工学硕士入学考试数学复习指南

主　编　季文铎
副主编　胡金德　许履瑚
编　者　季文铎　胡金德　许履瑚
　　　　富景隆　蔡燧林　李恒沛　王式安

北京理工大学出版社

工学硕士入学考试

数学复习指南

主　编　季文铎

副主编　胡金德　许履瑚

编　者　季文铎　胡金德　许履瑚　富景隆

蔡燧林　李恒沛　王式安

北京理工大学出版社

内 容 提 要

本书是全国七所重点工业院校的几位具有丰富教学经验，且对研究生入学考试中的数学试题有深入研究的教师专门为报考工学硕士研究生的考生编写的，全书除对各章重点内容扼要总结外，对集中精选的几百道典型例题，进行分析、讨论，以帮助考生扩大思路，提高分析问题和解决问题的能力。

图书在版编目(CIP)数据

工学硕士入学考试数学复习指南/季文铎等编著．—北京：北京理工大学出版社，1995

ISBN 7-81045-063-8

Ⅰ．工…　Ⅱ．季…　Ⅲ．数学-研究生教育-指南　Ⅳ．O1-62

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 14451 号

北京理工大学出版社出版发行

(北京市海淀区白石桥路 7 号)

(邮政编码 100081)

各地新华书店经售

北京房山先锋印刷厂印刷

*

787×1092 毫米　16 开本　18 印张　438 千字

1995 年 8 月第一版　　1995 年 8 月第一次印刷

印数：1—8000 册　　定价：19.00 元

前言

硕士研究生入学考试是目前我国由国家教委统一组织的最高层次的考试，它既关系到为国家选拔和培养高层次人才的质量，也关系到每一个考生个人的前途与命运. 对每一个欲报考硕士研究生的同学来说最关心的问题便是怎样复习、备考方能与考试要求相吻合，而取得满意的考试成绩. 要解决这个问题，首先必须深刻理解考试大纲中所规定的内容，哪些是主要的，哪些是次要的，这些内容在深度与广度上要求到什么程度，以及在试题中经常出现的题型有哪些. 只有对上述问题做到心中有数以后，才能复习好并在考试中取得好成绩.

为了回答考生所关心的上述问题，并帮助考生深入理解考试大纲所规定的考试内容，我们组织了北方交通大学、清华大学、北京工业大学、哈尔滨工业大学、浙江大学、北京航空航天大学、北京理工大学等七所重点工业院校中具有丰富教学经验，且对研究生入学考试中的数学试题有深入研究的七位数学教授，经过反覆讨论并认真精选所收集到的资料，共同努力，编写了这本《工学硕士入学考试数学复习指南》献给有志于报考工学硕士研究生的学子.

为了达到上述目的，我们采取的办法是：

第一，为帮助考生深刻理解考试大纲中的要求，不仅本书的章节顺序的安排与考试大纲完全一致，而且在每一章或每一节的开头都指明本部分的重点内容与非重点内容. 重点内容当然是指最基本的概念、理论、方法与公式，这也是考题中经常出现的内容，而且一些基本题型也多出于此，因而是每一个考生都应该深刻理解、彻底掌握，并能融会贯通的内容. 对非重点内容，并不是说它们无足轻重或可有可无的，只是相对来说他们的重要性差一些，在试题中出现的频率相对地小一些. 因此，对非重点内容中所涉及的一些概念、公式或方法，也都是每个考生应该知道和了解的.

第二，为了更具体的说明各部分要求的深度、广度以及考生所应具备的知识与能力，并让考生了解各部分的常见题型，我们在每一节中都精选了一部分例题，其中也包括了一些近年来(1987 年～1995 年)的试题. 对每个例题都先给出恰当的分析，指出解决问题的思路，然后再逐步推导、论证，达到问题的彻底解决，借以帮助考生扩大思路，开阔眼界、提高分析问题和解决问题的能力. 若在例题序号与题目正文之间，插有括号及五位数码，如(92106)，则表示此题是 1992 年试卷一中的 6 分题；(871′12)则表示此题是 1987 年试卷一(副题)中的 12 分题. 从这类例题中既可以看出此类题型在历年中出现的频率，也可以看出这类题在试卷中所占的比重(分值).

