述方法处理实验结果。

实验中还经常会出现多次测量的标准偏差与所用测量仪器的仪器误差量级相当的情况。这时，应同时考虑两者对测量结果的影响，将两者用“方和根”法合成后作为测量的不确定度，即

$$\sigma_x=\sqrt{S_x^2+\Delta_{仪}{}^2} \tag{1-2-7}$$

例 2. 分别用 50 分度和 20 分度的游标卡尺测量例 1 中圆柱体的高，所得测量数据为：41.18、41.20、41.20、41.22、41.22、41.20mm 和 41.20、41.20、41.20、41.20、41.20、

10为0.1，50：末0，2

41.20mm。试表示出两种情形下的测量结果

解(1) 50分度游标尺的测量结果

算术平均值 $\bar{h}=41.20\text{mm}$

标准偏差 $S_h=0.02\text{mm}$

∵50分度游标尺的仪器误差 $\Delta_{仪}=0.02\text{mm}$，与上述标准偏差大小相当，

∴取 $\sigma_h=\sqrt{S_h^2+\Delta_{仪}^2}=\sqrt{0.02^2+0.02^2}=0.03\text{mm}$

测量结果 $h=41.20\pm0.03\text{mm}$。

(2) 20分度游标尺的测量结果

用20分度游标尺6次测量的测量值相同，计算出的标准偏差为零。这说明20分度游标尺反映不出测量圆柱体高的偶然误差，可只进行一次测量，就用仪器误差来对测量的不确定度进行估计。20分度游标尺的仪器误差 $\Delta_{仪}=0.05\text{mm}$，测量结果为

$$h=41.20\pm0.05\text{mm}。$$

§1-3 间接测量的测量结果

1. 间接测量的最佳测量值

间接测量要通过将直接测量值代入某一函数关系计算其测量结果。显然，间接测量测量结果的最佳估计值，应是将各直接测量最佳值代入相应函数式计算出的结果。设间接测量量 ω 是直接测量量 x、y、z…的函数，即

$$\omega=f(x、y、z、\cdots) \tag{1-3-1}$$

则间接测量量的最佳测量值为

$$\bar{\omega}=f(\bar{x}、\bar{y}、\bar{z}\cdots) \tag{1-3-2}$$

2. 间接测量的误差传递

在间接测量中，每一个直接测量结果都存在着误差，因此通过计算求得的间接测量结果也必然存在误差，这就是误差的传递。表达各个直接测量值的误差与间接测量值的误差之间关系的数学式称为误差传递公式。

设在式(1-3-1)中，直接测量量 x、y、z…相互独立，它们的测量误差分别为 Δx、Δy、Δz、…。因测量误差相对于测量值是一个小量，利用数学中的全微分公式

$$d\omega=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz+\cdots$$

将其中的微分 $d\omega$、dx、dy、dz、…用测量误差 $\Delta\omega$、Δx、Δy、Δz、…代替，得到

$$\Delta\omega=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z+\cdots \tag{1-3-3}$$

这就是测量误差的基本传递公式。式中 $\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x$、$\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$、$\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z$、…分别代表直接测量量 x、y、z、…的测量误差对间接测量量 ω 的测量误差 $\Delta\omega$ 的贡献。各项系数 $\frac{\partial f}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial y}$、$\frac{\partial f}{\partial z}$、…称为误差传递系数。由式(1-3-3)可见，一个量的测量误差对总误差的贡献，不仅取决于其误差本身的大小，还与误差传递系数有关。所以，在实验时应注意分析各待测量误差对总误差的影响，选用适当的测量方法和工具，以期得到较好的测量结果。

实际上，测量误差一般是无法真正得知的，只能用统计的方法或其他方法对其作估计。设

在实验中分别对各个直接测量量 x、y、z、…均作了 n 次测量，算出 n 个间接测量值

$$\omega_1=f(x_1,y_1,z_1,\cdots)$$
$$\omega_2=f(x_2,y_2,z_2,\cdots)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\omega_n=f(x_n,y_n,z_n,\cdots)$$

根据测量误差的基本传递公式(1-3-3)，每次测量的误差为

$$\Delta\omega_i=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x_i+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y_i+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z_i+\cdots \qquad (i=1,2,3,\cdots n)$$

将 n 个误差式两边分别平方后相加，有

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta\omega_i^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sum\Delta x_i^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sum\Delta y_i^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\sum\Delta z_i^2\cdots$$
$$+2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\sum\Delta x_i\Delta y_i+2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\sum\Delta x_i\Delta z_i+\cdots$$

