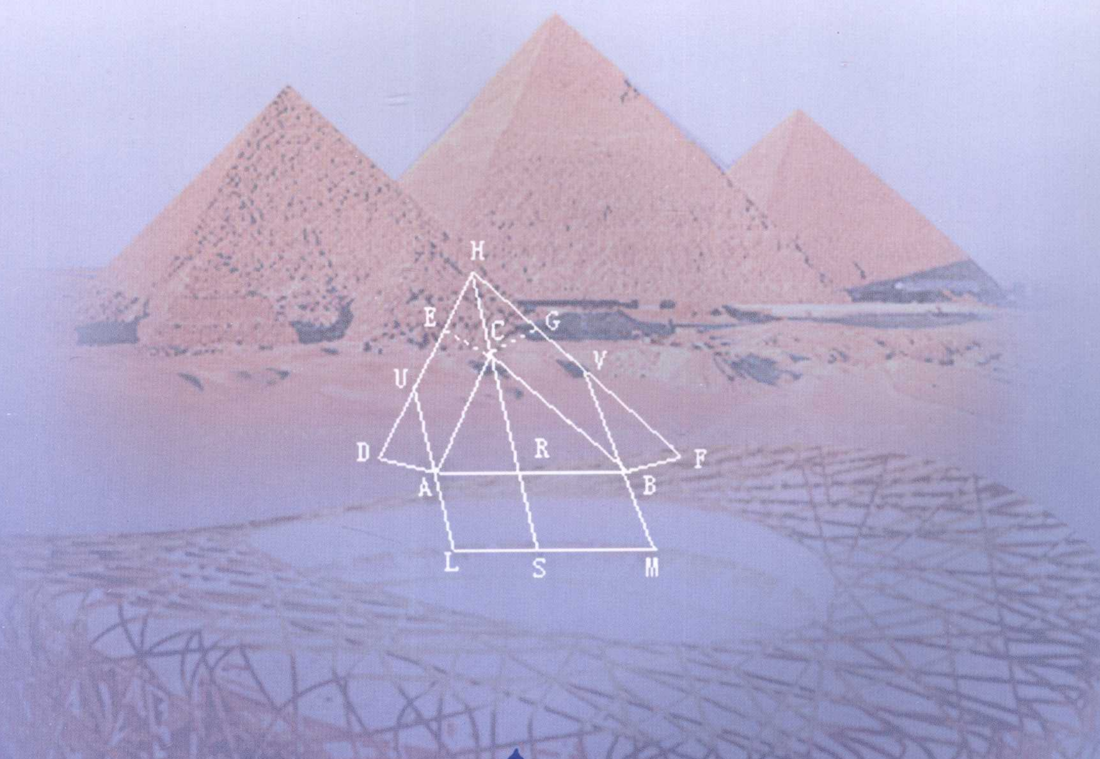
大学生文化素质教育丛书

YINFANG JIUYUAN HUANWANXIANG

因方就圆幻万象

——数学史话

张其亮　毛军军　编著



安徽大学出版社

安徽省十一五规划教材
大学生文化素质教育丛书

因方就圆幻万象

——数学史话

张其亮　毛军军　编著

安徽大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

因方就圆幻万象——数学史话/张其亮,毛军军编著.—合肥:安徽大学出版社,2009.8

(大学生文化素质教育丛书)

ISBN 978-7-81110-491-2

Ⅰ.因... Ⅱ.①张...②毛... Ⅲ.数学史-世界-青年读物 Ⅳ.O11-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 008369 号

大学生文化素质教育丛书

因方就圆幻万象——数学史话

张其亮 毛军军 编著

出版发行	安徽大学出版社(合肥市肥西路 3 号 邮编 230039)
印　　刷	合肥现代印务有限公司
联系电话	编辑室 0551-5108812 发行部 0551-5108397
电子信箱	ahdxchps@mail.hf.ah.cn
开　　本	710×1000 1/16
印　　张	11.25
字　　数	250 千
责任编辑	王先斌
封面设计	孟献辉
版　　次	2009 年 8 月第 1 版
印　　次	2009 年 8 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-81110-491-2
定　　价	18.00 元

