提分攻略

主编 蔡晔

疑难与规律详解

高一数学

全国百位名师联合编写

数理报 精编

龍門書局

www.longmenbooks.com

提分攻略

疑难与规律详解

高一数学

丛书主编　蔡　晔

丛书编委　李学镇　冯素梅　徐淑民　陈晓钟
　　　　　刘贵军　李也莉　隋良永　张大蒙

《数理报》优秀作者编写

数理报　精编

龍門書局

北京

图书在版编目(CIP)数据

提分攻略:疑难与规律详解．高一数学/蔡晔主编．北京:龙门书局,2009
ISBN 978-7-5088-2080-4

Ⅰ．提…　Ⅱ．蔡…　Ⅲ．数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ．G634.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 105415 号

责任编辑:田旭　王乐　王艺超/封面设计:0504 设计

龍　門　書　局 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
www.longmenbooks.com
骏　杰　印　刷　厂 印刷
科学出版社总发行　各地书店经销
*
2009 年 7 月第　一　版　　开本:B5(720×1000)
2009 年 7 月第一次印刷　　印张:11 1/2
字数:221 000
定　价:18.00 元
(如有印装质量问题,我社负责调换)

前言

您在学习中遇到过难以理解的知识点吗？
您在考试中碰到过难以解答的试题吗？
您还在苦苦的寻觅学习的规律、解题的技巧吗？
您还经常为那些"看似容易，一做就错"的易错题苦恼吗？

不要烦恼了，本书将全方位地从根本上帮您解决这一系列问题，帮助您快速、有效地突破学习瓶颈，创造优异成绩。

本书编写背景

新课标教学和新的中高考改革，越来越强调学生能力的培养，包括思维能力、实际应用能力和创新能力。在这三个能力之中，思维能力是核心、是基础。而思维能力的培养不是一蹴而就的，需要教师、教材、学生三个方面通过科学的教学、学习、训练才能见效。

目前各中学使用各种不同版本的教材，都是依据"新课标"的精神和要求编写的，内容新颖，知识覆盖面广。但由于教材本身的篇幅所限，造成教材内容对知识的深度挖掘和对思维的纵向拓展不够。因此，绝大多数教师需要自己花大功夫去研究教材和考试，针对不同学生的学习水平，开发不同的教学资料。学生们也必须根据自身情况寻找学习资源，研究学习对策。这无疑给广大师生带来很大的负担。

而《数理报》作为一份专门为一线教学服务的优秀报刊，非常好地解决了教材、教学、学习、考试等各个环节的衔接问题。为您释疑解难，归纳总结，让您能够灵活应用知识规律解决问题，并能有所创新。为广大师生的教学和学习扫清了障碍。

鉴于此，我们组织了一批经验丰富的一线优秀教师，将《数理报》5 年来积淀下来的精华内容进行重新加工和整合，根据"新课标"和"考试大纲"的要求，分模块、分年级编排成册。

本书具有以下优势

一、既具有报刊的深度和灵活性，又具有图书的广度和系统性。

报刊上的文章，均为一线优秀教师将自己的教学心得归纳整理而成。内容深刻、实用，针对性非常强。但报刊内容同时也有很大的先天缺陷，那就是随意性较强，不成系统。我们将其 5 年的精华内容整理、提升，编写成书，既弥补了其系统性不足的缺陷，又发挥了其灵活性的优势。

二、紧扣各版本教材，可以作为同步教学使用。

《数理报》是一份非常成熟、非常实用的优秀报刊，它已经得到了全国几百万师生的认可。《数理报》的版本配备比较全，是一份同步辅导报。本书融合了《数理报》所有新旧“大纲”的配版分刊，根据知识模块加以整合。因此，本书适合各版本不同学段的师生同步教学和学习使用。

三、内容覆盖面广，重点突出，专门解决“疑难”和“规律”问题。

本书的编写定位，就是为了解决教学、学习、考试中的疑难问题，总结归纳解决问题的方法规律，旨在为广大师生突破教学、学习中的难点，找到提高思维能力的捷径。

本书将您学习中已经遇到和将要遇到的各类疑难各个击破，将学习中的窍门和规律一网打尽，为您的学习扫清障碍、铺路搭桥。

四、本书编写队伍庞大、实力雄厚。

多年来，《数理报》汇集了一大批优秀的一线作者，他们来自全国各地、各级中学的教育教学一线，有的是德高望重的教育教学专家，有的是教学成绩优异的中年骨干教师，还有崭露头角的年轻一代。总之，他们是我国目前中学教学一线优秀教师的代表，是我们教师队伍的精英。

本书使用建议

本丛书是对学生课堂学习的必要补充，主要针对学生学习的疑难点、易错点以及思维规律进行剖析和概括，帮助学生突破学习的薄弱环节。

本书内容分为三大部分，需要同学们根据自身的学习情况选择使用。

“知识疑难解读”针对课本各章节的重点、难点，给出详细的讲解和点拨。

此栏目需要同学们在掌握了课本知识的基本概念后使用。

“思维规律解读”总结了各章节的各类思维和解题规律，分析点拨了应用问题、探索性和开放性问题的解题思路，并针对中(高)考对各章节考查的重点考点做了剖析。

这一栏目的思维要求较高，例题有一定的难度，需要同学们首先弄懂课本上的例题和思维方法，再来研读。

“思维误区破解”精选学生容易出现的错误理解和错误解题思路，作深刻剖析，并向正确的思维引导学生。

同学们在研读这一栏目内容时，要结合自己的错题笔记，融会贯通，切勿死记硬背。

愿我们的劳动能帮助您跳出题海，享受思维探究的乐趣，体验学习成功的喜悦！

本书编写组

目录

CONTENTS

第一章 集 合

知识疑难解读

1. 运算性质拓展

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$A\cap(A\cup B)=A$

$A\cup(A\cap B)=A$

2. De Morgan 公式

$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$

$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$

3. 有限集子集的数目

集合$\{a\}$的子集有 2 个：$\varnothing$，$\{a\}$；

集合$\{a_1,a_2\}$的子集有 2^2 个：$\varnothing$，$\{a_1\}$，$\{a_2\}$，$\{a_1,a_2\}$；

集合$\{a_1,a_2,a_3\}$的子集有 2^3 个：$\varnothing$，$\{a_1\}$，$\{a_2\}$，$\{a_3\}$，$\{a_1,a_2\}$，$\{a_2,a_3\}$，$\{a_1,a_3\}$，$\{a_1,a_2,a_3\}$.

