

教育部審定

漢譯三S

平面幾何學

北平科學社印行

序

現在幾何教本之中，本書算是第一，定義正確，次序井然，解釋簡明，體裁整齊，方法完備而易懂，習題實用而有趣，尤出奇者，講不可度，引用無理數，使初學者極易明了，亦備有極限證法，且其所講極限簡明至極，以上各點，實他書所不能及。

還有一層，本書高初中皆可適用，初中用之，可以不講極限對稱，極大極小等，習題標以(*)者為難題，初學者亦可略去，高中用之，須講全本，習題易者可以略去。

惟教材時時改良，教法時時進步，教本方能漸漸完備，教育方能漸漸提高，而改進之原則為：

- I. 去暇存瑜。
- II. 化無用為有用。
- III. 進小用為大用。
- IV. 化難為易。
- V. 化繁為簡。
- VI. 增加興趣。

依上之原則及現在之眼光觀之，本書尚有未善者，茲逐一述後：

(1) 直線定義，固然難以說明，但亦非無謂之定義，茲將直線之定義英漢對照述下：

設一線任分為兩段，以一段之兩端與原線上兩點相合，則此段處與原線相合。此線謂之直線。

A line such that any part placed with its ends on any other part must lie wholly in the line is called a straight line.

本書第8節之直線定義實在欠妥。

(2) 直線形之定義應在直線定義以後，本書顛倒（閱第6節及第8節）不合科學方法。

(3) 本書第12頁習題7,8顛倒，應當先作習題8後作習題7。

(4) 本書第12頁底註說明「兩字母如上面所用的 DE 表示一直線。」後於第40頁又註明「兩字母如上面所用的 DE 表示一直線。」似乎畫蛇添足。

(5) 本書第15頁有句云「若已知一直線上的一點及此直線與某已知線所成的角，則此直線可以完全決定。」此句一則不能成立，因可作兩線故也；二則無用，宜刪去。

(6) 第38頁之習題1,2與第12頁之習題3,11重複宜刪去。

(7) 第39頁之習題5,6皆宜刪去，因正方形之定義在76頁所作者是否正方形無從證明也。

(8) 第100頁習題50之 CE 應改為 CD 。

(9) 第141頁之 $E'A' = \frac{b}{2}$ 應加括弧，而改為 $E'A' (= \frac{b}{2})$ 方能合律。

(10) 各幾何本多無軌跡之定義，本書以證法為定義，固比無定義為較強，但亦不妥，茲將其定義列後：

在幾何學內，一點限於一定之條件，而此點所有能到之處，謂之此點之軌跡。

The path of a point that moves in accordance with certain given geometric conditions is called the locus of the point.

(11) 第218頁中間原書為 $(a-c)(b+d) = ab + ad - bc - cb$ 應改為 $(a-c)(b+d) = ab + ad - bc - cd$ ，又本頁習題(a)原書為 $a(b+c+d) = ab + ac + bd$ 應改為 $a(b+c+d) = ab + ac + ad$ 。

(12) 第 255 頁 § 432 之「作圖」Construction 應改爲「解」
Solution.

(13) 第 269 頁 § 444 之證內。

$ABCF$ 的面積 $>$ $A'B'C'F'$ 的面積

$FDEA$ 的面積 $>$ $F'D'E'A'$ 的面積

應改爲

$ABCF$ 的面積 $>$ $A'E'C'F'$ 的面積

$FDEA$ 的面積 $<$ $F'D'E'A'$ 的面積

或 $ABCF$ 的面積 $<$ $A'B'C'F'$ 的面積

$FDEA$ 的面積 $>$ $F'D'E'A'$ 的面積。

(14) 本書定例，已知線爲實線，畫線爲虛線；但有不按此定理者，如第 99 頁之習題 26，第 101 頁之習題 62，似應改正。

(15) 第 308 頁 § 173 之例內 875-801 得 74 原書誤得 64。

(16) 幾何習題應按同一系統排列，方能便於引用本書習題次序分爲若干段，引用時，必須註明之第某頁某習題或第某節第某習題。或命題某第某習題，未免繁瑣，實不如習題之方便也。

敝社見於現在初中幾何教本實無善者，依改進之原則將本書略加修改，作爲初中師範教本，將無用之習題刪去，增加有趣之習題。

本書譯出多年，因有譯出者，故將其擱起，後閱其他譯本錯誤太多，（尤其定義上錯誤太多，如圓之定義等）遂將本書整理出版，但敝社同人惟恐尙有錯誤之處，務望宏達見而教之，下版時必當改正，並酌贈圖書若干，將大名列爲校者。