序

1995 年，原国家教委在 52 所高等学校开展加强大学生文化素质教育的试点工作。1998 年，教育部决定在全国高校建设“国家大学生文化素质教育基地”，大学生文化素质教育工作进入实施阶段。经过不断的摸索和实践，高校文化素质教育取得了突出的成绩，有力地促进了教育思想观念的转变，推动了高校人才培养模式的改革，为提高教育质量作出了重要贡献。

自 1995 年始，安徽大学面向全体学生开设公共选修课，将文化素质教育作为学校探索和实践“三基并重(扎实的基本理论，较强的基本技能，良好的基本素质)，全面发展”人才培养模式的重要内容，予以统一规划和安排。1999 年，经教育部批准，安徽大学作为国家大学生文化素质教育基地进行建设，2003 年 4 月正式授牌。安徽大学还将大学生文化素质教育列为“211 工程”子项目进行建设，先后建立了“爱国主义教育基地”、“农村改革教育基地”、“历史文化教育基地”、“自然环境教育基地”，并将“大学生素质拓展计划”的实施纳入“国家大学生文化素质教育基地”建设之中。近年来，“三基并重，全面发展”的人才培养模式的不断实施完善，“以人为本”的办学理念的逐步确立，素质教育的积极开展，使广大学生综合素质得到显著提高。目前，安徽大学大学生文化素质教育已全面铺开并初步形成特色，共开设人文与科技公选课一百多门，开展了公选课、讲座、活动、社会实践等多种文化素质教育形式。

课程教学因较为稳定而全面成为文化素质教育的最重要的方式。它是大学整个课程体系中的一个相对独立的序列，是学校各本

科专业教学计划素质教育模块中的一项重要内容。它处于大学教育的基础性位置。安徽大学将文化素质教育课程列入教学计划，并规定8个学分的修课要求，还要求学生通过4个学分的综合素质考核(包括创新实践教育)。文化素质教育课程体系建设要注意规范化，把握好共性与个性的统一，协调好与其他课程的关系。

文化素质教育课程主要有以下特点:1.以人为本。专业教育重在育才，素质教育重在育人。文化素质教育课程应着力培养学生在对自然和社会探究中的人文关怀，使学生养成适应社会、服务社会的意志品质。2.通识教育。文化素质教育课程应建立在专业课程基础上，突出跨学科特征，强调不同学科的通识性道理。素质教育课程是基础课的基础，其教育对象是多学科的学生。3.可塑性。课程内容应明白易懂，易于教师展开，也便于学生接受和联想，使学生由感知而悟化。4.启发引导。不仅要在授课过程中启迪学生的思维，更主要的是使学生掌握一种灵活的学习方法，形成开放性的活跃思维，在课外能自觉自然地运用这种方法开展素质教育。可以鼓励学生超出课程内容进行学习和研究，以利于学生的创新能力、研究能力的培养。

要抓好教学队伍、教学大纲、教学方法与手段、教材等建设工作。特别要遴选一些备受学生欢迎、有助于提高大学生文化素养的课程作为精品课程加以建设。我校成立大学生文化素质教育丛书编委会，就是为了加强对大学生文化素质教育教材的规划、建设与出版工作。编委会做了大量的调查研究工作，拟订了编委会工作规程、丛书出版规划、丛书写作要求等。这项工作应作为学校大学生文化素质教育基地建设的一项重要内容。丛书的编写将以《面向21世纪教育振兴行动计划》和《中共中央、国务院关于深化教育改革全面推进素质教育的决定》为指导思想，结合素质教育课程的特点，努力编写和出版一批适合学生需要和为学生所喜爱的精品教材。教材的出版将使我校文化素质教育工作迈上一个新台阶，增进我校与其他高校文化素质教育方面的校际合作与交流。

黄德宽

2004年12月14日

目　录

第1章 绪 论

“数学是一个知识工具，它比任何其他由于人的作用而得来的知识工具更为有力，因而它是所有其他知识工具的源泉。”

——笛卡尔(R. Descartes)

数学是科学的大门和钥匙。

——培根(Roger Bacon)

