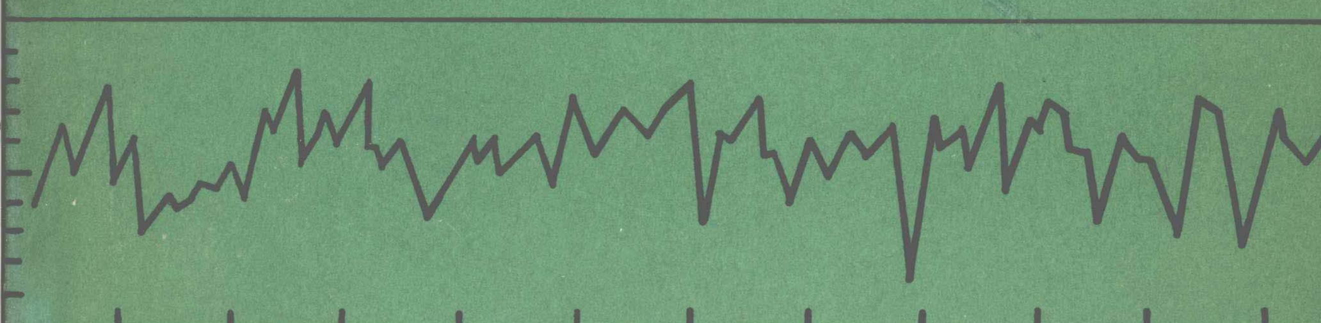
随机控制题解

郭尚来编



清华大学自动化系

1982.10.

前　言

这本“随机控制题解”是为有关课程而编写的。

随机控制理论是现代控制理论的重要分支，它的任务是研究和解决遭受随机扰动作用的随机控制系统的分析和综合问题。在随机控制系统中状态变量是随机过程，因此，为了熟悉随机控制，掌握有关随机过程的基本知识是必要的。一个具体的随机控制系统一般包括被控对象、量测器、状态估计器和最优控制器等环节。本书的习题和解答就是为上述内容而准备的。

本书共分七章。第一章是通过几个简单的题目说明研究随机控制的必要性。第二章的习题是为了熟悉有关随机过程的基本知识。第三章主要说明随机状态模型的特点和计算方法。第四章主要做谱分解练习和方差计算。第五章做最小方差控制策略的练习。最后两章主要做卡尔曼滤波和线性二次型高斯控制问题的练习。

本书的习题主要着重在随机控制理论的基本功练习上，书中所用公式一般都做了证明。本书可起到学习、巩固和扩充基本理论的作用。本书适合大专院校有关专业高年级学生和研究生使用。凡具有微积分，概率论和线性控制理论的基本知识，并对随机控制有兴趣的工程技术人员，也可使用。

编写本书，得到教研组和周兆英同志大力支持和帮助，特此表示感谢。由于编者学识有限，时间仓促，错误难免，衷心欢迎批评指正。

目　录

第一章 绪　　论

这一章通过计算一个极为简单的控制系统，说明当有随机扰动存在时，研究随机控制的必要性。另外给出了两个预测问题，问题虽然非常简单，但它的计算方法，是本书经常采用的。

1. 考虑系统

$$\frac{dx(t)}{dt}=u(t) \tag{1}$$

它的初始条件为

$$x(0)=1 \tag{2}$$

控制的目的是使性能指标

$$J=\int_0^\infty [x^2(t)+u^2(t)]dt \tag{3}$$

达到极小，试证明控制信号

$$u(t)=-e^{-t} \tag{4}$$

和控制律

$$u(t)=-x(t) \tag{5}$$

是最优的。

解：计算性能指标 J，把（1）代入（3），得到

$$\begin{aligned}J&=\int_0^\infty [x^2(t)+u^2(t)]dt\\&=\int_0^\infty [x^2(t)+\dot{x}^2(t)]dt\\&=\int_0^\infty [x(t)+\dot{x}(t)]^2dt-2\int_0^\infty x(t)\dot{x}(t)dt\\&=x^2(0)-x^2(\infty)+\int_0^\infty [x(t)+\dot{x}(t)]^2dt\\&=x^2(0)-x^2(\infty)+\int_0^\infty [x(t)+u(t)]^2dt\end{aligned} \tag{6}$$