平面幾何學

目 錄

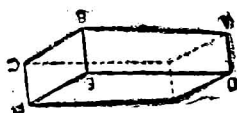
引 子	1
第一編 直線和直線形	17
第二編 圓——作圖	102
第三編 比例。相似多邊形	153
第四編 多邊形的面積	205
第五編 正多邊形。圓的測量	234
附 錄	263

平面幾何學

引子

定義

1. 物理學上的體如木塊，鐵塊等，都佔有一定的空間，這一定的空間，就叫做幾何立體，或簡叫做體。



2. 定義。體為空間之有限部分；具有長，寬，高，三度。

3. 定義。面為體的界限，如圖 $ABED$ 或 $BEFC$ ，僅有長和寬。
例如界面與空氣的中間界限，就是沒有厚的一個面。

4. 定義。線為面的界限；如圖 AB ， AD (§1之圖)。只有長。
例如右邊的黑線 AB ，仍然

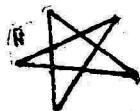
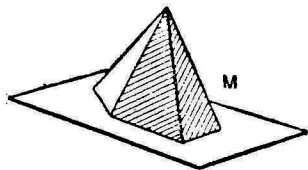


僅於黑白兩色中間，才可代表真正幾何線。

5. 定義。點為線的界限，或線的極端，僅有位置，而無度可言。

這樣說來，面非體的部分，僅為體的界限而已，同樣，點，線也各獨立在空間

6. 定義. 幾何形就是由點, 線, 面, 體的一種或數種組合而成的圖形; 如圖 M 或 N.



直線形就是以直線組成的圖形.

7. 定義. 研究幾何圖形的科學, 叫做幾何學.

8. 直線是最簡單的線, 略可用緊張於兩點間的絲代表之; 如圖 AB 又通常也單叫做線.



直線雖是最簡單的線, 且為幾何上的基礎之一, 但要給以確當的定義, 頗非容易.

9. 定義. 無一處為直線的, 叫做曲線; 如 §8 的圖 CD.

10. 定義. 由幾條不同方向的直線連接而成的線, 叫做折線. 如 §8 的圖 EF.

折線上沒有兩條隣接部分, 可以都在一條直線上.

11. 直線這個名詞, 可用作表一無限長的直線, 或直線的一部分.

一有限長的直線, 通常都叫做線段 它的兩端用記號表明之, 如

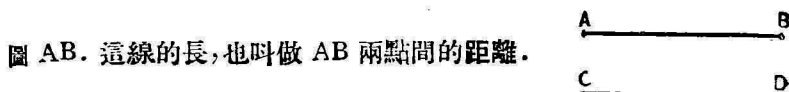


圖 AB. 這線的長, 也叫做 AB 兩點間的距離.

若線的兩端沒記號的, 概為一無限長的直線, 如圖 CD.

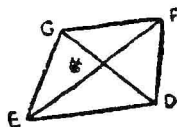
12. 直線 AB 的方向，就是從 A 到 B；BA 的方向，就是從 B 到 A。



13. 引長直線 AB，就是使他經過 B 點而引長；引長 BA，就是使他經過 A 點而引長。

14. 定義。一直線係連結一個面中的任意兩點，若這直線完全在這面上。這面就叫做平面。

15. 定義。一個幾何圖形，他的全部各點，都在同一平面上的，叫做平面形；如 EDFG。



16. 定義。平面幾何學只研究平面形。

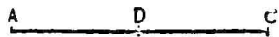
17. 定義。立體幾何學是研究不在同一平面上的圖形。又球面幾何學研究在一球面上的圖形。

18. 一個圖形能夠放在另一個圖形的上面而各點互相密合的。這兩個圖形叫做重合。

19. 定義。能使他們重合的兩個圖形，叫做全同形。全同的線，也叫等線。同樣，全同的角，也叫做等角。（閱第 305 頁）

20. 疊證法就是使兩個圖形重合而證明他們全同。

21. 平分一線，就是平分這線成為相等的兩部分



那末，假如 $AD = DC$ ，AC 就是被平分，我們假定每一線段 (AC) 有且只有一個平分點：如 D。

(1) 點移動的跡是什麼？

(2) 一條線移動，尋常成為什麼圖形？一面移動尋常成為什麼圖形？

(3) 線移動了以後，其跡能否不成一面？

(4) 石工怎樣用直尺，才能判定石面的平不平？

(5) 室內的牆，可以代表那種面？

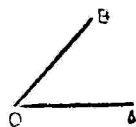
(6) 烟筒的外面，是那種面？

角

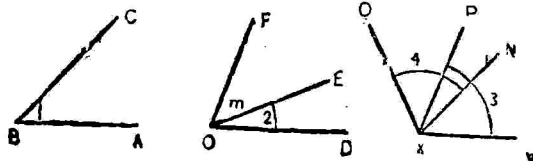
22. 設直線 OA 在一平面內繞點 O 而旋轉，其旋轉的量，叫做角 AOB 。而角的大小，顯然與旋轉線的長短無關。

