普通高等教育"十一五"规划教材

21世纪大学数学精品教材

经济数学基础

微积分

欧贵兵　方文波　主编

科学出版社

www.sciencep.com

普通高等教育"十一五"规划教材

·21 世纪大学数学精品教材·

经济数学基础·微积分

欧贵兵　方文波　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书根据教育部高等院校教学指导委员会《经济管理类本科数学基础课程教学基本要求》的"微积分纲目"编写而成，内容包括：函数、极限与连续，一元函数的导数与微分，中值定理与导数的应用，一元函数的不定积分，一元函数的定积分及其应用，多元函数的微积分，无穷级数，微分方程与差分方程.教材知识体系完整，结构严谨，内容精炼，循序渐进，推理简明，通俗易懂，例题丰富.每章后列出了该章重要概念的英文词汇，配备了适量的习题，并提供了习题的参考答案或提示.

本书可作为高等院校经管、文史、法律、外语等专业的"微积分"课程教材，也可供其他相关专业读者选用，对教师和科研工作者也具有参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础·微积分/欧贵兵，方文波主编. —北京：科学出版社，2009
普通高等教育"十一五"规划教材. 21世纪大学数学精品教材
ISBN 978-7-03-024946-3

Ⅰ.经… Ⅱ.①欧… ②方… Ⅲ.①经济数学-高等学校-教材②微积分-高等学校-教材 Ⅳ.F224.0 O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第112737号

责任编辑：王雨舸 曾 莉／责任校对：董艳辉
责任印制：彭 超／封面设计：苏 波

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉市新华印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2009年7月第 一 版 开本：B5(720×1 000)
2009年7月第一次印刷 印张：21 1/2
印数：1—3 000 字数：421 000

定价：35.80元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

普通高等教育“十一五”规划教材

·21世纪大学数学精品教材·

《经济数学基础·微积分》编委会

主　编　欧贵兵　方文波

副主编　袁子厚　何小亚

编　委　（按姓氏笔画排序）

王洪山　方文波　石先军　何小亚

欧贵兵　柳宿荣　袁子厚　唐　强

前　言

随着科学技术尤其是计算机技术的飞速发展，数学的理论与方法不仅广泛地应用于自然科学、信息技术和工程技术的各个领域，而且已渗透到诸如生命科学、社会科学、环境科学和经济管理科学等各个领域，尤其在经济活动和经济研究中的作用日益凸显."微积分"是高等学校经管、文史、外语等专业一门经典的数学课程，是培养学生的数学思维和方法的重要数学课程.

微积分是研究函数的微分、积分以及有关概念和应用的数学分支.微积分学是微分学和积分学的总称.微积分的概念可以追溯到古代，到了17世纪后半叶，牛顿和莱布尼茨完成了许多数学家都参加过的工作，分别独立地建立了微积分学.微积分学的创立，极大地推动了数学的发展，过去很多初等数学束手无策的问题，运用微积分便能迎刃而解，显示出微积分学的非凡威力.

本书以提高高等学校经管、文史、外语等专业学生的数学素质为目的，渗透了不少现代数学观点，着力培养和提高学生应用数学方法解决经济问题的能力.在内容选取上既注重微积分在传统领域中的知识内容，又加强了它在经济应用中的介绍.在编写时严格遵循高等院校教学指导委员会关于《经济管理类本科数学基础课程教学基本要求》，力求知识体系相对完整，结构严谨，内容精炼，循序渐进.本书按照人类的认识规律，从典型的实际例子出发，引出微积分的概念，引入概念力求自然、简洁，强调实际应用，加强微积分各章节内容在经济管理中的应用，增强学生将数学应用到解决经济管理方面问题的意识和能力，简略理论推导，逻辑清晰，注重思路分析.在叙述中注重文字简练通俗，概念准确，由浅入深，通俗易懂，力求使学生掌握所学知识，提高应用数学知识的能力.每章后列出该章的重要概念的英文词汇，布置若干道英文习题，要求学生用英文求解，以适应教育面向世界的需要，也为双语教学打下基础.同时紧密结合各节内容，每节配备有适量的习题，便于学生抓住每节每章的重点内容.