式中第四等式是由第三等式经分部积分得到的。考虑到 J 是有限量，(6) 中的被积函数是

平方项，是正实数，因此当 $t\to\infty$ 时，必有 $x(t)\to 0$。同时把（2）代入（6），得到

$$J=x^2(0)+\int_0^\infty [x(t)+u(t)]^2 dt \geqslant x^2(0)=1 \tag{7}$$

只有当

$$u(t)=-x(t) \tag{5}$$

时，才能使性能指标 J 达到极小，即

$$\min J=x^2(0)=1 \tag{8}$$

这是闭环反馈控制情况。

若把（5）代入（1），并考虑到（2），可把 $x(t)$ 解出来，从而得到另一种控制信号 $u(t)$

$$\dot{x}(t)=x(t) \tag{9}$$

$$x(t)=x(0)e^{-t}=e^{-t} \tag{10}$$

$$u(t)=-e^{-t} \tag{4}$$

当然，用控制信号（4），同样得到（8）。这是开环程序控制情况。

2. 考虑实际系统

$$\dot{x}_s(t)=u_s(t) \tag{1}$$

$$x_s(0)=1 \tag{2}$$

假设控制是由模型

$$\dot{x}_m{}^2(t)=au_m(t),\quad a\approx 1 \tag{3}$$

$$x_m(0)=1 \tag{4}$$

确定的，试相对于开环控制和闭环控制确定性能指标

$$J=\int_0^\infty [x^2(t)+u^2(t)]dt \tag{5}$$

的值。

解：本题要求弄清根据（3）设计的控制去控制（1）时的情况如何。

首先，根据系统模型（3），计算性能指标 J_m，从而得到开环控制信号和闭环控制律。由（3），（4）和（5）得到

$$J_m=\int_0^\infty [x^2{}_m(t)+u^2{}_m(t)]dt$$

$$=\int_0^\infty \left[x^2{}_m(t)+\left(\frac{\dot{x}_m(t)}{a}\right)^2\right]dt$$

$$=\frac{x^2{}_m(0)}{a}+\int_0^\infty [x_m(t)+u_m(t)]^2dt$$

$$=\frac{1}{a}+\int_0^\infty [x_m(t)+u_m(t)]^2dt \tag{6}$$

当

$$u_m(t)=-x_m(t),\quad\text{（闭环控制）} \tag{7}$$

(6) 达到极小

$$\min J_m=\frac{1}{a} \tag{8}$$

再由（3），（4）和（7），得到

$$\dot{x}_m(t)=-ax_m(t) \tag{9}$$

$$x_m(t)=e^{-at} \tag{10}$$

$$u_m(t)=-e^{-at},\quad\text{（开环控制）} \tag{11}$$

其次，分析开环控制情况，即分析用（11）去控制实际系统（1）的情况。选择实际控制信号为

$$u_s(t)=u_m(t)=-e^{-at} \tag{12}$$

把（12）代入（1），并考虑到（2），求出实际状态 $x_s(t)$

$$\dot{x}_s(t)=-e^{-at} \tag{13}$$

$$\int_0^t dx_s(\tau)=\int_0^t -e^{-at}d\tau$$

$$x_s(t)-x_s(0)=\frac{1}{a}e^{-at}-\frac{1}{a}$$

$$x_s(t)=\frac{1}{a}e^{-at}+1-\frac{1}{a} \tag{14}$$

把（12）和（14）代入（5），计算实际系统开环控制时的性能指标

$$J_s=\int_0^\infty [x_s{}^2(t)+u_s{}^2(t)]dt$$

$$=\int_0^\infty\left[\left(\frac{1}{a}e^{-at}+1-\frac{1}{a}\right)^2+e^{-2at}\right]dt$$

$$=\frac{1}{2a}\left(1-\frac{1}{a^2}\right)+\frac{2}{a^2}\left(1-\frac{1}{a}\right)+\left(1-\frac{1}{a}\right)^2t\,\Big|_0^\infty \tag{15}$$

由上式（15）最后一项看出，只要 a 不等于 1，J_s 就会变成无穷大。这说明，只要系统模型与实际系统的参数稍有差异，或在运行中，实际参数稍有变化，都会使性能指标急剧变坏。实际上，这种开环控制是不能采用的。