推广至一般情况，若一个集合有 n 个元素，其子集有 2^n 个，真子集有 2^n-1 个，非空子集 2^n-1个，非空真子集有 2^n-2 个.

4. 容斥原理

若集合 A 是有限集，通常用“$|A|$”表示集合 A 中的元素个数.

定理 1 设 A、B 都是有限集，则$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$

定理 2 设 A、B、C 都是有限集，则

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$

推广至一般情形：

定理 3 设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 都是有限集，则

$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k|=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k}|A_i|-\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant k}|A_i\cap A_j|+\sum\limits_{1\leqslant i<j<t\leqslant k}|A_i\cap A_j\cap A_t|+\cdots+(-1)^{k-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k|$

定理 4 设 A、B 都是 S 的子集，则$|\complement_S A\cap\complement_S B|=|S|-|A|-|B|+|A\cap B|$

定理 5 设 A、B、C 都是 S 的子集，则$|\complement_S A\cap\complement_S B\cap\complement_S C|=|S|-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|B\cap C|+|A\cap C|-|A\cap B\cap C|$

推广至一般情形：

定理 6 设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是集合 S 的 k 个子集，则

$|\complement_S A_1\cap\complement_S A_2\cap\cdots\cap\complement_S A_k|=|S|-\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k}|A_i|+\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant t\leqslant k}|A_i\cap A_j|-\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant t\leqslant k}|A_i\cap A_j\cap A_t\cap A_k|+\cdots+(-1)^k|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k|$

思维规律解读

集合中的考点剖析 （山东 王明章）

考点一：对集合基本概念的考查

例 1 已知集合 $A=\{a+2,(a+1)^2,a^2+3a+3\}$，若 $1\in A$，求实数 a 的值.

【分析】 这是一个三元素集合，可先利用集合中元素的确定性解出参数所有可能的取值，然后再根据集合中元素的互异性对所求得的参数的值进行检验.

【解答】 (1)若 $a+2=1$，则 $a=-1$，此时 $A=\{1,0,1\}$与集合中元素的互异性矛盾，应舍去；

(2)若$(a+1)^2=1$，则 $a=0$ 或 $a=-2$，

当 $a=0$ 时，$A=\{2,1,3\}$满足题意；

当 $a=-2$ 时，$A=\{0,1,1\}$与集合中元素的互异性矛盾，应舍去；

(3)若 $a^2+3a+3=1$，则 $a=-1$(舍去)或 $a=-2$(舍去). 综上可得 $a=0$.

点评：此类题目为集合中的含参数问题，一定要考虑全面，把求出的参数代回验证看是否满足集合中元素的互异性.

考点二：对集合的表示方法的考查

例 2 已知集合 $P=\{y=x^2+1\}$，$Q=\{y|y=x^2+1\}$，$S=\{x|y=x^2+1\}$，$M=\{(x,y)|y=x^2+1\}$，$N=\{x|x\geqslant 1\}$，则 （　　）

(A) $P=M$　　(B) $Q=S$

(C) $S=M$　　(D) $Q=N$

【解析】 集合 P 是用列举法表示，只含有一个元素，集合 Q,S,N 中的元素全是数，即这三个集合都是数集，集合 Q 是函数 $y=x^2+1$ 中 y 的取值范围 $\{y|y\geqslant 1\}$，集合 S 是函数 $y=x^2+1$ 中 x 的取值范围 $\mathbf{R}$；集合 N 是不等式的解集 $\{x|x\geqslant 1\}$，而集合 M 的元素是平面上的点，此集合是函数 $y=x^2+1$ 图象上所有的点组成的集合.选(D).

点评：解集合问题时，对集合元素的准确性识别十分重要，不要被 x,y 等字母所迷惑，要学会透过现象看本质.

考点三：对集合间的基本关系的考查

例 3 已知集合 $A=\{x|-3\leqslant x\leqslant 4\}$，$B=\{x|2m-1\leqslant x\leqslant m+1\}$，且 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围.

【分析】 解答本题的关键是 $B\subseteq A$，利用数轴和分类讨论的方法，列出 m 满足的不等式，求 m 的取值范围.

【解答】 因为 $B\subseteq A$，

(1) 当 $B=\varnothing$ 时，$m+1<2m-1$，得 $m>2$；

(2) 当 $B\neq\varnothing$ 时，有 $\begin{cases}-3\leqslant 2m-1,\\ m+1\leqslant 4,\\ m+1\geqslant 2m-1,\end{cases}$

得 $-1\leqslant m\leqslant 2$. 综上得 $m\geqslant -1$.

点评：此类题目中集合 A,B 中的元素是用不等式给出的，解答时应注意 A,B 的包含关系，特别注意要讨论 $B=\varnothing$ 的情况.

考点四：对集合基本运算的考查

例 4 设集合 $A=\{1,2\}$，则满足 $A\cup B=\{1,2,3\}$ 的集合 B 的个数是 （　　）

(A) 1　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 8

【解析】 因为 $A=\{1,2\}$，$A\cup B=\{1,2,3\}$，所以集合 B 中必含有元素 3，即此题可转化为求集合 $A=\{1,2\}$ 的子集个数问题，所以满足题目条件的集合 B 共有 $2^2=4$ 个，故选择(C).