線 OA 和 OB ，叫做角 AOB 的邊，點 O 叫做角 AOB 的頂？

角的構成，也可以用二射線或二半線由一點發出以說明之。



23. 記法。用三個文字記角時，角頂的文字，恆居他二文字的中間；如角 AEC 及角 EOF 。



如用角頂的文字記角時，即指最大的角而言，(數角會於一點時如 $\angle DOF$ 讀 $\angle O$ ； $\angle ABC$ 讀 $\angle B$ 。

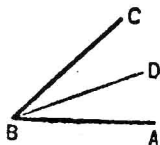
有時也可以拿一個數字，或一個小寫字母放在角的裏面來表示一個角，如角1，角2，角 m 。

角 FOD 是角2與角 m 的和。角2是角 FOD 與角 m 的差。

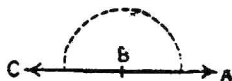
有時畫一條弧線，可以使所指的角格外的顯明。如角2，及角3。其所畫的弧須在指示角的數字的近旁。如角 MXP 可以讀“角3”。角 NXQ 可以讀“角4”。

24. 平分一個角，就是分這個角成為相等的兩個角，我們假定每個角只有一條平分線。

例如 BD 平分 $\angle ABC$ ，就是
 $\angle ABD = \angle DBC$ 。 BD 叫做 $\angle B$ 的平分線。

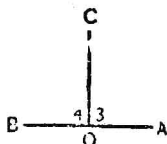


25. 定義。角的兩邊成一直線，他的兩邊反對伸長叫做平角。如 ABC 。

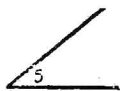


26. 定義。等於平角的一半的角，叫做直角。

例如 OC 平分平角 AOB ，則 $\angle 3$ 與 $\angle 4$ 就叫做直角。



直角



銳角



鈍角

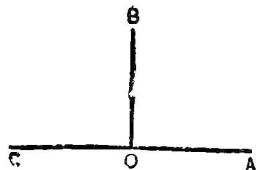
27. 定義。小於一直角的角，叫做銳角。如 $\angle$ 。

23. 定義。大於一直角而小於一平角的角，叫做鈍角；如 $\angle MNO$ 。

29. 定義。銳角和鈍角，統叫做斜角。

30. 定義。若二線相交，能構成直角，這二線叫做互相垂直。如 AC 和 BO 。

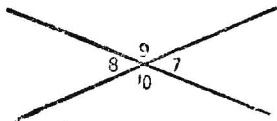
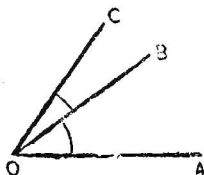
這交點 (O) 叫作垂足。



自線外一點至這線的距離，即是由這點到這線的垂線的長，如 BO 。

31. 量角的大小，就是求他包含某一個單位的多少倍。普通的單位是度（就是一直角的九十分之一）。一度等分做六十份，每份叫做分；一分等分做六十份，每份叫做秒；度，分，秒；常用記號來表示他。如 $6^{\circ}50'12''$ ，讀做六度五十分十二秒。其他的單位還有直角和平角。

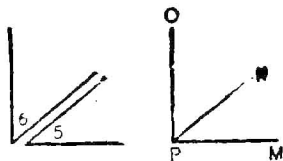
32. 定義。二角具有一個公共頂，並一公共邊居這二角的中間，叫做鄰角。如 $\angle AOB$ 和 $\angle BOC$ 。



33. 定義。若兩角有一公共頂，而這角的兩邊為彼角的兩邊的引長線，則這兩角叫做對頂角。如 $\angle 7$ 和 $\angle 8$ ；或 $\angle 9$ 和 $\angle 10$ 。