最后，分析闭环控制情况，即分析采用（7）的方式去控制（1）的情况。因为是反馈控制，所以采用的实际控制律 $u_s(t)$ 为

$$u_s(t) = -x_s(t) \tag{16}$$

把（16）代入（1），并考虑到（2），求出 $x_s(t)$ 和 $u_s(t)$ 的值

$$\dot{x}_s(t) = -x_s(t) \tag{17}$$

$$x_s(t) = e^{-t} \tag{18}$$

$$u_s(t) = -e^{-t} \tag{19}$$

把（18）和（19）代入（5），求出实际系统闭环控制时的性能指标

$$J_s = \int_0^{\infty} [x_s^2(t) + u_s^2(t)]dt = 1 \tag{20}$$

在闭环控制下，只要 a 接近 1，J_s(20) 与 J_m(8) 相差无几。这表明，闭环控制是可行的。

3. 当实际系统和性能指标由方程

$$\dot{x}_s(t) = u_s(t) + v \tag{1}$$

$$x_s(0) = 1 \tag{2}$$

$$J_s = \int_0^{\infty} [x_s^2(t) + u_s^2(t)]dt \tag{3}$$

决定时，试比较开环控制

$$u_s(t) = -e^{-t} \tag{4}$$

和闭环控制

$$u_s(t) = -x_s(t) \tag{5}$$

的性能。（1）中 v 是一个未知扰动，特别设 v 是一个未知常数。

解： 在求解实际系统（1）的控制问题时，未知扰动 v 不予考虑，所以，在设计中采用的系统模型为

$$\dot{x}_m(t) = au_m(t) \tag{6}$$

$$x_m(0) = 1 \tag{7}$$

$$J_m = \int_0^{\infty} [x_m^2(t) + u_m^2)t)]dt \tag{8}$$

为了简化，令 $a=1$。这样，可求得使性能指标（8）为极小的系统模型（6）的开环控制信号为

$$u_m(t) = -e^{-t} \tag{9}$$

和闭环控制律为

$$u_m(t) = -x_m(t) \tag{10}$$

进而得到对实际系统（1）的开环控制信号（4）和闭环控制信号（5）。下面分别计算它们的性能指标。

对于开环控制情况，把（4）代入（1），并考虑到（2），求出 $x_s(t)$ 的值

$$\dot{x}_s(t) = u_s(t) + v = -e^{-t} + v \tag{11}$$

$$x_s(t) = e^{-t} + vt \tag{12}$$

把（4）和（12）代入（3），计算出性能指标 J_s 的值

$$\begin{aligned} J_s &= \int_0^\infty [x_s^2(t) + u_s^2(t)]dt \\ &= \int_0^\infty [(e^{-t} + vt)^2 + (-e^{-t})^2]dt \\ &= 1 + 2v + \int_0^\infty vt^2 dt \\ &= \infty \end{aligned} \tag{13}$$

对于闭环控制情况，把（5）代入（1），并考虑到（2），求出 $x_s(t)$ 和 $u_s(t)$ 的值

$$\begin{aligned} \dot{x}_s(t) &= u_s(t) + v \\ &= -x_s(t) + v \end{aligned} \tag{14}$$

$$x_s(t) = e^{-t} + v(1 - e^{-t}) \tag{15}$$

$$u_s(t) = -e^{-t} - v(1 - e^{-t}) \tag{16}$$

把（15）和（16）代入（3），计算出性能指标 J_s 的值

$$\begin{aligned} J_s &= \int_0^\infty [x_s^2(t) + u_s^2(t)]dt \\ &= 2\int_0^\infty [e^{-t} + v(1 - e^{-t})]^2 dt \\ &= 1 - 3v + 2\int_0^\infty v dt \\ &= \infty \end{aligned} \tag{17}$$

总结上述，由（13）和（17）可知，当实际系统（1）受到扰动作用时，用上述方法设计控制方案，不管是开环控制，还是闭环控制，它们的性能指标都是很差的，不能满足要求。对这类问题，必须采用随机控制方案。