点评：本题考查了并集运算以及集合的子集个数问题，同时考查了等价转化思想.

数轴与韦恩图在集合题中的应用

（湖南　周志明）

例 5 已知全集 $U=\{x|x\leqslant 4\}$，集合 $A=\{x|-2<x<3\}$，$B=\{x|-3<x\leqslant 3\}$，求 $\complement_U A$，$A\cap B$，$\complement_U(A\cap B)$，$(\complement_U A)\cap B$.

【分析】 依据集合交、补意义，借助数轴求解.

【解答】 把全集 U 和集合 A,B 在数轴上表示如下：

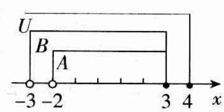


图1-1

由图 1-1 可知 $\complement_U A=\{x|x\leqslant -2$，或 $3\leqslant x\leqslant 4\}$，

$A\cap B=\{x|-2<x<3\}$，

$\complement_U(A\cap B)=\{x|x\leqslant -2$，或 $3\leqslant x\leqslant 4\}$，

$(\complement_U A)\cap B=\{x|-3<x\leqslant -2$，或 $x=3\}$.

例 6 (1) 已知 U 为全集，集合 $M,N\subsetneqq U$ 且 $M\neq N$，若 $M\cap N=N$，则 （　　）

(A) $\complement_U M\supseteq\complement_U N$　　(B) $M\in\complement_U N$

(C) $\complement_U M\subsetneqq\complement_U N$　　(D) $M\supseteq\complement_U N$

(2) 设 U 是全集，集合 P,Q 满足 $P\subsetneqq Q$，则下面的结论中错误的是 （　　）

(A) $P\cup Q=Q$

(B) $(\complement_U P)\cup Q=U$

(C) $P\cap(\complement_U Q)=\varnothing$

(D) $(\complement_U P)\cap(\complement_U Q)=\complement_U P$

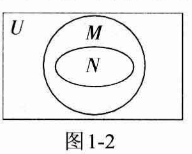


图1-2

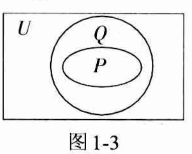


图1-3

【解析】 这两小题是一对姊妹题.第(1)小题检测根据集合的交并关系判断集合间的包含及包含于关系；第(2)小题检测由集合的包含关系判断集合的交并关系.两小题均涉及全集、补集、子集及真子集、集合的交并补运算，题中均

未给出具体的集合，因而它们不仅全面检测了考生对集合概念的理解和掌握程度，也检测了考生的抽象能力，是两道“题小功能大”的好题.

对于第(1)小题，作出韦恩图如图1-2，由图易知 $\complement_U M \subsetneqq \complement_U N$ 正确，从而答案选(C)；对于第(2)小题，作出韦恩图如图1-3，由图可知，仅(D)选项的内容错误，从而答案选(D).

集合中的数学思想 （江苏 李洪洋）

一、分类讨论思想

例 7 设全集 $U=\{x|1\leqslant x<9,x\in\mathbf{N}\}$，求满足$\{1,3,5,7,8\}$与$B$的补集的交集为$\{1,3,5,7\}$的所有集合$B$的个数.

【解答】 (1)求 $U=\{x|1\leqslant x<9,x\in\mathbf{N}\}=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，因$\{1,3,5,7,8\}\cap\complement_U B=\{1,3,5,7\}$，则$\complement_U B$中必有1,3,5,7而无8.

(2)要求得所有集合B个数，就是要求$\complement_U B$的个数. $\complement_U B$的个数由$\complement_U B$中的元素确定，分以下四种情况讨论：

① $\complement_U B$中有4个元素，即$\complement_U B=\{1,3,5,7\}$；

② $\complement_U B$中有5个元素，$\complement_U B$中有元素2，或4，或6，$\complement_U B$有3个；

③ $\complement_U B$中有6个元素，即从2和4，2和6，4和6三组数中任选一组放入$\complement_U B$中，$\complement_U B$有3个；

④ $\complement_U B$中7个元素，即$\complement_U B=\{1,3,5,7,2,4,6\}$.

综上所有集合$\complement_U B$，即B共有8个.

点评：有关求集合的个数和参数的范围的问题. 常需对集合中元素进行分类讨论.

二、集合思想

1. 子集思想

例 8 设 $A=\{x|1<x<3\}$，B是关于x的不等式组$\begin{cases}x^2-2x+a\leqslant 0\\ x^2-2bx+5\leqslant 0\end{cases}$的解集，且$A\subseteq B$，试确定$a$、$b$的取值范围.

【解答】 原不等式组可化为

$$\begin{cases}a\leqslant -x^2+2x=-(x-1)^2+1\\ b\geqslant \frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{x}\right)\end{cases},$$

由$A\subseteq B$知上述不等式组在$1<x<3$内恒成立，只需

$$\begin{cases}a\leqslant -3<-(x-1)^2+1<1\\ \sqrt{5}\leqslant \frac{1}{2}\left(x+\frac{5}{x}\right)<3\leqslant b\end{cases},$$

解之得：$a\leqslant -3$，$b\geqslant 3$为所求.

点评：子集思想的应用回避了对不等式组解的讨论，而将问题转化为恒成立的不等式的参数问题的讨论.

2. 交集思想

例 9 已知数n是同时满足下列条件的最小正整数：①n是15的倍数；②n的各个数位上的数字是0和8，求数n.

【解答】 设$A=\{n|n$是15的倍数$\}$，$B=\{$各个数位上的数字是0和8$\}$.

因为$A=\{n|n$是3的倍数$\}\cap\{n|n$是5的倍数$\}=\{$各个数位数字和为3的倍数$\}\cap\{$末位数字为0或5$\}$，

所以$A\cap B=\{$末位数字为0，其余为0或8，且8的个数是3的倍数$\}$，显然在$A\cap B$中最小的是8880，故所求数字为8880.