1.1 “数学”的字源

数学是人类最为悠久的知识领域之一。从远古屈指计数到现代电子计算机的发明；从测天量地到抽象严谨的公理化体系的形成，在数千年的数学历史长河中，数学思想的诞生和发展，既富有理性魅力，又充满传奇色彩。首先，让我们追寻一下“数学”的字源。“数学”一词(拉丁文 mathematic，英文 mathematics，法文 mathématiques，德文 die Mathematik，等)均源于希腊文 μαθηματικά，是由希腊数学家毕达哥拉斯(Pythagoras，公元前 572－前 497 年)约在公元前 530 年创立的。毕达哥拉斯出生在小亚细亚半岛西边的萨摩斯岛，年轻时，曾去过埃及、巴比伦、印度等地，公元前 530 年返归故里，不久迁居意大利南端的克罗托内，在那里创建了一个兼有宗教、哲学和政治性质的秘密团体，吸收了大批的听众。他把信徒们分为两类：一类是普通的听讲者，另一类是学派的成员，叫做 μαθηματικοι，这个词的原意是指那些获得高深知识的人，源于 μαθημα，意指课程、学院、教育等，以后逐步演化成 μαθηματικοs(后来译成“数学家”)及 μαθηματκα(后译成“数学”)。

我国于 1939 年 8 月始有 mathematics 的译名。当时的教育部规定全国一律使用“数学”一词。算学、数学并用的情况在我国一直延续了几百年。1933 年，当时由专家学者组成的“数学名词审查委员会”(委员有陈建功(1893

—1971 年)、熊庆来(1893—1969 年)、姜立夫(1890—1978 年)、江泽涵(1902—1994 年)等 14 人)专就两词的统一问题进行讨论。1939 年 6 月,有关部门对是使用算学还是数学进行民意测验,最后,教育部经过研究决定选用“数学”译名,而废“算学”一词。理由如下:我国古代六艺(礼、乐、射、御、书、数)之教,数居其一。“数”既沿用已久,顺以历史习惯,宜保留“数”字。“数理”或“数理化”并称,已渐为人们所接受。全国高等学校中,以“数学”、“数理”、“数学天文”为系名的要比以“算学”,“算理”或“天文算学”为名的要多。

1.2 数学的定义

数学到底是什么?很多人曾经尝试去定义它,但没有一个人能成功地完成这个工作。粗略说来,人们认为数学主要是处理数字和图形,处理模式、关系与运算,其中涉及公理、证明、引理和定理的形式化程序,自阿基米德时代以来就从未停止过此项工作的研究。人们知道,数学的目的是形成所有合理思想的基础。有些人可能认为,是外部世界铸造了我们的思想——即人脑的运作——使之具有了现在称之为逻辑的东西。另外一些人——诸如哲学家以及科学工作者——则认为,我们的逻辑思维(思想过程)是头脑自身工作的创造物,是通过进化独立于外部世界发展的结果。然而,数学则显然具有上述两方面内容。它似乎是描述外部世界的语言,但可能更适宜用来分析我们自己。在从原始神经系统开始的进化过程中,人脑作为由上百亿神经元和为数更多的元与元之间的连接所构成的组织,已经经历了很多变化和漫长的生长,而这些变化和生长则是无数偶然事件作用的结果。

数学本身的存在可能是由于这样的事实:存在某些表述或者说定理,其陈述是简单的,而对它们的证明则需要很长的篇幅。没有人知道为什么事情会是这样。更有甚者,许多数学表述的简单性既具有美学价值,又具有哲学趣味。而且,数学本身是一个历史的概念,数学的内涵随着时代的变化而变化,给数学下一个一劳永逸的定义是不可能的,“什么是数学?”这自然是我们关心的问题。在历史上,数学有过种种定义。

“数学是量的科学”(Mathematics is the science of quantity),这是公元前 4 世纪的希腊哲学家亚里士多德(Aristotle 公元前 384—前 322 年)给数学所下的古老定义,但什么是“量”,他则没有明确定义。

“数学是科学的大门和钥匙”(Mathematics is the gate and the key of the science)，这是13世纪英国哲学家培根(Roger Bacon，1214—1294年)关于数学的定义，常被后人所引用。关于数学的定义很多很多，但这些定义都具有一定的历史局限性。有一个盲人摸象的故事：盲人摸着象的大腿，他说：象是一个柱子；摸着象的鼻子，他说象是一条蛇；摸着象的耳朵，他说象是一把扇子。关于数学的定义，一位数学家形象地说：数学令思维活跃、精神升华，消除了我们与生俱有的蒙昧与无知。这实质上赋予数学以生命，数学的魅力和神奇显现无遗。