第三，为了帮助考生总结和归纳所学到的知识，在每一节的开头不仅提出在试题中与本节有关的常见题型，而且在每一节的末尾还加以小结，指出解决这些常见题型的关键，或方法的实质，以促进考生从根本上掌握解题的基本方法.

第四，为了方便考生复习，在工程数学部分的每一章都写了内容提要.

本书在编写过程中始终得到了北京航空航天大学李心灿教授的支持与鼓励，他在百忙之中为本书写了序言．华中理工大学于寅教授对全部书稿作了仔细的审阅，并提出了许多有益的宝贵意见，胡乃冏副编审也对高等数学部分作了校审，在此一并表示诚挚的感谢．

由于编者水平所限，书中难免有疏漏、错误或不妥之处，欢迎同行们批评指正．

编　　者

1995年元月

序

现在有越来越多的青年报考研究生，并希望能够得到有关研究生入学考试方面的自学辅导教材.这本《工学硕士入学考试数学复习指南》，是根据国家教委制定的硕士研究生入学数学考试大纲所规定的考试内容和要求，为了帮助考生全面地进行数学复习而编写的.

本书分别对《高等数学》、《线性代数》、《概率论》、《复变函数》中的一些基本概念、方法、理论进行了简要地归纳，总结，然后通过精选各种类型不同层次的例题和历年工学硕士研究生入学数学试卷中较为典型的试题进行讲解、分析、讨论，使读者理解解题的思路和方法，从而提高解题的能力.著名数学家、教育家乔治·波利亚(G Polya)指出："解题可以认为是人的最富有特征性的活动.……解题是一种本领，就像游泳、滑雪、弹钢琴一样；你只能够靠模仿和实践才能学到它.……假如你想要从解题中得到最大的收获，你就应当在所做的题目中去找出它的特征，那些特征在你以后去求解其它的问题时，能起到指导的作用.一种解题方法，它若是经过你自己的努力得到的，或者是从别人那里学来或听来的，只要经过了你自己的体验，那么它对你来讲就可以成为一种楷模，当你在碰见别的类似的问题时，它就是可供你仿照的模型."我很赞赏乔治·波利亚的这些见解，并希望考生能够根据他的这些见解来阅读本书中的例题.

本书的编者，都是在我国一些著名大学中长期从事数学教学的教授，他们不但具有丰富的教学经验，而且熟悉工学硕士研究生入学数学考试的要求，因此本书不仅是一本难得的工学硕士研究生入学考试数学复习指南，还是一本颇具特色的数学教学参考书.

李心灿

1995 年 5 月　于北京

目　录

高等数学

工程数学

高 等 数 学

第一章　函数、极限、连续

函数、极限、连续等基本概念及其运算，是学习高等数学的基础，也是从初等数学过渡到高等数学的桥梁. 这一部分在历年考试的试题中从表面上看所占的比例并不太大，但有关它的内容却几乎渗透在每一道试题之中，因此是不容忽视的.

本章的重点内容及要求有：

一　理解函数的概念(包括反函数、复合函数、隐函数、参数方程给定的函数、基本初等函数与初等函数)及函数的表示法，能判断函数是否具有单调性、周期性、有界性、奇偶性；

二　理解无穷小量与无穷大量的概念，以及无穷小的比较，无穷小的阶、无穷小与极限的关系；

三　掌握数列极限的“$\varepsilon - N$”定义与函数极限的“$\varepsilon - \delta$”定义，理解函数的左极限与右极限的概念、函数极限存在的充要条件、极限存在准则与两个重要极限；

四　理解连续与间断的概念，掌握间断点的分类，知道闭区间上连续函数的性质.

本章将按上述四个方面来展开讨论.