点评：将所求的数字放在集合的大背景下进行讨论，然后利用交集思想由元素的属性确定所求数字.

3. 并集思想

例 10 在一次考试中，某班有36人的数学成绩不低于90分，有20人的物理成绩不低于90分，且有15人的数学、物理成绩都不低于90分，问有多少人在这两门成绩中至少有一科不低于90分.

【解答】 用A、B分别表示数学、物理成绩不低于90分的学生的集合，则两科中至少有一科不低于90分的学生人数为$36+20-15=41$人.

点评：本题入手要先转换成集合语言，用并集中含有交集的元素来处理，但并集中元素的个数寻求应注意元素的互异性.

4. 补集思想

例 11 已知三个方程$x^2-2mx+2m+8=0$，$x^2+2mx+m^2+m=0$，$x^2+2(m-1)x+m^2-3=0$至少有一个有实数根，也至少有一个没有实数根，求m的取值范围.

【解答】 在三个方程中：$\Delta_1=4m^2-8m-32$，

$\Delta_2=-4m$，$\Delta_3=-8m+16$，由补集思想，设集合 $A=\{x|\Delta_1<0$ 或 $\Delta_2<0$ 或 $\Delta_3<0\}$，$B=\{m|\Delta_1\geqslant 0$ 或 $\Delta_2\geqslant 0$ 或 $\Delta_3\geqslant 0\}$，则 $A=\{m|m>-2\}$，$B=\{m|m\leqslant 2$ 或 $m\geqslant 4\}$. 由已知，所求 m 的取值范围是集合 $D=A\cap B=\{m|-2<m\leqslant 2$ 或 $m\geqslant 4\}$.

点评：利用补集思想将已知问题三个方程至少有一个有实数根转化为集合 A 的补集；至少有一个没有实数根转化为集合 B 的补集. 显然 $\complement_U A=B$，再利用 $\complement_U(\complement_U A)=A$ 求出集合 A，这种在正向思维受阻而改为逆向思想的思想，就是补集思想，它是通过两次否定实现一次肯定. 补集求解简洁明快，易于操作，是化归思想的具体体现.

三、转化思想

例 12 设 $A=\{x|x^2+4x=0\}$，$B=\{x|x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$.

(1)若 $A\cap B=B$，求 a 的值；

(2)若 $A\cup B=B$，求 a 的值.

【分析】 这是一种带有逆向思维的题目，解题的关键是要明确 $A\cap B=B$，$A\cup B=B$ 是什么含义，问题就迎刃而解了.

【解答】 由已知 $A=\{-4,0\}$.

(1)因为 $A\cap B=B$，所以 $B\subseteq A$.

①若 $-4\in B$，则有 $a^2-8a+7=0$，得 $a=1$ 或 $a=7$. 当 $a=1$ 时，$A=B$；当 $a=7$ 时，$B=\{-12,-4\}$，$B\subseteq A$ 不成立；

②若 $0\in B$，则有 $a^2-1=0$，得 $a=\pm 1$.

当 $a=1$ 时，$A=B$；

当 $a=-1$ 时，$B=\{0\}$，$B\subseteq A$ 成立；

③若 $B=\varnothing$，则 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$，所以 $a<-1$，$B\subseteq A$.

由①②③得：若 $A\cap B=B$，则 $a=1$ 或 $a\leqslant -1$.

(2)因为 $A\cup B=B$，所以 $A\subseteq B$.

因为 $A=\{-4,0\}$，而 B 至多有两个元素，所以 $A=B$，即 $-4,0$ 是 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 两个根，则：$-4=-2(a+1)$，即 $a=1$.

点评：$A\cup B=B$ 转化为 $A\subseteq B$，$A\cap B=B$ 转化为 $B\subseteq A$，$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$ 转化为 $\complement_U(A\cup B)$ 等.

集合中的新题型

（山东　周良增）

例 13 设 $I=\{1,2,3,4\}$，A 与 B 都是 I 的子集，若 $A\cap B=\{1,3\}$，则称 (A,B) 为一个“理想配集”，那么符合此条件的“理想配集”的个数是________（规定 (A,B) 与 (B,A) 是两个不同的理想配集）.

【解析】 将满足条件的集合一一列出：

$A=\{1,3\}$，$B=\{1,3\}$；

$A=\{1,3\}$，$B=\{1,3,2\}$；

$A=\{1,3\}$，$B=\{1,3,4\}$；

$A=\{1,3\}$，$B=\{1,2,3,4\}$；

$A=\{1,3,2\}$，$B=\{1,3\}$；

$A=\{1,3,2\}$，$B=\{1,3,4\}$；

$A=\{1,3,4\}$，$B=\{1,3\}$；

$A=\{1,3,4\}$，$B=\{1,3,2\}$；

$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,3\}$，共 9 个.

例 14 规定 $\otimes$ 与 $\oplus$ 是两个运算符号，其运算法则如下：对任意实数 a,b 有：$a\otimes b=ab$，$a\oplus b=b(a^2+b^2+1)$ 且 $-2<a<b<2$，$a,b\in\mathbf{Z}$. 用列举法表示集合 $A=\left\{x\,\middle|\,x=2(a\otimes b)+\dfrac{a\oplus b}{b}\right\}$.

【解答】 根据运算法则有

$$x=2(a\otimes b)+\frac{a\oplus b}{b}$$
$$=2ab+a^2+b^2+1=(a+b)^2+1.$$

当 $a=-1$ 时，$b=0$ 或 $b=1$. 因为在 $\dfrac{a\oplus b}{b}$ 中，b 为分母，故 $b=0$ 不符合题意，舍去.

当 $a=0$ 时，$b=1$.

把 $a=-1$，$b=1$ 或 $a=0$，$b=1$ 代入上式得 $x=1$ 或 $x=2$. 故 $A=\{1,2\}$.