34. 定義。把兩個角放在一起，使他們成鄰角而相加。其不公共的二邊所成的角，叫做二角的和。

35. 定義。若兩個角的和等於一直角。這兩個角叫做互為餘角。



因此每一個角叫做他一個角的餘角。角5與角6,或角 MPN 與角 NPO 都是互為餘角。

33. 定義。若兩個角的和等於一平角(或兩直角),這兩個角叫做互為補角。



因此每一個角叫做他一個角的補角。角1與角2,角3與角4,都是互為補角。

習題

1. 一個直角有若干度? 一個平角有若干度? 半個直角有若干度?
2. 三點鐘時, 鐘面上兩針所成的角幾度? 六點鐘時幾度? 兩點鐘時幾度? 五點鐘時幾度?
3. 一點鐘時鐘面上兩針所成的角幾度? 兩點三十分時幾度? 五點三十分時幾度?
4. 當車輪的輻旋轉 $\frac{1}{2}$ 周的時候, 其旋轉的角是若干度? 旋轉 $\frac{1}{4}$ 周時是若干度? 旋轉 $\frac{3}{4}$ 周時是若干度?
5. 若一個餅從中心分做5等分, 其每份的中心角是若干度? 分做六等分如何?
6. 若作二直線一向北一向東北, 他們所成的角是若干度? 一向南而一向東南如何? 一向西北而一向南如何?
7. 若錶面的長針行10分鐘時, 其所經的角是若干度? 行15分鐘時如何? 行30分鐘時如何? 行45分鐘時如何? 行一點鐘時如何?
8. 在第9題的圖中試用三個字母讀出: $\angle a$, $\angle b$, $\angle c$, $\angle d$, $\angle (a+b)$, $\angle (b+c+d)$.

9. 在此圖內求各未知角的數值:

(a) 若 $\angle a = 30^\circ$, $b = 40^\circ$, 求出 $\angle AOC$.

(b) 若 $\angle b = 35^\circ$, $\angle c = 10^\circ$, 求出 $\angle BOD$.

(c) 若 $\angle b = 40^\circ$, $\angle c = 10^\circ$, $\angle d = 50^\circ$, 求 $\angle BOE$.

(d) 若 $\angle AOC = 60^\circ$, $\angle b = 40^\circ$, 求 $\angle a$.

(e) 若 $\angle ACD = 90^\circ$, $\angle a = 35^\circ$, $\angle c = 10^\circ$, 求出 $\angle b$.

(f) 若 $\angle AOE = 110^\circ$, $\angle a = 20^\circ$, 和 $\angle d = 30^\circ$, 求出 $\angle BOD$.

(g) 若 $\angle AOC = 60^\circ$, $\angle a = \angle b$, 求 $\angle a$.

(h) 若 $\angle AOD = 75^\circ$, $\angle a = \angle b = \angle c$, 求 $\angle c$.

10. 在前圖內何角是 $\angle BOC$ 的鄰角? 何角是 $\angle COD$ 的鄰角? 何角是 $\angle BOD$ 的鄰角?

11. 在此圖內若 $\angle O = 90^\circ$.

(a) 何角是 $\angle a$ 的餘角?

(b) 何角是 $\angle AOC$ 的餘角?

(c) 何角是 $\angle BOE$ 的餘角?

(d) 若 $\angle d = 20^\circ$, 求 $\angle AOD$.

(e) 若 $\angle b = 20^\circ$, $\angle COE = 55^\circ$, 求 $\angle a$.

(f) 若 $\angle AOC = 55^\circ$, $\angle d = 15^\circ$, 求 $\angle$.

(g) 若 $\angle a = \angle b = \angle c = \angle d$, 求 $\angle a$.

12. 30° 的餘角是若干度? 35° 的餘角是若干度? $\frac{2}{3}$ 直角的餘角是若干度? n° 的餘角是若干度? $\frac{1}{n}$ 直角的餘角是若干度? $(10+x)^\circ$ 的餘角是若干度?

13. 一個角是他的餘角的 2 倍, 問這個角是若干度?

14. 如附圖, 若 FBA 是一直線.

(a) 何角是 $\angle p$ 的補角?

(b) 何角是 $\angle DBF$ 的補角?

(c) 何角是 $\angle ABE$ 的補角?

(d) 若 $\angle p = 40^\circ$, 求 $\angle ABE$.

(e) 若 $\angle m = 30^\circ$, $\angle p = 35^\circ$, 求 $\angle CBE$.

(f) 若 $\angle DBF = 100^\circ$, $\angle m = \angle n$, 求 $\angle m$.