§1.1　函数

本节的重点是函数概念以及函数符号的运用，特别是复合函数概念的建立与求法，以及函数的表示法中的分段函数，这些都是读者应该能熟练运用的内容. 有关建立函数的问题，即考查建立数学模型的能力，虽然也应该是本节的内容，但我们将其放在第二、三章(微分学与积分学)中再讨论. 函数概念的进一步发展，如变上限积分所定义的函数，用无穷级数所定义的函数等等，都将在今后逐渐加以讨论.

例 1(88105)　已知 $f(x) = e^{x^2}$，$f[\varphi(x)] = 1 - x$，且 $\varphi(x) \geqslant 0$. 求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

分析　由 $f(x) = e^{x^2}$，有 $f[\varphi(x)] = e^{\varphi^2(x)}$. 按题意它又等于 $1 - x$，从而有

$$e^{\varphi^2(x)} = 1 - x.$$

由此即可解得 $\varphi(x)$，然后再求其定义域.

解　由题意有 $f[\varphi(x)] = e^{\varphi^2(x)} = 1 - x$，且 $\varphi(x) \geqslant 0$，从而有

$$\varphi(x) = \sqrt{\ln(1 - x)}.$$

它的定义域是 $\ln(1 - x) \geqslant 0$，即 $1 - x \geqslant 1$，亦即 $x \leqslant 0$.

例 2　若已知 $2f(x) + f(1 - x) = x^2$，试求 $f(x)$ 的表达式.

分析 从已给条件知 $f(x)$ 与 $f(1-x)$ 的线性组合为 x^2，这就启示我们，可假设 $f(x)$ 是二次函数，故令

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

再利用已知条件定出 a,b,c.

解 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$，于是由 $2f(x) + f(1-x) = x^2$ 有

$$2ax^2 + 2bx + 2c + a(1-x)^2 + b(1-x) + c = x^2.$$

比较 x 各幂次的系数得

$$\begin{cases} 3a = 1, \\ 2b - 2a - b = 0, \\ 3c + b + a = 0. \end{cases}$$

解得 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}, c = -\frac{1}{3}$，故所求函数为

$$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}.$$

例 3 讨论 $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性.

分析 检验函数奇偶性只能用奇函数与偶函数的定义来判断 $f(x)$ 是否满足 $f(x) = f(-x)$ 或 $f(x) = -f(-x)$，两者都需要我们从 $f(-x)$ 着手，看其是否与 $f(x)$ 同号或反号.

解

$$\begin{aligned} f(-x) &= \log_a(-x + \sqrt{(-x)^2+1}) \\ &= \log_a\left[(-x + \sqrt{(-x)^2+1}) \cdot \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2+1}}\right] \\ &= \log_a \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= -\log_a(x + \sqrt{x^2+1}) \\ &= -f(x), \end{aligned}$$

由此即知 $f(x) = \log_a(x + \sqrt{x^2+1})$ 为奇函数.

例 4 求 $y = \sqrt[3]{x + \sqrt{1+x^2}} + \sqrt[3]{x - \sqrt{1+x^2}}$ 的反函数，并求其定义域.

分析 求反函数一般都要由 $y = f(x)$ 解出 $x = \varphi(y)$，这里欲解出 x，显然需先将 y 的表达式两端三次方，再设法解之.

解

$$\begin{aligned} y^3 &= x + \sqrt{1+x^2} + 3(x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{2}{3}}(x - \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}} \\ &\quad + 3(x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}(x - \sqrt{1+x^2})^{\frac{2}{3}} + x - \sqrt{1+x^2} \\ &= 2x + 3(x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}(x - \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}\left[(x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}} + (x - \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{3}}\right] \\ &= 2x + 3(-1)^{\frac{1}{3}}y = 2x - 3y, \end{aligned}$$

解得

$$x = \frac{1}{2}(y^3 + 3y),$$

即所求反函数为

$$y = \frac{1}{2}(x^3 + 3x)\text{，其定义域为 } x \in (-\infty, +\infty).$$

例 5(90103,90203) 填空题．设函数 $f(x)=\begin{cases}1, |x|\leqslant 1,\\ 0, |x|>1,\end{cases}$ 则函数 $f[f(x)]=$ __________.