例 15 若集合 A_1，A_2 满足 $A_1\cup A_2=A$，则称 (A_1,A_2) 为集合 A 的一个分析. 并规定：当且仅当 $A_1=A_2$ 时，(A_1,A_2) 与 (A_2,A_1) 为集合 A 的同一种分析. 则集合 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ 的不同分析的种数为（　　）

(A)27　(B)6　(C)9　(D)8

【解析】 (1)$A_1=\varnothing$，$A_2=A$，$(\varnothing,A)$ 为 1 种分析.

(2)当 A_1 中含有一个元素时，A_2 中可含有 2 个或 3 个元素，如：$A_1=\{a_1\}$，$A_2=\{a_2,a_3\}$ 或 $A_2=\{a_1,a_2,a_3\}$ 共 2 种分析，依次类推，A 共有

6种分析.(3)当 A_1 中含有2个元素时,A_2 中可含有1个、2个或3个元素,可数出 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$ 共有12种分析.(4)当 A_1 中含有3个元素时,A_2 可为 $\varnothing$ 或含有1个、2个、3个元素,共有8种分析,故集合 A 的不同分析种数为27种.故选(A).

例 16 定义集合 M 与 N 的新运算如下:$M*N=\{x\mid x\in M$ 或 $x\in N$,但 $x\notin M\cap N\}$.若 $M=\{0,2,4,6,8,10,12\}$,$N=\{0,3,6,9,12,15\}$,则 $(M*N)*M$ 等于 ( )

(A)M (B)$\{2,3,4,8,9,10,15\}$

(C)N (D)$\{0,6,12\}$

【解析】 因为 $M\cap N=\{0,6,12\}$,

所以 $M*N=\{2,3,4,8,9,10,15\}$,所以 $(M*N)*M=\{0,3,6,9,12,15\}=N$,故选(C).

点评:本题给出了新运算"$*$"的定义,并要求求 $(M*N)*M$ 的解,解决这类信息迁移题的基本方法是以旧代新法,把新定义的运算"$*$"纳入到已有的集合交、并、补的运算体系之中,并用已有的解题方法来分析、解决新的问题.另外此题还可以用文氏图来分析求解.

例 17 对任意两个正整数 m,n 定义某种运算(运算符号用 $\otimes$ 表示):当 m,n 都为正偶数或都为正奇数时:$m\otimes n=m+n$.当 m,n 中有一个为正奇数,另一个为正偶数时 $m\otimes n=mn$.则在上述定义下,集合 $M=\{(a,b)\mid a\otimes b=36.a,b\in\mathbf{N}^*\}$ 中元素个数为________.

【解析】 分类考虑.当 m,n 都为正偶数或都为正奇数时,$36=1+35=2+34=\cdots=17+19=18+18$ 共18个等式,能组成的实数对为 $18\times2-1=35$ 对(因为 $18+18$ 所组成的实数对只有一个);当 m,n 中一个为正奇数,另一个为正偶数时,$36=1\times36=3\times12=4\times9$ 能组成的实数对为 $2\times3=6$ 对.故共有41个元素.

"容斥原理"解题妙用 (河北 牛保华)

1. $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$;2. $\mathrm{card}(A\cup B\cup C)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(B\cap C)-\mathrm{card}(A\cap C)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)$.

例 18 某中学某班有学生90人,参加数学小组的有63人,参加化学小组的有52人,求既参加数学小组,又参加化学小组的人数的最大值和最小值.

【解答】 设 I 为90名学生组成的全集,集合 $A=\{$参加数学小组者$\}$,$B=\{$参加化学小组者$\}$,则 $\mathrm{card}(A)=63$,$\mathrm{card}(B)=52$.

因为 $A\cap B\subseteq B$,所以 $\mathrm{card}(A\cap B)\leqslant\mathrm{card}(B)=52$.

故两项小组都参加的学生至多有52人.

又因为 $A\cup B\subseteq I$,

所以 $\mathrm{card}(I)\geqslant\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$

所以 $\mathrm{card}(A\cap B)\geqslant\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(I)=63+52-90=25$.

故两项小组都参加的学生至少有25人.

追本溯源 (四川 蒲仕波)

例 19 (课本原题)写出集合 $\{a,b\}$ 的所有的子集,并指出其中哪些是它的真子集.

【评析】 ①解决本类问题时,应注意"子集"、"真子集"、"非空子集"以及"非空真子集"之间的区别和联系;②元素个数为 n 的有限集合 A 的子集个数为 2^n,真子集个数为 2^n-1,非空子集个数为 2^n-1,非空真子集个数为 2^n-2.

链接(上海)已知集合 $A=\{-1,3,2m-1\}$,集合 $B=\{3,m^2\}$.若 $B\subseteq A$,则实数 $m=$________.

【解析】 由题意得,$m^2=2m-1$,解得 $m=1$.

例 20 (课本原题)设 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$,$A=\{3,4,5\}$,$B=\{4,7,8\}$,求 $\complement_UA$,$\complement_UB$,$(\complement_UA)\cap(\complement_UB)$,$(\complement_UA)\cup(\complement_UB)$.

【评析】 根据本题可归纳出一组结论:

$(\complement_UA)\cup(\complement_UB)=\complement_U(A\cap B)$;

$(\complement_UA)\cap(\complement_UB)=\complement_U(A\cup B)$.

链接 1(全国)设集合 $U=\{1,2,3,4\}$,$A=\{1,2\}$,$B=\{2,4\}$,则 $\complement_U(A\cup B)$ 等于 ( )

(A)$\{2\}$ (B)$\{3\}$

(C)$\{1,2,4\}$　　(D)$\{1,4\}$

【解析】 由并集的定义,得 $A\cup B=\{1,2,4\}$,再根据补集的定义,得 $\complement_U(A\cup B)=\{3\}$,故选(B).