式中误差 Δx_i、Δy_i、Δz_i、…可能为正也可能为负，根据各直接测量量 x、y、z…相互独立的假设，当测量次数 n 很大时，上式中各交叉乘积项之和将趋于零，从而得到

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta\omega_i^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sum\Delta x_i^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sum\Delta y_i^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\sum\Delta z_i^2+\cdots$$

等式两边同乘 $1/(n-1)$，有

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta\omega_i^2}{(n-1)}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta x_i^2}{(n-1)}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta y_i^2}{(n-1)}+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta z_i^2}{(n-1)}+\cdots\cdots$$

与标准偏差公式(1-2-3)相比较，可得到间接测量量 ω 的标准偏差*

$$S_\omega=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2S_x^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2S_y^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2S_z^2+\cdots} \qquad (1\text{-}3\text{-}4)$$

若取不确定度 $\sigma_\omega=S_\omega$、$\sigma_x=S_x$、$\sigma_y=S_y$、$\sigma_z=S_z$、…，有

$$\sigma_\omega=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\sigma_z^2+\cdots} \qquad (1\text{-}3\text{-}5)$$

这就是不确定度的"方和根"传递公式。

当间接测量的函数关系是积商形式时，可将函数式(1-3-1)先取对数后再求微分

$$\ln\omega=\ln f(x,y,z,\cdots)$$
$$\frac{d\omega}{\omega}=\frac{\partial\ln f}{\partial x}dx+\frac{\partial\ln f}{\partial y}dy+\frac{\partial\ln f}{\partial z}dz+\cdots$$

类似可得到

$$\frac{\sigma_\omega}{\omega}=\sqrt{\left(\frac{\partial\ln f}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2+\left(\frac{\partial\ln f}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2+\left(\frac{\partial\ln f}{\partial z}\right)^2\sigma_z^2+\cdots} \qquad (1\text{-}3\text{-}6)$$

然后再由 $\sigma=\overline{\omega}\left(\frac{\sigma_\omega}{\omega}\right)$ 求出不确定度，这样可使运算较为简捷。

式(1-3-5)和式(1-3-6)是计算间接测量不确定度的基本公式。

3. 一些简单函数关系的误差传递公式

(1) 和差关系

---

* ∵当 n 很大时 $\overline{x}\to x_0$、$\overline{y}\to y_0$、$\overline{z}\to z_0$、…，∴可以用 ν_x、ν_y、ν_z、…取代 Δx、Δy、Δz、…。

设 $\omega = x \pm y$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = 1, \qquad \frac{\partial \omega}{\partial y} = \pm 1$$

代入式(1-3-5)，有

$$\sigma_\omega = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \sigma_y^2} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

(2) 积商关系

设 $\omega = xy$ 或 $\omega = \frac{x}{y}$

两边先取对数，有

$$\ln\omega = \ln x \pm \ln y$$

再求偏导数

$$\frac{\partial \ln\omega}{\partial x} = \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial \ln\omega}{\partial y} = \pm \frac{1}{y}$$

代入式(1-3-6)，有

$$\frac{\sigma_\omega}{\omega} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln\omega}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial \ln\omega}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$$

表(1-3-1)列出部分常用函数的误差传递公式(以不确定度的形式表出)，供使用时参考。

表 1-3-1　常用函数的误差传递公式

函数关系式	误差传递公式	函数关系式	误差传递公式
$\omega = x \pm y$	$\sigma_\omega = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$	$\omega = \sqrt[k]{x}$	$\frac{\sigma_\omega}{\omega} = \frac{1}{k}\frac{\sigma_x}{x}$
$\omega = xy$ 或 $\omega = \frac{x}{y}$	$\frac{\sigma_\omega}{\omega} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$	$\omega = \sin x$	$\sigma_x = \lvert\cos x\rvert \sigma_x$
$\omega = kx$	$\sigma_\omega = k\sigma_x$	$\omega = \cos x$	$\sigma_\omega = \lvert\sin x\rvert \sigma_x$
$\omega = x^k$	$\frac{\sigma_\omega}{\omega} = k\frac{\sigma_x}{x}$	$\omega = \ln x$	$\sigma_\omega = \frac{\sigma_x}{x}$