分析 由已知条件知，无论 x 取何值总有

$$|f(x)|\leqslant 1, x\in(-\infty,+\infty).$$

现将 $f(x)$ 作为 $f[f(x)]$ 的自变量时，自然有

$$f[f(x)]=1.$$

解 应填 1.

例 6 设

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}\qquad g(x)=e^x,$$

求 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$.

分析 按复合函数的概念，欲求 $f[g(x)]$，只需将 $f(x)$ 的表达式中的 x 换成 $g(x)$，然后再依次整理化简即可.

解 $$f[g(x)]=f(e^x)=\begin{cases}1, & |e^x|<1,\\ 0, & |e^x|=1,\\ -1, & |e^x|>1\end{cases}$$
$$=\begin{cases}1, & e^x<1,\\ 0, & e^x=1,\\ -1, & e^x>1\end{cases}$$
$$=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0.\end{cases}$$

相仿可得

$$g[f(x)]=e^{f(x)}=\begin{cases}e^1, & |x|<1,\\ e^0, & |x|=1,\\ e^{-1}, & |x|>1.\end{cases}$$

例 7(92303) 选择题．设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$ 则

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ -(x^2+x), & x>0;\end{cases}$

(B) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant 0;\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2-x, & x>0;\end{cases}$

(D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

分析 欲建立 $f(-x)$ 的表达式，只需分两种情况来探讨：一是 $-x\leqslant 0$，二是 $-x>0$，于是有

当 $x \geqslant 0$,即 $-x \leqslant 0$ 时,则 $f(-x) = (-x)^2 = x^2$;

当 $x < 0$,即 $-x > 0$ 时,则 $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$.

从而

$$f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0, \\ x^2 - x, & x < 0. \end{cases}$$

解 应选择(D).

本题也可以在原 $f(x)$ 的表达式中令 $x = -y$ 而得出

$$f(-y) = \begin{cases} (-y)^2, & -y \leqslant 0, \\ (-y)^2 + (-y), & -y > 0, \end{cases}$$

亦即得

$$f(-x) = \begin{cases} x^2, & x \geqslant 0, \\ x^2 - x, & x < 0. \end{cases}$$

例 8(87304) 选择题. $f(x) = |x\sin x| e^{\cos x} (-\infty < x < +\infty)$ 是

(A) 有界函数; (B) 单调函数;

(C) 周期函数; (D) 偶函数.

分析 像本题这样给出四个不同的选项,也常用排除法先排除一些选项. 现

$$|f(x)| = |x| \cdot |\sin x| e^{\cos x}.$$

其中 $|\sin x| \not\equiv 0, e^{\cos x} > 0$. 故由因子 $|x|$ 即可断定 $f(x)$ 不是有界函数,也不可能是周期函数. 再由 $f(0) = 0, f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ 及 $f(\pi) = 0$,又可断定 $f(x)$ 不是单调函数,故只有选项(D) 是正确的. 这一结论也不难直接看出:由于 $x\sin x$ 是偶函数,可知 $|x\sin x|$ 是偶函数,$e^{\cos x}$ 也是偶函数,从而 $|x\sin x| e^{\cos x}$ 必是偶函数.

解 应选择(D).

小结 与本节有关的习题的题型很多,可能涉及函数的各种表达式或性质. 但由于它们都属于最基本的内容,所以在解题时,大多数情况下只要从基本定义出发,经过适当的演算,即可得出所需的结论.

§1.2 无穷小量与无穷大量

无穷小量是高等数学中最基本概念之一,在试题中出现的频率也比较大,读者应该较为透彻地理解有关无穷小量、无穷 小的比较、无穷小的阶等基本概念,知道无穷小与无穷大的诸性质及其与极限的关系,要熟记几对常用的等价无穷小:当 $x \to 0$ 时,我们有

$x \sim \sin x \sim \mathrm{tg} x$; $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$;

$\ln(1 + x) \sim x$; $e^x - 1 \sim x$,

并能运用以上诸关系来解相应的习题.