链接2(辽宁)设集合 $U=\{1,2,3,4,5\}$,$A=\{1,3\}$,$B=\{2,3,4\}$,则$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$等于 (　　)

(A)$\{1\}$　　(B)$\{5\}$

(C)$\{2,4\}$　　(D)$\{1,2,3,4,5\}$

【解析】 因为 $A\cup B=\{1,2,3,4\}$,所以$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)=\{5\}$,故选(B).

思维误区破解

(山东　张明同)

误区一:忽视集合元素的确定性

例1 下列对象中可以构成集合的是 (　　)

(A)大苹果　　(B)小桔子

(C)中学生　　(D)约等于零的实数

【错解】 (D)

【剖析】 根据集合中元素的确定性可知,如果某些对象能构成集合,则这些对象能够被明确指定.本题中的(D)"约等于零的实数"不能被明确指定,因为"约等于"没有一个明确的标准,不清楚精确到什么程度才是"约等于";(A)大苹果和(B)小桔子中的大和小都没有明确的标准,所以也不能构成集合.

【正解】 (C)

误区二:忽视集合元素的无序性

例2 已知集合 $A=\{2,x,x^2,xy\}$,集合 $B=\{2,1,y,x\}$,是否存在实数 x,y 使 $A=B$?若存在,试求 x,y 的值;若不存在,说明理由.

【错解一】 如果存在实数 x,y 使 $A=B$,则必有 $x=1$,此时集合 A,B 中出现 2 个 1,这与集合中元素的互异性矛盾,所以满足条件的实数 x,y 不存在.

【错解二】 假设存在实数 x,y 使 $A=B$,若 $x=1$,则集合 A,B 中出现 2 个 1,这与集合中元素的互异性矛盾,所以必有 $x^2=y$ 且 $xy=1$,解得 $x=y=1$,与集合中元素的互异性矛盾.所以满足条件的实数 x,y 不存在.

【剖析】 错解一认为若 $A=B$,则必有两集合中的元素按顺序对应相等;错解二只注意到了 $x^2=y$ 且 $xy=1$,没有认识到也有可能是 $x^2=1$ 且 $xy=y$.两种错误解法出错的原因都是对集合中元素的无序性认识不到位.

【正解】 假设存在实数 x,y 使 $A=B$,若 $x=1$,则集合 A,B 中出现 2 个 1,这与集合中元素的互异性矛盾,所以必有 $\begin{cases}x^2=y,\\xy=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x^2=1,\\xy=y.\end{cases}$

(1)由 $x^2=y$ 且 $xy=1$,解得 $x=y=1$,与集合中元素的互异性矛盾.(2)由 $x^2=1$ 且 $xy=y$,解得 $x=1,y\in\mathbf{R}$(舍去)或 $x=-1,y=0$.经检验 $x=-1,y=0$ 适合题意.

误区三:忽视集合元素的互异性

例3 已知集合 $M=\{8,a^2+4a-3\}$,$N=\{-3,2,a^2+4a+3,2+a\}$,且 $M\cap N=\{2,8\}$,求实数 a 的值.

【错解】 因为 $M\cap N=\{2,8\}$,

所以 $a^2+4a-3=2$,解得 $a=1$ 或 $a=-5$.

【剖析】 当 $a=-5$ 时,N 中的元素为 $-3,2,8,-3$,这与集合中元素的互异性矛盾,所以上述解法错误.

【正解】 因为 $M\cap N=\{2,8\}$,

所以 $a^2+4a-3=2$,解得 $a=1$ 或 $a=-5$.

当 $a=-5$ 时,N 中的元素为 $-3,2,8,-3$,这与集合中元素的互异性矛盾,应舍去 $a=-5$.当 $a=1$ 时,$N=\{-3,2,8,3\}$,综上可知 $a=1$.

误区四:混淆集合中的代表元素

例4 已知集合 $M=\{x|x=3\}$,集合 $N=\{(x,y)|x=3\}$,则 M 与 N 的关系是 (　　)

(A)$M=N$　　(B)$M\cap N=\{3\}$

(C)$M\cap N=\{(3,3)\}$　　(D)$M\cap N=\varnothing$

【错解】 (A)

【剖析】 错解忽视了集合 M,N 中是不同

的元素，误认为两个集合中的元素相同，导致解答出现错误.

【正解】 因为集合 M 中的元素是数字 3，即$A=\{3\}$；而集合 N 中的元素是点（点的坐标），即集合 N 中的元素是直角坐标系中直线 $x=3$上的所有点，所以集合 A 与 B 没有公共元素，它们的交集应为空集$\varnothing$，故选(D).

点评：研究集合问题应首先看清集合中的元素是什么，本题中的集合 M,N 分别代表了高中数学中常出现的两类集合（数集和点集），应引起足够重视.

误区五：忽视空集在解题中的地位

例 5 设集合 $A=\{x\mid -3\leqslant x\leqslant 4\}$，集合 $B=\{x\mid m-1\leqslant x\leqslant 3m-2\}$，若 $A\cap B=B$，求实数 m 的取值范围.

【错解】 由 $A\cap B=B$，得 $A\subseteq B$. 结合数轴

得$\begin{cases} m-1\geqslant -3, \\ m-1\leqslant 3m-2, \\ 3m-2\leqslant 4 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} m\geqslant -2, \\ m\geqslant \dfrac{1}{2}, \\ m\leqslant 2 \end{cases}\Rightarrow \dfrac{1}{2}\leqslant m\leqslant 2.$

故实数 m 的取值范围为$\{m\mid \frac{1}{2}\leqslant m\leqslant 2\}$.

【剖析】 当 $B=\varnothing$时，也有 $A\cap B=B$ 成立；此时，$m-1>3m-2$，即 $m<\frac{1}{2}$，

【正解】 $\{m\mid m\leqslant 2\}$.

思维驿站

1. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=x\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x^2\}$，则 $A\cap B=$ （　　）

(A)$\varnothing$　　(B)$\{y\mid y\geqslant 0\}$

(C)$\{0,1\}$　　(D)$\{(0,0),(1,1)\}$

2. 已知集合 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$，$B=\{x\mid x>a\}$.