本书共8章，包括函数、极限与连续，一元函数的导数与微分，中值定理与导数的应用，一元函数的不定积分，一元函数的定积分及其应用，多元函数的微积分，无穷级数，微分方程与差分方程.

本书由欧贵兵、方文波担任主编，袁子厚、何小亚担任副主编，参加编写的老师还有王洪山、唐强、柳宿荣、石先军.全书在编写过程中，由欧贵兵老师提出编写思路、提纲并主笔，供其他老师讨论并提出修改意见进行修订.

本书在编写出版过程中一直得到科学出版社和武汉科技学院教务处的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢！

本书用到许多资料，在此向所引用书籍的作者表示衷心的感谢！

由于编者的学识所限和时间等原因，书中难免有不妥之处，恳请读者批评指正.

编　者

2009 年 4 月

目　　录

第 1 章　函数　极限与连续

初等数学主要研究常量，微积分是以变量为研究对象，函数又称为因变量，它是微积分的主要研究对象，所谓函数关系就是自变量与因变量之间的依存关系，微积分课程就是在实数范围内研究函数及其分析性质(连续性、可微性、可积性等).极限是微积分的一个基本概念，在微积分中极限方法是研究变量并贯穿始终的一种基本方法，无论是研究函数的可导性、可微性，还是研究函数的可积性以及无穷级数的和，都是以极限作为基本工具. 连续性是函数的一个重要属性，微积分中所涉及的函数大部分都是连续的. 本章将介绍函数、极限和连续的一系列基本概念及性质，为学习后续各章打基础.

1.1　函数的复习

读者在中学已学过有关函数的基本知识，本节将简要地对函数知识进行复习，并作适当的补充.

1.1.1　集合

1. 集合的概念

集合是数学中的一个原始概念. 所谓**集合**(或简称**集**)就是由具有某种特定性质的对象的总体，常用大写字母 A, B, C, …表示集合. 组成集合的对象称为**集合的元素**，常用小写字母 a, b, c ,…表示集合的元素. a 是集合 A 的元素，记为 $a \in A$，读作 a 属于 A ；b 不是集合 A 的元素，记为 $b \notin A$，读作 b 不属于 A . 不含任何元素的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$.

集合的表示常用穷举法和描述法. 如果集合 A 是由具有某种特定性质 p 的元素 x 构成，就记为

$$A = \{x \mid x \text{ 具有性质 } p\}$$

例如，在平面 xOy 上到点(x_0, y_0) 的距离不超过 $R(R > 0)$ 的点的集合 M 可记为

$$M = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$$

当集合的元素都是实数时，这样的集合称为**数集**，本书中用到的集合主要是数

集. 全体自然数、整数、有理数、实数、复数构成的集合依次记为 **N**、**Z**、**Q**、**R**、**C**. 如果没有特别指明,本书中所提到的数都是实数.

对于两个集合 A 与 B,如果集合 A 的任何元素都是集合 B 的元素,则称集合 A 是集合 B 的**子集**,记为 $\mathrm{A}\subset\mathrm{B}$ 或 $\mathrm{B}\supset\mathrm{A}$,读作 A 包含于 B 或 B 包含 A. 例如,$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$.

约定空集 $\varnothing$ 是任何集合 A 的子集,即 $\varnothing\subset A$.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,并且集合 B 的元素也都是集合 A 的元素,即 $A\subset B$ 并且 $B\subset A$,则称集合 A 与 B **相等**,记为 $\mathrm{A}=\mathrm{B}$.

由同时属于集合 A 与 B 的元素组成的集合,称集合 A 与 B 的**交集**,记为 $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$;由属于集合 A 或 B 的元素组成的集合,称集合 A 与 B 的**并集**,记为 $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$. 例如,$\mathrm{A}=\{1,3,5,6\}$, $\mathrm{B}=\{1,3,4,6\}$,$\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\{1,3,6\}$,$\mathrm{A}\cup\mathrm{B}=\{1,3,4,5,6\}$.