例 1(93303) 选择题.　当 $x \to 0$ 时,变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是

(A) 无穷小;　　　　　　　(B) 无穷大;

(C) 有界的,但不是无穷小;　　(D) 无界的,但不是无穷大.

分析　变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是 $\frac{1}{x^2}$ 与 $\sin\frac{1}{x}$ 的乘积,当 $x \to 0$ 时,$\frac{1}{x^2}$ 显然是无穷大量,而 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $x \to 0$ 的过程中虽然是有界变量,但其值有时可以为零(如在 $x = \frac{1}{2k\pi}$,$k = 1,2\cdots$ 的一系列点处),有时也可以为 1(如在 $x = \dfrac{1}{2k\pi + \frac{1}{2}\pi}$,$k = 0,1,2,\cdots$),于是 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 的值也随之为零或愈来愈大. 再注意到这两串点在趋向于零的过程中是互相交替出现的,因而,其所取的值 0 与 $(2k\pi + \frac{\pi}{2})^2$ 也是互相交替出现的,这即说明变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 既不是无穷小量,也不是无穷大量,更不是有界变量,这样就排除了前三个选项,而只有选择(D).

解　应选择(D).

例 2(87304) 选择题.　函数 $f(x) = x\sin x$

(A) 当 $x \to \infty$ 时为无穷大;

(B) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界;

(C) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界;

(D) 当 $x \to \infty$ 时存在有限极限.

分析　与例 1 相仿,在 $x \to \infty$ 的过程中我们只要考查下列两串点及其相应的函数值:

$x_k = 2k\pi (k = 0,1,2,\cdots), f(x_k) = 0$;

$t_k = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k = 0,1,2,\cdots), f(t_k) = 2k\pi + \frac{1}{2}\pi$.

前者否定了选择项(A),后者否定了选择项(B) 与(D),故只有选择项(C) 成立.

解　应选择(C).

例 3　讨论当 $x \to 1$ 时,无穷小量 $1 - x$ 与 $1 - \sqrt[3]{x}$ 哪个阶数较高.

分析　按无穷小比较的概念,只需看极限 $\lim\limits_{x\to1}\frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}}$ 的值.

解　由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}} \xlongequal[1-\sqrt[3]{x}=y]{\text{令}} \lim\limits_{y\to0}\dfrac{1-(1-y)^3}{y} = \lim\limits_{y\to0}(3 - 3y + y^2) = 3$,

即知 $1 - x$ 与 $1 - \sqrt[3]{x}$ 是同阶无穷小.

说明:若用洛必达法则求极限值,则更为简捷,事实上

$$\lim_{x\to1}\frac{1-x}{1-\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to1}\frac{-1}{-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}} = 3.$$

例 4(91103、91203) 填空题.　已知 $x \to 0$ 时,$(1 + ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$ 与 $\cos x - 1$ 是等价无穷小,则常数 $a =$ ________.

分析　本题应从两个无穷小量是等价的定义出发,即由

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x - 1} = 1$$

推算 a 之值. 按洛必达法则显然有

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}(1+ax^2)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2ax}{-\sin x}=-\frac{2}{3}a,$$

可见

$$-\frac{2}{3}a=1,\text{即 } a=-\frac{3}{2}.$$

解 应填 $a=-\dfrac{3}{2}$.

例 5 当 $x\to 0$ 时,求无穷小量 $f(x)=\mathrm{tg}x-\sin x$ 的阶及其主部.

分析 欲求当 $x\to 0$ 时 $f(x)=\mathrm{tg}x-\sin x$ 的阶,只能从分析

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^k}$$

入手.化上式为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^k\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^k}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{x^{k-3}}\right)$$

便可看出,只要取 $k=3$,则上述极限值就等于$\dfrac{1}{2}$,即 $\mathrm{tg}x-\sin x$ 与 x^3 是同阶无穷小,其主要部分是$\dfrac{1}{2}x^3$.