(1)若 $A\cap B=\varnothing$，求实数 a 的取值范围；

(2)若 $A\cap B=A$，求实数 a 的取值范围.

第二章　函　数

第一节　函数及其表示

知识疑难解读

1. 求函数的定义域的 8 种情景

(1)当 $f(x)$是整式时,定义域为 $\mathbf{R}$;

(2)当 $f(x)$是分式时,定义域是使分母不为 0 的 x 取值集合;

(3)当 $f(x)$是偶次根式时,定义域是使被开方式取非负值的 x 取值集合;

(4)当 $f(x)$是零指数幂或负数指数幂时,定义域是使幂的底数不为 0 的 x 取值集合;

(5)当 $f(x)$是对数式时,定义域是使真数大于 0 且底数为不等于 1 的正数的 x 取值集合;

(6)正切函数 $y=\tan x$ 的定义域是$\{x \mid x\in \mathbf{R}$ 且 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in \mathbf{Z}\}$;

(7)若 $f(x)$描述实际问题,则要求使实际问题有意义;

(8)函数为抽象函数,依据所求函数的自变量和已知函数的自变量的关系求之.

2. 求函数值域的 10 种方法

(1)配方法

二次函数或可转化为形如 $F(x)=af^2(x)+bf(x)+c$ 类的函数的值域问题,均可用配方法.

(2)换元法

常用的三角代换(形如 $y=ax+\sqrt{a-bx^2}$ 的函数等),整体代换(形如 $y=ax+b+\sqrt{dx+c}$的函数等).

(3)均值不等式

利用基本不等式:$a+b\geqslant 2\sqrt{ab},ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ $(a、b\in \mathbf{R}^+)$.

(4)判别式法

把函数转化成关于 x 的二次方程 $F(x,y)=0$,通过方程有实根,判别式 $\Delta\geqslant 0$,从而求得原函数的值域.

(5)数形结合法

依函数特点作出图象,由图象直接观察函数的值域.

(6)分离常数法

形如 $y=\frac{cx+d}{ax+b}(a\neq 0、c\neq 0)$的函数,将原分式分解成两项,其中一项为常数,另一项容易求出值域.

(7)反函数法

利用原函数与其反函数的性质,即原函数的定义域和值域分别是其反函数的值域和定义域.

(8)利用函数的单调性

利用函数的单调性即可用定义来讨论,也可用导数进行研究.

(9)利用函数的有界性

利用函数的有界性,如 $y=a^x,y>0$;$y=\sin x,-1\leqslant y\leqslant 1$ 等可求函数的值域.

(10)导数法

利用导数求闭区间上函数最值的步骤是:

①求导,令导数为 0;②确定极值点;③比较端点与极值,确定最大、小值,求得值域.

3. 求函数解析式常用的六种方法:

(1) 代入法:代入法只需用 $g(x)$ 代替 $f(x)$ 的解析式中的 x.

(2) 拼凑法：拼凑法就是对 $f[g(x)]$ 的解析式进行拼凑，使它用 $g(x)$ 表示出来，再用 x 代替两边所有的 $g(x)$.

(3) 待定系数法：如果已知函数的类型，则可设相关的解析式，进而确定系数.

(4) 换元法：如在 $f(\sqrt{x}+1)=x-2\sqrt{x}$ 中，令 $t=\sqrt{x}+1$，则 $x=(t-1)^2$，代入 $f(\sqrt{x}+1)$ 即可.

(5) 方程组法：当给出了 $f(x)$ 和 $f[g(x)]$ 所满足的关系式，利用换元法以及函数的自变量用什么字母表示与函数无关，从而得到关于 $f(x)$ 及 $f[g(x)]$ 的方程组，解之即可.

(6) 图象法：根据图象所反映的特征求出相应的解析式.

思维规律解读

函数及其表示考点剖析（山东　王明章）

考点一：对函数的定义域与值域的考查

例 1 已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[1,4]$，求函数 $y=f(2x+1)$ 的定义域.

【分析】 因为对同一个对应法则 f 来说，$y=f(x)$ 与 $y=f(t)$ 是同一个函数，因此可令 $t=2x+1$，得 $y=f(t)$ 的定义域，进而可求 $y=f(2x+1)$ 的定义域.

【解答】 令 $t=2x+1$，因为 $y=f(x)$ 的定义域为 $[1,4]$，所以 $y=f(t)$ 的定义域为 $[1,4]$，所以 $1\leqslant t\leqslant 4$，即 $1\leqslant 2x+1\leqslant 4$，故 $0\leqslant x\leqslant \frac{3}{2}$，

所以 $y=f(2x+1)$ 的定义域为 $\left[0,\frac{3}{2}\right]$.

例 2 函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}(x\in\mathbf{R})$ 的值域是（　　）

(A) $(0,1)$　　(B) $(0,1]$

(C) $[0,1)$　　(D) $[0,1]$

【解析】 因为 $1+x^2\geqslant 1$，所以原函数的值域是 $(0,1]$，故选(B).

考点二：考查函数的解析式

例 3 已知函数 $f(x)=2x-1$，$g(x)=\begin{cases}x^2 & x\geqslant 0,\\ -1 & x<0,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$ 的解析式.

【分析】 本题是求分段函数的解析式，应按分段函数的定义分段求解.

【解答】 当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)=x^2$，

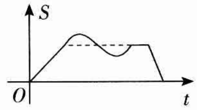
$f[g(x)]=f(x^2)=2x^2-1$.

当 $x<0$ 时，$g(x)=-1$，$f[g(x)]=f(-1)=2\times(-1)-1=-3$.