纯粹的数学完全由这样一类论断组成，假定某个命题对某些事物成立，则可推出另外某个命题对同样一些事物也成立。这里不管第一个命题是否确实成立，也不管所假设的那些事物是否真。“这样的数学可以定义为一种科目，我们绝不知道其中说的是什么，也不知道所说的是真是假。”(Thus the mathematics may be defined as the subject in which we never know what we are talking about，nor whether what we are saying is true.)这就是常受抨击的“罗素定义”。罗素(Bertrand Russell，1872—1970年)是现代英国数理哲学家。他从极端的角度强调了数学的自身需要与逻辑方面，将数学和其他科学技术割裂开来，忽视数学从人类的社会实践中发展起来的这一事实，片面强调近代数学高度抽象的特点，过分夸大了逻辑的作用。

国内的书刊常常引用恩格斯对数学的论述：“数学是研究世界的空间形式与数量关系的科学。”《汉语大词典》(罗竹风主编，汉语大词典出版社就录用这一定义)。

进入20世纪中后期，苏联和美国一批有影响的数学家对数学定义作了符合时代的修正。

“现代数学就是各种量之间，一般说是各种变化着的量的关系和相互联系的科学”，这一定义不再区分“数”与“形”，着重强调“量”，赋予其丰富的现代意义。它不仅包括现实世界的各种空间形式与数量关系，而且包括了一切可能的空间形式与数量关系(如：群，域，环，泛函等)。

还有对数学的定义是：“这个领域已被称作模式的科学(Science of Pattern)，其目的是要揭示人们从自然界和数学本身的抽象世界中所观察到的结构和对称性。”这一定义提出“模式”，它可以是数的模式、形的模式，还可以是运动与变化的模式、推理与行为的模式，它可以是现实的，也可以是想象的，也可以是实质的……这个具有高度概括性的定义，已日益引起关注并获得大多数数学家的认同。

对数学其实大可不必追求一个十全十美、无懈可击的定义，这样的定义也许根本找不到。数学的定义借用王国维在《人间词话》中关于读书三境界

的描述来概括或许更为通俗形象：

"昨夜西风凋碧树，独上高楼，望尽天涯路。"此为第一境界也。"衣带渐宽终不悔，为伊消得人憔悴。"此为第二境界也。"众里寻他千百度，蓦然回首，那人却在灯火阑珊处。"此为第三境界也。

1.3 数学史的分期

数学家庞加莱(Henri Poincaré，1854－1912 年)说："若想预见数学的未来，正确的方法是研究它的历史和现状。"我们都想知道：我们现在何处，如何到达，将去何方。数学史告诉我们来自何处。为了探寻数学的发展规律，我们常常将整个数学发展史划分为若干个阶段，这通常称为数学的分期。按不同的形式来解释，有不同的分期。主要有以下几种编排方式：按年代顺序来排列(编年史)、按不同学科分支来叙述(分科史)、以人物为中心来介绍(人物传记)、按地区或民族来讲解(地区史)。

由于数学的发展是一个错综复杂的知识积累过程，用单一的方式和线索去框定难免有失偏颇。根据以往的经验和大量资料，一般的数学史著作往往以某一线索为主同时兼顾其他方式来进行分期。本书综合考虑了各个方面的论述，对数学史作如下分期：

(1)数学的萌芽时期(公元前 6 世纪前)

这一时期是人类建立最基本的数学概念时期。人类从"数"和"形"的概念出发，认识了最简单的计算法和几何形式，逐步形成了理论与证明之间的逻辑关系的"纯粹"数学。

(2)初等数学时期(公元前 6 世纪－17 世纪前叶)

这一时期又称常数数学时期。这个时期中基本的、最简单的数学成果是构成现在小学数学的主要内容。这个时期从公元前 5 世纪开始，也许更早一些，直到 17 世纪，大约持续了两千年。在这个时期逐渐形成了初等数学的主要分支：算术、几何、代数、三角等。按照历史条件的不同，可以把初等数学史分为三个子时期：希腊的、东方的和欧洲文艺复兴的时期。