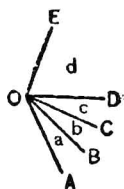
(g) 若 $\angle p = 30^\circ$, $\angle m = \angle n = \angle o$, 求 $\angle o$.

(h) 若 $\angle FBC = 140^\circ$, $\angle ABD = 80^\circ$, 求 $\angle n$.

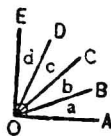
(i) 若 $\angle ABD = 80^\circ$, $\angle n = 35^\circ$, $\angle CBE = 85^\circ$, 求 $\angle p$.

15. 20° 的補角是若干度? 140° 的補角是若干度? 一平角的 $\frac{2}{3}$ 的補角是若干度? n° 的補角是若干度? $(50^\circ - 3x)^\circ$ 的補角是若干度?

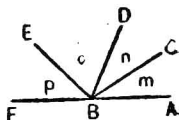
* 習題標以 (*) 的是難題.



習題 9



習題 11



習題 14

16. 一個角是他的補角的3倍，這個角有若干度？

17. 何種角比他的補角小？何種角等於他的補角？何種角比他的補角大？

18. 用代數記號寫：

(a) n° 的餘角，(b) x° 的餘角的3倍，(c) $(2x)^\circ$ 的補角。

(d) n° 的補角的6倍。

19. 如附圖中求各未知角的數值：

(a) 若 $\angle a = 30^\circ$ ， $\angle b = 50^\circ$ ， $\angle c = 60^\circ$ ， $\angle d = 90^\circ$ ， $\angle e = 50^\circ$ ，求 $\angle f$ 。

(b) 若 $\angle a = \angle b = \angle c = \angle d = \angle e = \angle f$ ，求 $\angle f$ 。

* (c) 若 $\angle AOC = 130^\circ$ ， $\angle b = 50^\circ$ ，

$\angle BOD = 110^\circ$ ，和 $\angle DOF = 140^\circ$ ，求 $\angle f$ 。

(d) 若 $\angle d = 90^\circ$ ， $\angle c = \angle b = \angle a = \angle f = \angle e$ ，求 $\angle a$ 。

20. 若二直線 AB 和 CD 相交於 O ，而 $\angle AOC = 60^\circ$ ，試求其他各角的度數。

21. 若 $\angle AOC = m^\circ$ ，問 $\angle DOB$ 有若干度？又 $\angle BOC$ 有若干度？

22. 若 $\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$ ，求 $\angle AOD$ 。

(a) 若 $\angle BOC = 60^\circ$ ，

(b) 若 $\angle BOC = m^\circ$ 。

23. 角 BOC 和角 AOD 有什麼關係？

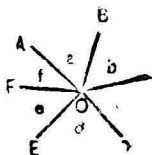
24. 若 AO 垂直於 CO ， BO 垂直於 DO ，求 $\angle AOD$ 。

(a) 若 $\angle COB = 40^\circ$ 。

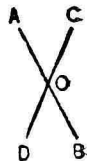
(b) 若 $\angle CCB = m^\circ$ 。

25. $\angle AOD$ 和 $\angle BOC$ 有什麼關係？

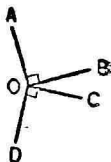
* 26. 若 $\angle AOC = \angle BOD = 90^\circ$ ， $\angle AOD = 3\angle BOC$ ，求 $\angle BOC$ 。



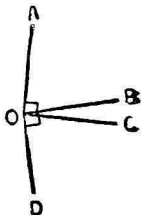
習題 19



習題 20, 21



習題 22, 23



習題 24-26

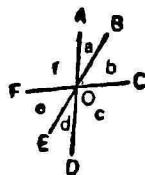
27. 三直線相會於 O 而成六個角 a, b, c, d, e , 及 f

(a) 若 $\angle a = 20^\circ$, $\angle b = 60^\circ$, 求 $\angle c$.

* (b) 若 $\angle a = 15^\circ$, $\angle c = 95^\circ$, 求 $\angle e$.

* (c) 若 $\angle f = 100^\circ$, $\angle d = 20^\circ$, 求 $\angle b$.

* (d) 若 $\angle AOC = 85^\circ$, $\angle BOD = 155^\circ$, 求 $\angle e$.



習題 27

28. 試求互為補角的兩個鄰角 AOB 和 BOC 的兩個平分線所成的

(a) 若 $\angle AOB = 40^\circ$ (b) 若 $\angle AOB = 60^\circ$,

(c) 若 $\angle AOB = m^\circ$.

29. 互為補角的任意兩個鄰角的兩個平分線所成的角是什麼角?