4. 考虑由

$$x(t)=a\cos t \tag{1}$$

描述的系统，式中 a 是随机变量，试给出一个准确预测 x 未来值的计算程序。

解：设 t_1 时刻的 $x(t_1)$ 为已知。问题是如何用 $x(t_1)$ 来预测未来任意 t 时刻的 $x(t)$。为此要先计算 t_1 时刻的随机变量 a_1 的值，把 t_1 和 $x(t_1)$ 代入（1）

$$x(t_1)=a_1\cos t_1$$

$$a_1=\frac{x(t_1)}{\cos t_1} \tag{2}$$

这里特别说明，a 是随机变量，在 t_1 时刻的取值是随机的，但当测出 $x(t_1)$ 后，a_1 已经出现，就是确定的值了，所以可以用（2）把 a_1 求出来。把（2）中的 a_1 代替（1）中的 a，就能求出 $x(t)$ 的预测值

$$x(t)=a_1\cos t$$

$$=\frac{x(t_1)}{\cos t_1}\cos t \tag{3}$$

5. 考虑由

$$x(t+1)=ax(t)+e(t),\ t=t_0,\ t_0+1,\ \cdots \tag{1}$$

描述的系统，试证明预测值 $\hat{x}(t+1)=ax(t)$ 在如下意义上是最优的，即它使由 $E[x(t+1)-\hat{x}(t+1)]^2$ 定义的最小二乘预测误差为极小 。式中 $x(t)$ 是状态变量，给定初始条件 $x(t_0)=1$；$|a|<1$；$e(t)$ 是一个独立正态（0，σ^2）随机变量序列；$e(t)$ 与 $x(t)$ 是互相独立的。

解：把（1）代入最小二乘预测误差式，并把此式展开

$$E[x(t+1)-\hat{x}(t+1)]^2=E[ax(t)+e(t)-\hat{x}(t+1)]^2$$

$$=E[ax(t)-\hat{x}(t+1)]^2$$

$$+E[2(ax(t)-\hat{x}(t+1))e(t)]+Ee^2(t)$$

因为（$ax(t)-\hat{x}(t+1)$）与 $e(t)$ 互相独立，且

$$Ee(t)=0 \tag{3}$$

$$Ee^2(t)=\sigma^2 \tag{4}$$

（5）式右边第二项为

$$E[2(ax(t)-\hat{x}(t+1))e(t)]=2E[ax(t)-\hat{x}(t+1)]Ee(t)$$
$$=0 \tag{5}$$

把（4）和（5）代入（2）

$$E[x(t+1)-\hat{x}(t+1)]^2=E[ax(t)-\hat{x}(t+1)]^2+\sigma^2$$
$$\geqslant\sigma^2 \tag{6}$$

当

$$ax(t)-\hat{x}(t+1)=0$$
$$\hat{x}(t+1)=ax(t) \tag{7}$$

时，（6）达到极小

$$\min E[x(t+1)-\hat{x}(t+1)]^2=\sigma^2 \tag{8}$$

（7）和（8）正是本题要求证明的。

第二章　随机过程

这一章的目的是熟悉随机过程的有关基本知识。这些基本知识，像协方差函数、谱密度和随机微积分等基本概念，以及像平稳过程、正态过程、马尔科夫过程、二阶过程、独立增量过程、维纳过程和白噪声等特殊随机过程的基本特性，都是研究随机控制系统所必不可少的。在习题中，还仔细地推算了简单的自回归平均平移过程（ARMA，自回归滑动和过程），在最小方差控制和系统辨识等方面都应用了这种模型。

1. 设 Ω 是实线上的线段 $[0,\ 1]$，且测度 P 为均匀分布；再设指标集 T 也在区间 $[0,\ 1]$ 上。考虑由

$$x(t,\ \omega)=0,\quad \text{对所有 } t \text{ 和 } \omega \tag{1}$$

$$y(t,\ \omega)=\begin{cases}1, & \text{对 } t=\omega\\ 0, & \text{对其它情况}\end{cases} \tag{2}$$