①希腊初等数学形成与发展正好与希腊文化普遍繁荣的时代一致。到

公元 3 世纪，在欧几里得（Euclid 约前 330 — 前 275 年）、阿基米德（Archimedes，前 287—前 212 年）、阿波罗尼奥斯（Apollonius，约前 260—前 190 年）的时代数学发展达到了顶峰，它的衰退终止于公元 5 世纪，当时最光辉的著作是欧几里得的《原本》。尽管这部书是两千多年以前写成的，但是它的一般内容叙述的特征与我们现在用的几何教科书非常相近。在以后章节我们将详细叙述。

希腊人不仅发展了初等几何，并把它形成完整的体系，还得出许多非常重要的结果。例如，他们研究了圆锥曲线、椭圆、双曲线、抛物线；证明了某些属于射影几何的定理；此外，他们还以天文学的需要为指南，给出了球面几何以及三角学的原理，并计算出最初的正弦表，确定了许多复杂图形的面积和体积的计算方法。

在算术与代数方面，希腊人也做了了不起的工作。他们奠定了数论的基础，研究丢番图方程，发现了无理数，找到了求平方根、立方根的方法，界定了算术级数与几何级数的性质，等等。

应该指出，远在这以前好几个世纪，我国的算术和代数就已经达到很高的水平。我国在公元前 2 世纪到 1 世纪已有了二元一次联立方程组的解法；在历史上第一次利用负数，并且叙述了运算的规则，也找到了求平方根与立方根的方法。

②随着希腊科学发展鼎盛时期的终结，数学发展的中心移到了印度、中亚细亚和阿拉伯国家。印度人发明了现代记数法，引进了负数，并把正数与负数的对立和财产与债务的对立及直线两个方向的对立联系了起来。他们开始像运用有理数一样运用无理数，总结出了表示各种代数运算的符号和性质，包括求根运算的符号。“代数”这个词本身起源于 9 世纪天文学家穆哈默德·伊本·穆斯·阿暇·花剌子米（Muhammad Alknowarizmi，约 780—850 年）。花剌子米的著作基本上建立了解方程的方法。中亚细亚的数学家们找到了求根和一系列方程的近似解的方法，找到了“牛顿二项式定理”的普遍公式，有力地推进了三角学的研究，并把这些内容建成一个较为完整的系统，造出非常准确的正弦表。约在公元 6 世纪，我国学者已经会解简单的不定方程，知道几何中的近似计算以及三次方程的近似解法。

到 16 世纪，人们在数学研究方面所缺少的主要是对数及虚数和字母符号系统的内容。正像在远古时代为了运用整数应该制定表示它们的符号一样，现在为了运用任意数并对它们给出一般规则，就应该制定相应的符号。这个任务从希腊时代就已开始，直到 17 世纪才完成。在笛卡尔和其他人的努力下最后完成了现代符号系统建立工作。

③在科学复兴时期，欧洲人向阿拉伯人学习，并且借助阿拉伯文的翻译熟识了希腊科学。从阿拉伯沿袭过来的印度计数法逐渐地在欧洲确定了下来。到了16世纪，欧洲科学终于越过了先人的成就。例如意大利人塔尔塔利亚(Tartagliae，约1500－1557年)和费拉里(Ferrari，1522－1565年)在一般形式上完成了解三次方程、解四次方程的工作。人们在这个时期第一次开始运用虚数。现代的代数符号也制造出来了，其中不仅出现了表示未知数的字母符号，也出现了表示已知数的字母符号。关于现代符号的表示方法是韦达(Viete Francois，1540－1603年)在1591年提出的。最后，英国的纳皮尔(Napier John，1550－1617年)发明了供天文研究作参考的对数，并在1614年发表。初等代数的建立至此基本上可算是完成了，以后数学则是向高等数学方向逐步发展，即向变量数学的过渡。

(3)近代数学时期(17世纪前叶－18世纪中叶)