30. 試求互為餘角的兩個鄰角 AOB 和 BOC 的兩個平分線所成的角:

(a) 若 $\angle AOB = 20^\circ$, (b) 若 $\angle AOB = 30^\circ$,

(c) 若 $\angle AOB = m^\circ$.

31. 互為餘角的任意兩個鄰角的兩個平分線所成的角是什麼角?

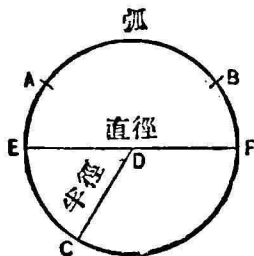
37. 定義。圓是在一個平面上的閉曲線。其上的各點至一定點(D)等距離; 如 ABC .

定點 D 叫做中心, 從中心到圓周上的任意一點的直線為半徑; 如 DC . 圓的任意一部分叫做弧; 如 AB . 圓的長叫做圓周。

圓周這個名詞常指這個曲線, 圓是指其面積。但是近代的用法, 不是這樣。

33. 幾何學所用的器具。平面幾何所用的器具祇有兩種, 就是圓規和直尺。

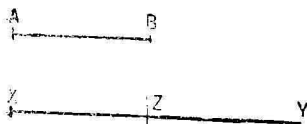
直尺用來作直線, 圓規用來畫圓或弧以及把定長的直線(線段)從一個位置移到另一個位置。



幾何畫的練習

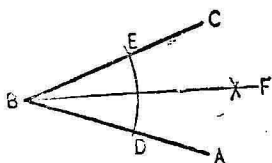
39 下面的練習是要使學者熟習器具的用法，藉此把幾何的基本概念印在腦中，這個部份與幾何的論理部分並無關係，即使刪去也與進行無關，其書法以下列的三種作圖做根據，這裏暫不證明。（與第83，86節比較。）

I. 在 XY 上截取一線使他等於 AB .



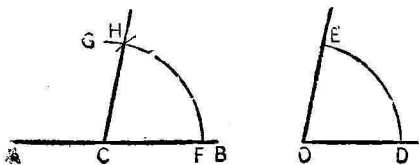
以 X 做中心用 AB 的長做半徑，畫一弧截 XY 於 Z ；那末 XZ 就是所求的線（第 33 節）。

II. 求平分一個已知角 ABC .



以 B 做中心，用任意半徑畫弧遇 BA 於 D ，遇 BC 於 E ，又以 D 和 E 做中心，用適當的半徑畫兩個弧使相交於 F ，那末 BF 直線是所求的平分線。

III. 於已知直線 AB 上一點 C ，作一直線使他和 AB 成一角與角 O 相等。



以 O 做中心，用任意半徑畫弧截 $\angle O$ 的兩邊於 D 和 E ，以 C 做中心，用同一半徑畫弧 FG ，交 AB 於 F 。以 F 做中心，用等於 CE 的長做半徑，畫弧交 FG 於 H 。聯結 CH 。那末 $\angle BCH$ 就是所求的角。

習 題

1. 畫兩點 A 和 B (用小點或小交叉來表示)，過 A 和 B 作一直線。
2. 畫兩點 A 和 B ，以 A 做中心用等於 AB 的長做半徑畫一個圓。
3. 畫三點 A , B 和 C ，過每兩點作一直線。
4. 畫定長的 AB 和 CD 二直線，但 AB 較長。作一直線使他等於：

$$(a) \quad AB + CD.$$

$$(d) \quad AB + 2(CD).$$

$$(b) \quad AB - CD.$$

$$(e) \quad 3(AB) - 2(CD).$$

$$(c) \quad 2(AB).$$

5. 畫一個銳角，再平分之。
6. 畫一個純角，再平分之。
7. 畫一個直角，再平分之。
8. 作一個平角，再平分之。
9. 作兩個角的和。
10. 於 AB 上的已知點 C 畫一垂線垂直於 AB 。
11. 把一個已知角分做 4 等分。
12. 把一個已知角分做 8 等分。
13. 作一個 90° 的角；作一個 45° 的角。
14. 作一個 $22^\circ 30'$ 的角；作一個 135° 的角。
15. 作一個 270° 的角；作一個 $67^\circ 30'$ 的角。
16. 作一個已知角 A 的補角。
17. 求平分已知角 A 的補角。
18. 作一個已知銳角的餘角。
19. 求平分已知銳角的餘角。

1. 兩個字母如 DE ，像上面的這樣用法，是指一直線。