定义的随机过程 $\{x(t),\ t\in T\}$ 和 $\{y(t),\ t\in T\}$，试证明上述两个随机过程有同样的有限维分布，并且证明

$$P\{\omega;\ x(t,\ \omega)<0.5,\ \text{对所有 } t\}=1 \tag{3}$$

$$P\{\omega;\ y(t,\ \omega)<0.5,\ \text{对所有 } t\}=0 \tag{4}$$

解：按照定义，$\{x(t),\ t\in T\}$ 的有限维分布表示为

$$F(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_k;\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_k)=P[x(t_1)\leqslant\xi_1,\ x(t_2)\leqslant\xi_2,\ \cdots,\ x(t_k)\leqslant\xi_k] \tag{5}$$

式中 k 取任意有限值。按题设条件，当 $\xi_i<0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$ 时，(5) 的取值为 0。而在其余情况，$x(t_i)$ 的值是相同的，所以 (5) 的取值为 1。

同样，$\{y(t),\ t\in T\}$ 的有限维分布为

$$F(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_k;\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_k)=P[y(t_1)\leqslant\xi_1,\ y(t_2)\leqslant\xi_2,\ \cdots,\ y(t_k)\leqslant\xi_k] \tag{6}$$

当 $\xi_i<0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ k$ 时，(6) 的取值为 0。而在其余情况，因为

$$\sum_{n\in\{n,\xi_n<1\}} P(\omega=t_n)=0 \tag{7}$$

所以 (6) 的取值为

$$1-\sum_{n\in\{n,\xi_n<1\}} P(\omega=t_n)=1 \tag{8}$$

综合上述，得到

$$F(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_k;\ t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_k)=P[y(t_1)\leqslant\xi_1,\ y(t_2)\leqslant\xi_2,\ \cdots,\ y(t_k)\leqslant\xi_k]$$

$$=P[x(t_1)\leqslant\xi_1,\ x(t_2)\leqslant\xi_2,\ \cdots,\ x(t_k)\leqslant\xi_k]$$

$$=\begin{cases}0, & \xi_i<0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ k\\ 1, & \text{其余情况}\end{cases} \tag{9}$$

即 $\{x(t),\ t\in T\}$ 和 $\{y(t),\ t\in T\}$ 有相同的有限维分布。

下面证明（3）和（4）两个恒等式。由（1）

$$x(t,\ \omega)=0 \quad \text{对所有 } t$$

$$<0.5 \tag{10}$$

因此（3）成立。由（2）可知，对任意 t，都存在 $t=\omega$，使

$$y(t,\ \omega)=1 \quad \text{对 } t=\omega$$

$$>0.5 \tag{11}$$

因此（4）成立。

2. 考虑一阶平移平均过程

$$x(t)=e(t)+ce(t-1) \tag{1}$$

式中 $\{e(t),\ t=\cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots\}$ 是独立正态（0，1）随机变量序列，试确定 $x(s)$ 和 $x(t)$ 的协方差。

解：按给定条件

$$Ee(t)=0,\ t=\cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots \tag{2}$$

$$E[e(s)e(t)]=\delta_{s,t} \tag{3}$$

式中 $\delta_{s,t}$ 叫克罗内克符号（Kronecker delta)，其取值为

$$\delta_{s,t}=\begin{cases}1, & s=t\\ 0, & s\neq t\end{cases} \tag{4}$$

于是可通过（1）求出 $x(t)$ 的均值 $Ex(t)$

$$\begin{aligned}Ex(t)&=E[e(t)+ce(t-1)]\\&=Ee(t)+cEe(t-1)\\&=0\end{aligned} \tag{5}$$

进而确定 $x(s)$ 和 $x(t)$ 的协方差

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}[x(s),\ x(t)]&=E\{[x(s)-Ex(s)][x(t)-Ex(t)]\}\\&=E\{x(s)x(t)\}\\&=E\{[e(s)+ce(s-1)][e(t)+ce(t-1)]\}\\&=E\{e(s)e(t)\}+c^2E\{e(s-1)e(t-1)\}+cE\{e(s)e(t-1)\}\\&\qquad+cE\{e(s-1)e(t)\}\\&=(1+c^2)E\{e(s)e(t)\}+cE\{e(s)e(t-1)\}+cE\{e(s-1)e(t)\}\end{aligned}$$

$$
=\begin{cases} 1+c^2, & s=t \\ c, & s=t\pm 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{6}
$$