到16世纪，封建制度开始消亡，资本主义开始发展并兴盛起来。在这一时期中，家庭手工业、手工业作坊逐渐地改革为工场手工业，并进而转化为以使用机器为主的大工业。因此，社会和经济的发展对数学提出了新的要求。这时，对运动的研究变成了自然科学的中心问题。实践的需要和各门科学本身的发展使自然科学转向对运动的研究、对各种变化过程和各种变化着的量之间的依赖关系的研究。

为了表示变化着的量的一般性质和它们之间依赖关系的反映，在数学中产生了变量和函数的概念。数学对象的这种根本扩展决定了数学向新的阶段，即向变量数学时期的过渡。数学中专门研究函数的领域称作数学分析。因此，从17世纪开始了数学的新时期——变量数学时期，也可称为数学分析出现与发展的时期。变量数学建立的第一个决定性步骤出现在1627年笛卡尔(Descartes Rene，1596－1650年)的著作《几何学》中。这本书奠定了解析几何的基础，它的出现将变量、运动带进了数学。恩格斯指出："数学中的转折点是笛卡尔的变数。有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了……"在这个转折发生以前，数学中占统治地位的是常量，而此后，数学转向研究变量了。在《几何学》这本书里，笛卡尔引进坐标系和利用坐标方法把具有两个未知数的任意代数方程看成平面上的一条曲线。他的解析几何内容给出了回答如下问题的可能：通过计算来解决作图问题；求由某种几何性质给定的曲线的方程；利用代数方法证明新的定理，反过来，从几何方面来看代数方程。

变量数学发展的第二个决定性阶段是牛顿(Isaac Newton，1642－1727年)

和莱布尼兹(Leibniz Gottfried Wilhelm,1646－1716年)在17世纪后半叶建立了微积分。微积分的起源主要来自两方面的问题:一是力学的一些新问题:已知路程对时间的关系,求速度及已知速度对时间的关系求路程;二是几何学的古老问题:确定面积。但是这两类问题之间的显著关系的发现、解决这些问题的一般方法的形成,要归功于牛顿和莱布尼兹。事实上,牛顿和莱布尼兹只是把许多数学家都参与过的准备工作完成了,他们的微积分原理却要溯源于古代希腊人所创造的求面积和体积的方法。这将在后面章节作详细介绍。微积分的发现在科学史上具有决定性的意义。除了有变量与函数概念以外,以后形成的极限概念也是微积分以及整个分析进一步发展的基础。在微积分原理产生的同一时代,还产生了分析的另外内容:级数理论、微分方程论、微分几何。以上这些理论都是因为力学、物理学和技术问题的需要而产生并向前发展的。

分析理论蓬勃地发展着。它不仅成为数学知识的中心和主要部分,而且还渗入数学较古老的知识范围,通过分析及其变量、函数和极限等概念以及运动、变化等思想,辩证法渗入了全部数学。同样地,由于分析知识的重要性,数学才在自然科学和技术的发展中成为精确地表述它们的规律和解决问题的得力工具。

当然,分析知识并不能包括数学知识的全部,在几何、代数和数论知识中都保留着它们特有的问题和方法。比如,在17世纪,与解析几何同时产生的还有射影几何,而纯粹几何方法在射影几何中占统治地位。与此同时还产生了另一个重要的数学分支——概率论,它研究大量"随机"现象的规律问题,得出了研究成果:出现于偶然性中的必然性的数学方法。

第三个时期的基本结果,如解析几何(部分内容已纳入中学教科书)、微积分、微分方程、高等代数、概率论等已成为高等学校理科教材的主要内容。这个时期数学的基本思想和结论已广为人们接受和了解,几乎所有的工程师和自然科学工作者都或多或少地运用着这些成果。近几十年来,数学知识应用的情况正在发生着深刻的变化。前人研究的数学成果逐渐渗透到社会科学研究的各个领域,数学内容的一部分已经进入高校文科教科书中。与此相反,数学发展的最近阶段,即现代阶段的思想和结果基本上还只是为在数学、力学、物理学及一些新技术领域中工作的科学工作者所使用。

(4)现代数学时期(18世纪中、后叶至今)