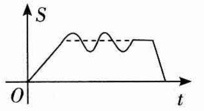
所以 $f[g(x)]=\begin{cases}2x^2-1 & x\geqslant 0,\\ -3 & x<0.\end{cases}$

考点三：对函数图象的考查

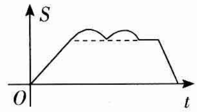
例 4 福州某中学的研究性学习小组为考察闽江口一个小岛的湿地开发情况，从某码头乘汽艇出发，沿直线方向匀速开往该岛. 靠近岛时，绕小岛环行两周后，把汽艇停靠岸边上岸考察. 然后又乘汽艇沿原航线提速返回. 设 t 为出发后的某一时刻，S 为汽艇与码头在时刻 t 的距离. 下列图象中能大致表示 $S=f(t)$ 的函数关系的为（　　）



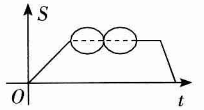
(A)



(B)



(C)



(D)

【解析】 要画函数图象，首先应求出函数解析式，而本题的解析式显然无法求出，又本题为选择题，故可考虑研究函数性质或采用排除法.

从图形上看，四个图象不同的地方就是汽艇绕小岛环行两周时的图象不同，根据题意及实际问题知，汽艇靠近小岛时应该是离码头的距离最近，又因为 S 为汽艇与码头在时刻 t 的距离，显然只有(C)符合题意.

点评： 本题主要考查函数图象和性质，运用数学知识解决实际问题能力及识图、用图、画图的能力. 本题易误选(B)或(D).

考点四：对映射知识的考查

例 5 为确保信息安全，信息需加密传输，发送方由明文→密文（加密），接收方由密

文→明文(解密),已知加密规则为:明文 a,b,c,d 对应密文 $a+2b,2b+c,2c+3d,4d$,例如,明文 1,2,3,4 对应密文 5,7,18,16. 当接收方收到密文 14,9,23,28 时,则解密得到的明文为 ( )

(A)4,6,1,7　　(B)7,6,1,4

(C)6,4,1,7　　(D)1,6,4,7

【分析】 由明文 1,2,3,4 对应密文 5,7,18,16 知加密规则实际上就是一个映射,此题给了密文后,其实就是给了映射中的象求其原象.

【解答】 由题意知,由密文→明文的过程恰好为由明文→密文的逆过程,设明文为 a,b,c,d,

则 $\begin{cases}a+2b=14,\\2b+c=9,\\2c+3d=23,\\4d=28.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=6,\\b=4,\\c=1,\\d=7.\end{cases}$ 故选(C).

函数定义域求法总结　(河北　乔建基)

一、具体函数的定义域问题

例 6 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{(x+1)^0}{\sqrt{|x|-x}}$;　(2) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-5x+6}$.

【解答】 (1)由题意知:$\begin{cases}x+1\neq0,\\|x|-x>0,\end{cases}$

解得 $x<0$,且 $x\neq-1$,

所以函数定义域为 $\{x|x<0$,且 $x\neq-1\}$.

(2)由题意知:$\begin{cases}x+1\geqslant0,\\x^2-5x+6\neq0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\geqslant-1,\\x\neq2,\\x\neq3,\end{cases}$

所以函数定义域为 $\{x|x\geqslant-1$,且 $x\neq2$,且 $x\neq3\}$.

点评: 注意上述解法要灵活运用,不可照抄照搬,当偶次根式作为分母时,被开方式只能大于零了;同时注意逻辑联结词的运用.

二、抽象函数的定义域问题

(一)已知函数 $f(x)$ 的定义域,求函数 $f[g(x)]$ 的定义域

例 7 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$,求函数 $f(2x^2)$ 的定义域.

【解答】 因为 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$,

所以 $0\leqslant2x^2\leqslant1$,即 $0\leqslant x^2\leqslant\dfrac{1}{2}$.

解这个不等式,得 $-\dfrac{\sqrt2}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\sqrt2}{2}$.

即函数 $f(2x^2)$ 的定义域为 $\left[-\dfrac{\sqrt2}{2},\dfrac{\sqrt2}{2}\right]$.

(二)已知函数 $f[g(x)]$ 的定义域,求函数 $f(x)$ 的定义域

例 8 已知函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 $[1,2]$,求函数 $f(x)$ 的定义域.

【解答】 因为函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 $[1,2]$,

所以 $1\leqslant x\leqslant2$. 即 $3\leqslant2x+1\leqslant5$.

所以,函数 $f(x)$ 的定义域为 $[3,5]$.

点评: 如果已知函数 $f[g(x)]$ 的定义域为 A,要求函数 $f(x)$ 的定义域,可由 $x\in A$,求得 $g(x)$ 的取值范围 B,B 即为函数 $f(x)$ 的定义域.

(三)已知函数 $f[g(x)]$ 的定义域,求函数 $f[h(x)]$ 的定义域

例 9 已知函数 $f(x^2-1)$ 的定义域为 $(2,5)$,求函数 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的定义域.

【解答】 因为函数 $f(x^2-1)$ 的定义域为 $(2,5)$,

所以 $2<x<5$. 即 $3<x^2-1<24$.

所以,函数 $f(x)$ 的定义域为 $(3,24)$.

所以 $3<\dfrac{1}{x}<24$,即 $\dfrac{1}{24}<x<\dfrac{1}{3}$.

因此,函数 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 的定义域为 $\left(\dfrac{1}{24},\dfrac{1}{3}\right)$.

求函数解析式的方法　(河南　陈长松)

一、配凑法

例 10 已知 $f\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+1}{x^2}+\dfrac{3}{x}$,求 $f(x)$ 的解析式.

【分析】 由函数定义可通过恒等变形将已知式的右边 $\dfrac{x^2+1}{x^2}+\dfrac{3}{x}$ 都配凑为 $1+\dfrac{1}{x}$ 的表达式.

【解答】 因为 $f\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2+1}{x^2}+\dfrac{3}{x}$

$$=\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}$$

$$=\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+\left(1+\frac{1}{x}\right)-1,$$