式中第五和第六等式是通过把（3）和（4）代入得到的。

3. 考虑自回归过程

$$
x(t)+ax(t-1)=e(t) \tag{1}
$$

式中 $|a|<1$，而 $\{e(t),\ t=\cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots\}$ 是独立正态（0，1）随机变量序列，试确定 $x(t)$ 和 $x(s)$ 的协方差。

解：首先写出 $x(t)$ 和 $x(s)$ 的表达式。设初值为 $x(t_0)$，则由（1）能够得到

$$
\begin{aligned}
&x(t_0+1)=-ax(t_0)+e(t_0+1)\\
&x(t_0+2)=(-a)^2x(t_0)+(-a)e(t_0+1)+e(t_0+2)\\
&x(t_0+3)=(-a)^3x(t_0)+(-a)^2e(t_0+1)+(-a)e(t_0+2)+e(t_0+3)\\
&\vdots\\
&x(t_0+n)=(-a)^nx(t_0)+(-a)^{n-1}e(t_0+1)+\cdots+e(t_0+n)\\
&\qquad\qquad\ =(-a)^nx(t_0)+\sum_{k=1}^{n}(-a)^{n-k}e(t_0+k)
\end{aligned} \tag{2}
$$

把 $x(t)$ 写成（2）的形式

$$
\begin{aligned}
x(t)&=x[t_0+(t-t_0)]\\
&=(-a)^{t-t_0}x(t_0)+\sum_{k=1}^{t-t_0}(-a)^{t-t_0-k}e(t_0+k)
\end{aligned} \tag{3}
$$

因为初值 $x(t_0)$ 是给定的，所以

$$
Ex(t_0)=x(t_0) \tag{4}
$$

另外按题设条件

$$
Ee(t_0+k)=0,\ \text{对所有}\ k \tag{5}
$$

则由（3），（4）和（5）得到

$$
Ex(t)=(-a)^{t-t_0}x(t_0) \tag{6}
$$

$$
x(t)-Ex(t)=\sum_{k=1}^{t-t_0}(-a)^{t-t_0-k}e(t_0+k) \tag{7}
$$

同样地，对 $x(s)$ 有

$$
x(s)=(-a)^{s-t_0}x(t_0)+\sum_{l=1}^{s-t_0}(-a)^{s-t_0-l}e(t_0+l) \tag{8}
$$

$$
Ex(s)=(-a)^{s-t_0}x(t_0) \tag{9}
$$

$$x(s)-Ex(s)=\sum_{l=1}^{s-t_0}(-a)^{s-t_0-l}e(t_0+l) \tag{10}$$

下一步，假定 $t\geqslant s$，则由（7）和（10）就能确定 $x(t)$ 和 $x(s)$ 的协方差函数

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}[x(t),\ x(s)] &= E\{[x(t)-Ex(t)][x(s)-Ex(s)]\}\\
&= E\left\{\left[\sum_{k=1}^{t-t_0}(-a)^{t-t_0-k}e(t_0+k)\right]\left[\sum_{l=1}^{s-t_0}(-a)^{s-t_0-l}e(t_0+l)\right]\right\}\\
&=\sum_{k=1}^{t-t_0}\ \sum_{l=1}^{s-t_0}(-a)^{t+s-2t_0-k-l}E\{e(t_0+k)e(t_0+l)\}\\
&=\sum_{l=1}^{s-t_0}(-a)^{t+s-2t_0-2l},\quad k=l\\
&=(-a)^{t+s-2t_0}\sum_{l=1}^{s-t_0}(-a)^{-2l}\\
&=\frac{(-a)^{t-s}}{1-a^2}-\frac{(-a)^{t+s-2t_0}}{1-a^2}\\
&=\frac{(-a)^{t-s}}{1-a^2},\qquad t_0\to-\infty
\end{aligned} \tag{11}$$

上式第四等式由第三等式中

$$E\{e(t_0+k)(t_0+l)\}=\begin{cases}1, & k=l\\ 0, & k\neq l\end{cases} \tag{12}$$

得到。第六等式是通过把第五等式中的求和式按级数求和得到。令 $t_0\to-\infty$，并考虑到 $|-a|<1$，则第六等式右边的第二项为零，这样就得到了定态情况的最后一个等式。