数学发展的现代阶段的开端,以其基础——代数、几何、分析中的深刻变化为特征。数学的现代发展不仅表现为现代数学的新领域的不断产生和高

层次理论的出现，而且还表现在数学向一切学科与社会部门的渗透和及其应用上。现代数学正在向复杂性情况进军，它研究的对象越来越复杂，主要表现在以下几方面：从单变量到多变量，从低维到高维；从线性到非线性；从局部到整体，从简单到复杂；从连续到间断，从稳定到分岔；从精确到模糊。后面的章节安排正是以这四个时期为线索的。

1.4 学习数学史的意义

(1)给你一双数学的眼睛，丰富你观察世界的方式

与其他学科相比，数学是一门历史性或者积累性很强的科学，重大的数学理论总是在继承和发展原有理论的基础上建立起来的。100 多年前，德国数学史家汉克尔(Hankel, Herman, 1839－1873 年)形象地指出："在大多数的学科里，一代人的建筑为下一代人所拆毁，一个人的创造被另一个人所破坏。唯独数学，每一代人都在古老的大厦上添加一层楼。"比如，算术四则可以说是最古老的数学内容，今天许多计算都已由电脑代劳，但算术四则的基本原理并没有被抛弃；19 世纪虽然发现了非欧几何，但欧几里得几何知识仍然大有用处；抽象代数代替古典代数，泛函分析代替古典分析……可以说，在数学的进化过程中，几乎没有发生过彻底推翻前人建设起来的知识大厦，后人不仅没有推翻前人原有的理论，而且总是包容原先的理论。若我们对比天文学的"地心说"、物理学的"以太说"、化学的"燃素说"等这些理论一一被推翻的事实，就可以发现数学发展不同于其他学科的发展。所以说数学是积累的科学，它本身就是历史的记录，或者说，数学的过去溶化在现在与未来之中。学习数学史，可为学生打开一个窗口，从而让学生领略数学的博大精深。数学区分于其他学科的主要特点有三个：抽象性，精确性和广泛的应用性。

在中学数学的学习过程中，读者已经体会到数学的抽象性了。数本身就是一个抽象概念，几何中的直线也是一个抽象概念，几乎全部数学的概念都具有抽象特征。整数的概念、几何图形的概念都属于最原始的数学概念。在原始概念的基础上又形成有理数、无理数、复数、函数、微分、积分、n 维空间以至无穷维空间这样一些抽象程度更高的概念。但是需要指出，所有这些抽象度更高的概念，都有非常现实的背景。不过，抽象不是数学独有的特性，任何其他科学定义都有这一特性。因此，单是数学概念的抽象性还不足以说尽数

学抽象的特点。数学抽象的特点还在于:第一,在数学的抽象中只保留量的关系和空间形式而舍弃了其他一切;第二,数学的抽象是一级一级逐步提高的,它们所达到的抽象程度大大超过其他学科中的一般抽象;第三,数学本身几乎完全周旋于抽象概念和它们的相互关系的圈子中。如果说自然科学家为了证明自己的论断常常求助于实验,那么数学家证明定理只需用推理和计算。这就是说,不仅数学的概念是抽象的、思辨的,而且数学的方法也是抽象的、思辨的。

数学的精确性表现为数学推理的逻辑严格性和数学结论的确定性,这点读者从中学数学教科书中就已有深刻的感受了。它的一般特点就是它在做任何事情的时候必须小心谨慎,注意细节,对每一步骤的推导都应科学严谨。在数学中我们不能满足于粗线条的涂抹,所有细致之处必须在适当时刻描绘。庞加莱曾经说过:“数学是一种语言,我们不能用这种语言表达不精确或含混不清的思想。”事实上,精确性和清晰性造成了数学与其他科学文献间的差别。有人说:思想可以被不同的方式所驾驭。例如,在法语中,是对命题的概括,促使人们朝向明晰和简化。在英语中,人们看到的是实际意义。而德语则倾向于使人朝向不总是存在的深度思考。在波兰和俄国,语言使其自身具有某种被酿造的意味,思想的发展像茶一样越泡越浓。而斯洛伐克语则倾向于沉思的、超越物质的和可扩展的,其心理学意味强于其哲学意味。拉丁语又有所不同,它是有规律的,永远是清晰的;词与词是分开的,不像在德语中那样胶结在一起;二者的关系如同蒸煮适当与煮得过烂的米饭。一些法国数学家习惯于以一种更为流畅的、不表述太多确切定理的风格写作。综上所述,数学的严格性不是绝对的,而是相对的、发展的。讲一个故事。三位好朋友坐火车访问云南,一位是数学家,一位是作家,一位是物理学家。他们在火车上看到窗外的田野上出现一只黑羊,作家感慨道:“想不到云南的羊都是黑的。”物理学家纠正说:“不对,云南有一只黑羊。”数学家举头看看窗外说:“云南至少存在一块土地,上面存在一只羊,这只羊至少半边是黑的。”从这个有趣的小故事就可以看出数学的精确性和数学家对事物描述的严谨性。