例 3. 求流体静力称衡法测固体密度的误差传递公式。

解：用流体静力称衡法测固体密度的公式为

$$\rho = \frac{m_1}{m_1 - m_2}\rho_0$$

式中 ρ 为待测固体的密度，ρ_0 为所用液体的密度，m_1 为固体在空气中称得的质量，m_2 为固体浸没在液体中称量时所加砝码的质量。

采取先取对数，再求微分

$$\ln\rho = \ln m_1 - \ln(m_1 - m_2) + \ln\rho_0$$

$$\frac{\partial \ln\rho}{\partial m_1} = \frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_1 - m_2} = \frac{-m_2}{m_1(m_1 - m_2)}$$

$$\frac{\partial \ln\rho}{\partial m_2} = \frac{1}{m_1 - m_2}$$

$$\frac{\partial \ln\rho}{\partial \rho_0} = \frac{1}{\rho_0}$$

代入基本公式(1-3-6)，有

$$\frac{\sigma_\rho}{\rho}=\sqrt{\left(\frac{-m_2}{m_1(m_1-m_2)}\right)^2\sigma_{m_1}{}^2+\left(\frac{1}{m_1-m_2}\right)^2\sigma_{m_2}{}^2+\left(\frac{1}{\rho_0}\right)^2\sigma_{\rho_0}{}^2}$$

固体密度的不确定度为

$$\sigma_\rho=\bar{\rho}\,\frac{\sigma_\rho}{\rho}$$

如前所述，测量恒有误差，真值无法获得。根据误差的定义，误差也无法得知。因此，采用不确定度来对真值的可能范围进行估计，将测量结果表示为 $x=\bar{x}\pm\sigma_r$ 的形式。

有时，待测物理量有理论值或公认值，或有用精度等级高一个量级以上的仪器进行校正得到的测定值。也可用这些理论值、公认值或测定值来代替真值，称为相对真值。用测量值与相对真值的相对误差来对测量结果进行评价，即将测量结果表示为

$$\bar{x},\qquad E_r=\frac{|\text{测量值}-\text{相对真值}|}{\text{相对真值}}\times 100\% \tag{1-3-7}$$

§ 1-4 有效数字

1. 有效数字的一般概念

在实验中从仪器上读取测量数据时，除了要读出整分度值，通常还应尽量估读出最小分度的下一位数。估读出的最后一位数字尽管不很确切，误差往往也就发生在这一位，但这一位数字还是近似地反映出被测物理量大小的信息，因此仍然是有效的。我们把测量中得到的全部确切数字加上最后一位不大确切的存疑数字称为有效数字。例如用最小分度为毫米的钢直尺，测得铜圆柱体的高为 21.2mm，其中 21 可以从钢尺刻度上准确读出，是确切数字；0.2 是在两刻线之间估读出来的，是存疑数字，所以该测量值共有三位有效数字。

2. 误差决定有效数字

严格说来，存疑数字就是有误差的数字。有效数字的最后一位是存疑数字，就是说测量结果的误差就发生在这一位。所以，有效数字的位数实际上反映了测量结果的精确程度。测量值的有效数字位数越多，说明测量越精确。例如，上述铜圆柱改用 50 分度的游标卡尺或螺旋测微计来测量，测得的高度值分别为 21.22mm 和 21.196mm，有效数字分别是四位和五位。毫米钢直尺、50 分度游标尺、螺旋测微计的仪器误差分别为 0.5mm、0.02mm、0.004mm，上述测量值的相对误差分别是 2.4%、0.094%和 0.019%。可见有效数字多一位，相对误差就差不多要小一个数量级。因此，应慎重对待实验数据的有效数字，不能随意增减，必须根据误差来确定测量结果的有效数字。一般误差只取一位有效数字，比较精密的实验也可取两位，这里我们规定误差只保留一位有效数字。最佳测量值的最后一位应与误差对齐，即由误差决定测量值的有效数字。相对误差一般保留两位有效数字。

3. 有效数字中的零

既然有效数字的位数反映了测量结果的误差，我们在记录数据和表达实验结果时就应倍加注意，特别是在数据中包含有数字零时更是如此。例如，例 1 中圆柱体直径的最佳测量值 20.12mm 有四位有效数字而不是三位有效数字。又如，用最小分度为毫米的钢尺测量某一长度时，恰好对准 9cm 刻度，这时不能记为 9cm 或 0.009m，而应记为 9.00cm 或 0.900m。最小分度为毫米的钢尺的测量误差发生在毫米的下一位，因此数字 9 后面的两个零是有效的，不能省