解 取 $g(x)=x^3$,于是有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}\cdot\frac{2}{4}\right)=\frac{1}{2}.$$

从而 $f(x)$ 是关于 x 的三阶无穷小,其主部是$\dfrac{1}{2}x^3$.

例 6(88103,88203)选择题. 若函数 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$,则当 $\Delta x\to 0$ 时,该函数在$x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是

(A) 与 Δx 等价的无穷小;

(B) 与 Δx 同阶的无穷小;

(C) 比 Δx 低阶的无穷小;

(D) 比 Δx 高阶的无穷小.

分析 根据无穷小比较的定义,由导数或微分的定义

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0)\Delta x}{\Delta x}=f'(x_0)=\frac{1}{2}$$

即知,$\mathrm{d}y$ 与 Δx 是同阶无穷小.

解 应选择(B).

例 7(93103,93203) 选择题. 设$f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\mathrm{d}t, g(x)=x^3+x^4$,则当$x\to0$时,$f(x)$是$g(x)$的

(A) 等价无穷小; (B) 同阶但非等价无穷小;

(C) 高阶无穷小; (D) 低阶无穷小.

分析 只要看下述极限:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\mathrm{d}t}{x^3+x^4}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\cos x\sin(\sin^2x)}{3x^2+4x^3}=\lim_{x\to0}\cos x\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin^2x)}{3x^2+4x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\cos(\sin^2x)\cdot\sin2x}{6x+12x^2}=\lim_{x\to0}\cos(\sin^2x)\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{6x+12x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{2\cos2x}{6+24x}=\frac{1}{3},\end{aligned}$$

即知二者是同阶但非等价的无穷小.

解 应选择(B).

例 8 求$\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{e^{x^3}-1}{1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}}$.

分析 当$x\to0+$时,所给极限是“$\frac{0}{0}$”型的未定式,可以用洛必达法则求之,但计算较麻烦.注意到$e^{x^3}-1\sim x^3$,并由$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$得

$$1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}\sim\frac{1}{2}(\sqrt{x(1-\cos x)})^2\sim\frac{1}{4}x^3,$$

这时应用等价无穷小来求原式的极限将简便得多.

解法一 由洛必达法则,有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}\frac{e^{x^3}-1}{1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}}&=\lim_{x\to0+}\frac{3x^2e^{x^3}}{\sin\sqrt{x(1-\cos x)}\cdot\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{x(1-\cos x)}}{1-\cos x+x\sin x}\\&=\lim_{x\to0+}6e^{x^3}\frac{\sqrt{x(1-\cos x)}}{\sin\sqrt{x(1-\cos x)}}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x+x\sin x}\\&=6\cdot1\cdot\lim_{x\to0+}\frac{2x}{\sin x+x\cos x+\sin x}\\&=6\cdot\lim_{x\to0+}\frac{2x}{2\sin x+x\cos x}=6\cdot\frac{2}{3}=4.\end{aligned}$$

解法二 用等价无穷小代替,便有

$$\lim_{x\to0+}\frac{e^{x^3}-1}{1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}}=\lim_{x\to0+}\frac{x^3}{\frac{1}{4}x^3}=4.$$

可见解法二比解法一简便得多.

例 9 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}-\sqrt{1-\mathrm{tg}x}}{e^x-1}$.

分析 原式也是“$\frac{0}{0}$”型的未定式,按例 8 的分析也有两种做法.

解法一　用罗比塔法则

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}}+\frac{1}{2}\frac{\sec^2 x}{\sqrt{1-\mathrm{tg}x}}}{e^x} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1} = 1.$$

解法二　利用 $x \sim \mathrm{tg}x, e^x - 1 \sim x$，并先化 $\sqrt{1+\mathrm{tg}x} - \sqrt{1-\mathrm{tg}x}$ 为 $\frac{2\mathrm{tg}x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}+\sqrt{1-\mathrm{tg}x}}$，则

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}x}+\sqrt{1-\mathrm{tg}x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{tg}x}{e^x-1} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1.$$

相比之下，本例解法一比解法二较为简便，其原因在于分子与分母的求导较为简单.