数学的广泛应用性在于数学的处处有用。这主要表现在数学是研究量的关系、量的变化、量的变化关系,并贯穿在一切科学部门的深处,成为它们的得力助手与工具。正如华罗庚(1910—1985年)教授所指出的:宇宙之大,粒子之微,火箭之速,化工之巧,地球之变,生物之谜,都离不开数学。让我们来回忆几个数学应用的特色例子。

古希腊时期的伟大数学家阿基米德有数学之神的美誉。在父亲的管教下,阿基米德从小就向往着去亚历山大里亚学园学习和深造。亚历山大里亚

学园是当时世界上最大的学术中心，其中包括图书馆、研究院等几部分。图书馆藏书达70万卷，主要是埃及纸草书卷，大部分用希腊文书写，几乎包括了所有古代希腊的著作，也有一部分东方的典籍。研究院从各方招致人才，生活由王家供应，免交赋税。来到这里的人有不少是得宠的文人，但更多的却是对科学文化有突出贡献的著名人物。亚历山大里亚学园的学术空气是自由的，学生不仅可以充分地利用已有的藏书进行阅读和研究，而且可以自由地选择感兴趣的内容去听讲和参加讨论。当时学园的科学研究包括四个方面：文学、数学、天文学和医学。希腊的天文学实际上是一种数理天文学，它是以天体运动的数学设计为主要内容的，这种天文学在很大程度上乃是一种数学。至于医学，通过占星术也包含一些数学。因此，数学在亚历山大里亚学园里占有主导地位，尤其是应用性的数学。阿基米德由于早先在家里接受父亲在天文学和数学方面的良好教育，对这些方面的研究有一定基础，所以来到亚历山大里亚学园以后，他就直接把精力集中在对这些学科的研究上。他系统地研读了欧几里得的《几何原本》，认真研究了古希腊时期诡辩学派的代表人物普洛克拉斯(Proclus，约公元前485—前410年)、哥尔伽斯(约公元前487—前380年)以及安提丰(Antiphon，约前5世纪)等人的关于解决古代三大几何问题的各种办法，特别是安提丰和欧多克斯(Eudoxus of Cnidos，约前408—前355年)提出的“穷竭法”理论对阿基米德影响至深。这种方法日后成为他处理“无限问题”的基本方法。

亚历山大里亚学园的学者对数学的研究是十分广泛的，就其研究对象来说，数学包括研究心智方面的和研究物质方面的两大部分。研究心智力面的有算术(数论)和几何，研究物质方面的则包括力学、天文学、光学、测地学和声学等。因此，几乎所有的亚历山大里亚学园的数学家都积极参与力学研究，搞技术发明。他们致力于确定物体的重心，进行斜面、滑车和齿轮的受力分析研究等等。尤其是，亚历山大里亚所创造的机械设备即使按现代标准来说其技艺也是令人惊叹的。水泵、滑车、联动齿轮等省力机械已普遍使用。在每年的宗教庆祝活动中，人们还可以看到借助蒸汽转动的神像向善男信女们招手祝福；看到神像淌泪，并给他们倒出圣水。亚历山大里亚人追求现存的物质享受超过对理想世界的空谈，因此希腊古典时期为人所鄙弃的工艺在这里却被人们以新的热情所重视。训练工艺的学校也办起来了，虽然纯粹的科学仍有人钻研，但注重应用的风气已经开始滋长。

亚历山大里亚的社会风气深刻地影响着学园，使它的教学强烈而又明显地表现出一种理论与实践相结合的特点。阿基米德很满意这种学术风气，并自觉地接受它的熏陶。在学园里，阿基米德不仅孜孜不倦地勤奋努力，贪婪