4．设 $\{x(t),\ t\in T\}$ 是一个均值为零的正态过程，试证明

$$\begin{aligned}E\{x(t_1)x(t_2)x(t_3)x(t_4)\}=&\ r(t_1,\ t_2)r(t_3,\ t_4)+r(t_1,\ t_3)r(t_2,\ t_4)\\&+r(t_1,\ t_4)r(t_2,\ t_3)\end{aligned} \tag{1}$$

式中 $r(t_i,\ t_j)$ 为 $x(t_i)$ 和 $x(t_j)$ 的协方差函数。

解：我们利用特征函数进行证明。引入

$$\phi(u)=E\{\exp(ix^Tu)\} \tag{2}$$

式中 $\phi(u)$ 称为 n 维随机过程 $x(t)$ 的特征函数，$i=\sqrt{-1}$，而 u 是与 $x(t)$ 同维的列向量

$$u^T=[u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n] \tag{3}$$

对（2）两边求 n 阶导数

$$\frac{\partial^n\phi(u)}{\partial u_1\cdots\partial u_n}=i^nE\left\{\exp(ix^Tu)\prod_{k=1}^{n}x(t_k)\right\} \tag{4}$$

令 $u=0$，n 为偶数，由上式得到

$$E\left\{\prod_{k=1}^{n} x(t_k)\right\}=E\{x(t_1)\cdots x(t_n)\}$$

$$=i^n\left[\frac{\partial^n\phi(u)}{\partial u_1\cdots\partial u_n}\right]_{u=0} \tag{5}$$

我们先导出特征函数 $\phi(u)$，再用（5）算出结果。

均值为零和协方差函数为

$$R=\begin{bmatrix} r(t_1,\ t_1)\cdots r(t_1,\ t_n) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ r(t_n,\ t_1)\cdots r(t_n,\ t_n)\end{bmatrix} \tag{6}$$

的随机过程

$$x^T(t)=[x(t_1),\ x(t_2),\ \cdots,\ x(t_n)] \tag{7}$$

具有概率密度函数

$$f(x)=(2\pi\det R)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}x^TR^{-1}x\right) \tag{8}$$

由（2）和（8）得到

$$\phi(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp(ix^Tu)f(x)dx_1\cdots dx_n$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(2\pi\det R)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(ix^Tu-\frac{1}{2}x^TR^{-1}x\right)dx_1\cdots dx_n \tag{9}$$

因为

$$ix^Tu-\frac{1}{2}x^TR^{-1}x=-\frac{1}{2}[x-iRu]^TR^{-1}[x-iRu]-\frac{1}{2}u^TRu \tag{10}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(2\pi\det R)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}[x-iRu]^TR^{-1}[x-iRu]\right\}dx_1\cdots dx_n=1 \tag{11}$$

则由（9）导出

$$\phi(u)=\exp\left(-\frac{1}{2}u^TRu\right)$$

$$=\epsilon\mathrm{xp}\,y \tag{12}$$

式中为书写简便，已记

$$y=-\frac{1}{2}u^TRu \tag{13}$$

按题设条件，$n=4$，对（12）两边求四阶导数

$$\frac{\partial^4\phi(u)}{\partial u_4\partial u_3\partial u_2\partial u_1}=\Big\{\frac{\partial^4 y}{\partial u_4\partial u_3\partial u_2\partial u_1}+\frac{\partial^3 y}{\partial u_3\partial u_2\partial u_1}\frac{\partial y}{\partial u_4}+\frac{\partial^3 y}{\partial u_4\partial u_2\partial u_1}\frac{\partial y}{\partial u_3}$$

$$+\frac{\partial^2 y}{\partial u_2\partial u_1}\frac{\partial^2 y}{\partial u_4\partial u_3}+\frac{\partial^2 y}{\partial u_2\partial u_1}\frac{\partial y}{\partial u_3}\frac{\partial y}{\partial u_4}$$

$$+\frac{\partial^3 y}{\partial u_4\partial u_3\partial u_1}\frac{\partial y}{\partial u_2}+\frac{\partial^2 y}{\partial u_3\partial u_1}\frac{\partial^2 y}{\partial u_4\partial u_2}$$