小结　本节所涉及的问题可归纳为三种类型：第一类是有关无穷小(大)量或有界变量的判定；第二类是有关无穷小(大)量的比较及其阶数的判定(包含求主部)；第三类是利用等价无穷小来求某些极限. 前两类问题大部分都是从有关概念的基本定义出发，或利用无穷小(大)量的性质，就可以解决(如例 1 ～ 例 7 皆是如此)，而第三类问题，它不仅要求我们熟记一些常见的等价无穷小(见本节前言中所列的几对)，而且还应注意在计算极限的过程中只能用等价无穷小代替求极限式子中的某一因子，而绝不可用等价无穷小代替式子中的某一项. 例如

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cdot\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3\cos x}$$
$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}.$$

在上述运算中我们用 x 和 $\frac{1}{2}x^2$ 分别代替式子中的因子 $\sin x$ 与 $1-\cos x$ 是正确的，但如果认为由 $x \sim \sin x \sim \mathrm{tg}x$ 而有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3} = 0.$$

则是错误的(不能用等价无穷小替换式子中的某一项).

§1.3　极限概念与极限存在准则

数列极限的"$\varepsilon - N$"定义与函数极限的"$\varepsilon - \delta$"定义，虽然是高等数学的基本概念，但对于工科各专业来说，不能要求过高，只要能理解定义的精神实质就够了. 因此，这些内容一般也不 是考试的重点.

本节的重点是函数的左极限与右极限的概念，以及函数极限存在的充要条件是左，右极限均存在且相等；两个极限存在准则 —— 夹逼准则与单调有界准则，以及由此所推出的两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e,$$

并且要求能用这两个极限求与其相关的极限.

例 1 用定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})=0$.

分析 从数列极限的"$\varepsilon-N$"定义,可知欲证$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})=0$,只需证$\forall\ \varepsilon>0$,总$\exists\ N$,使得当$n>N$时,恒有

$$\left|\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})\right|<\varepsilon$$

成立.

但这只要注意,由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,知必存在$N_1$(譬如$N_1=[\frac{2}{\varepsilon}]+1$),使$n>N_1$时,总有$0<\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$成立,于是当$n>N_1$时,亦有

$$\begin{aligned}0&<\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})\\&=\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N_1})+\frac{1}{n}(\frac{1}{N_1+1}+\frac{1}{N_1+2}+\cdots+\frac{1}{n})\\&\leqslant\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N_1})+\frac{1}{n}(n-N_1)\frac{\varepsilon}{2}\\&\leqslant\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N_1})+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

又因N_1已取定,故可设$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N_1}=C$(常数),于是$\forall\ \varepsilon>0$,又必存在$N_2$,使当$n>N_2$时有

$$\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2C}$$

成立,于是只要取$N=\max\{N_1,N_2\}$,则当$n>N$时,必有

$$0<\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})\leqslant\frac{\varepsilon}{2C}\cdot C+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

成立,即证得$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})=0$.

证 $\forall\ \varepsilon>0$,由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,知存在$N_1$,使得当$n>N_1$时,总有

$$0<\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立. 设$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N_1}=C$,$\forall\ \varepsilon>0$,又存在$N_2$,使得当$n>N_2$时,总有

$$\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2C}$$

成立. 于是,只要取$N=\max\{N_1,N_2\}$,当$n>N$时便有

$$\begin{aligned}0&<\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})\\&=\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{N_1})+\frac{1}{n}(\frac{1}{N_1+1}+\frac{1}{N_1+2}+\cdots+\frac{1}{n})\\&<\frac{\varepsilon}{2C}\cdot C+\frac{1}{n}\frac{\varepsilon}{2}(n-N_1)<\varepsilon\end{aligned}$$

成立,即得证 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})=0.$$