$$+\frac{\partial^2 y}{\partial u_3\partial u_1}\frac{\partial y}{\partial u_2}\frac{\partial y}{\partial u_4}+\frac{\partial^2 y}{\partial u_4\partial u_1}\frac{\partial^2 y}{\partial u_3\partial u_2}$$

$$+\frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial^3 y}{\partial u_4\partial u_3\partial u_2}+\frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial^2 y}{\partial u_3\partial u_2}\frac{\partial y}{\partial u_4}$$

$$+\frac{\partial^2 y}{\partial u_4\partial u_1}\frac{\partial y}{\partial u_2}\frac{\partial y}{\partial u_3}+\frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial^2 y}{\partial u_4\partial u_2}\frac{\partial y}{\partial u_3}$$

$$+\frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial y}{\partial u_2}\frac{\partial^2 y}{\partial u_4\partial u_3}+\frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial y}{\partial u_2}\frac{\partial y}{\partial u_3}\frac{\partial y}{\partial u_4}\Big\}\exp y \tag{14}$$

把（3）和（6）代入（12），再把（12）代入（14），当 $u=0$ 时

$$\exp y=1 \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u_i\partial u_j}=-r(t_i,\ t_j) \tag{16}$$

其余各阶导数为零，因此（14）右边只有第四、七和九项有值，其余各项为零，于是得到

$$\left[\frac{\partial^4\phi(u)}{\partial u_4\partial u_3\partial u_2\partial u_1}\right]_{u=0}=r(t_1,\ t_2)r(t_3,\ t_4)+r(t_1,\ t_3)r(t_2,\ t_4)$$

$$+r(t_1,\ t_4)r(t_2,\ t_3) \tag{17}$$

把（17）代入（5），就得到所证式（1）。

5．设 x 和 y 是任意维数的列向量，并且假设向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 是正态的，其均值和协方差分别为

$$m=\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$R=\begin{bmatrix} R_x & R_{xy} \\ R_{yx} & R_y \end{bmatrix} \tag{2}$$

试证明在 y 下的的条件分布是均值和协方差分别为

$$m_{x|y} = E[x|y] = m_x + R_{xy}R_y^{-1}(y-m_y) \tag{3}$$

$$R_{x|y} = E\{[x-E(x|y)][x-E(x|y)]^T|y\} = R_x - R_{xy}R_y^{-1}R_{yx} \tag{4}$$

的正态分布。

解：我们通过计算在 y 下的 x 条件密度 $f(x|y)$ 来求解这个问题。为此要利用下列有关联合密度、条件密度和矩阵的公式

$$f(x,\ y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m_x+m_y}{2}}\ |R|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x-m_x \\ y-m_y \end{bmatrix}^T R^{-1}\begin{bmatrix} x-m_x \\ y-m_y \end{bmatrix}\right\} \tag{5}$$

$$f(x|y) = \frac{f(x,\ y)}{f(y)} \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} A & D \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}DB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix} \tag{8}$$

如下构造矩阵 T 和 R_1，并利用（7）和（8）计算出它们的逆矩阵 T^{-1} 和 $R_1{}^{-1}$

$$T = \begin{bmatrix} I & -R_{xy}R_y^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} I & R_{xy}R_y^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$R_1 = TR = \begin{bmatrix} R_x - R_{xy}R_y^{-1}R_{yx} & 0 \\ R_{yx} & R_y \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$R_1{}^{-1} = \begin{bmatrix} (R_x - R_{xy}R_y^{-1}R_{yx})^{-1} & 0 \\ -R_y^{-1}R_{yx}(R_x - R_{xy}R_y^{-1}R_{yx})^{-1} & R_y^{-1} \end{bmatrix} \tag{12}$$

利用（9）—（12）各式计算行列式 $|R|$ 和 R^{-1}

$$R = T^{-1}TR = T^{-1}R_1 \tag{13}$$

$$|R| = |T^{-1}||R_1| = |R_y||R_x - R_{xy}R_y^{-1}R_{yx}| \tag{14}$$

$R^{-1} = [T^{-1}R_1]^{-1}$