2. 区间

由数轴上的一段的所有点组成的集合称为**区间**. 区间按其长度分为有限区间和无穷区间. 设 a 与 b 是两个实数,且 $a<b$, 则具体区间的定义及表示法见表 1-1.

表 1-1

符　号	名　称		定　义
(a, b)	有限区间	开区间	$\{x \mid a<x<b\}$
$[a, b]$		闭区间	$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$
$(a, b]$		半开区间	$\{x \mid a<x\leqslant b\}$
$[a, b)$		半开区间	$\{x \mid a\leqslant x<b\}$
$(a, +\infty)$	无限区间	开区间	$\{x \mid a<x\}$
$[a, +\infty)$		闭区间	$\{x \mid a\leqslant x\}$
$(-\infty, a)$		开区间	$\{x \mid x<a\}$
$(-\infty, a]$		闭区间	$\{x \mid x\leqslant a\}$

a 与 b 称为区间的端点,$b-a$ 称为有限区间的长度.

3. 邻域

设 $a\in\mathbf{R}$, $\delta>0$,则数集 $\{x \mid |x-a|<\delta\}$ 称为 a 的 **δ 邻域**(图 1-1),记为

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta, a+\delta)$$

其中，a 称为邻域的**中心**；δ 称为邻域的**半径**.

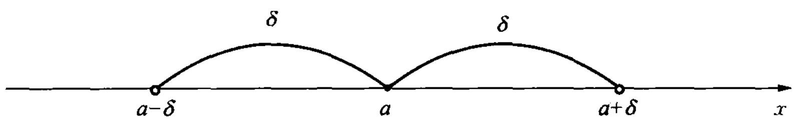

图 1－1

当不需要注明邻域的半径 δ 时，常把它表为 $U(a)$，简称 a 的**邻域**.

数集 $\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$ 表示在 a 的 δ 邻域 $U(a,\ \delta)$ 中去掉 a 的集合，称为 a 的 δ **去心邻域**，记为

$$\mathring{U}(a,\ \delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,\ a+\delta)-\{a\}$$

当不需要注明邻域半径 δ 时，常将它表为 $\mathring{U}(a)$，简称 a 的去心邻域.

例如，

$$U(3,\ 0.1)=(2.9,\ 3.1)\qquad U(-1,\ 0.1)=(-1.1,\ -0.9)$$
$$\mathring{U}(3,\ 0.1)=(2.9,\ 3)\cup(3,\ 3.1)$$
$$\mathring{U}(-1,\ 0.1)=(-1.1,\ -1)\cup(-1,\ -0.9)$$

1.1.2　函数概念

1. 函数定义

定义 1.1　设 A，B 都是非空的实数集(简称数集)．若对于集合 A 中的每一个数 x，按照某一确定的对应规则 f，都有集合 B 中唯一的数 y 与之对应，则称对应规则 f(或 y) 是定义在集合 A 上的**函数**，记为

$$f:A\rightarrow B\quad \text{或}\quad y=f(x)$$

集合 A(也记为 D_f) 称为函数的**定义域**，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**(或函数)．当 x 取 $x_0\in A$，与 x_0 对应的 y 值称为函数在点 x_0 处的**函数值**，记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$．全体函数值的集合 $f(A)=\{y \mid y=f(x),x\in D_f\}\subset B$，称为函数的**值域**．在对应规则 f，自变量 x，因变量 y，定义域 D_f，值域 $f(A)$ 五个要素中，对应规则 f，定义域 D_f 是两个重要的要素，称为函数的**二要素**．两个函数相等当且仅当对应规则和定义域都相同.

例 1.1　判断下列函数是否是相同的函数．为什么？

(1) $f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x$，$g(x)=\cos 2x$；

(2) $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=x$.

解　(1) $f(x)$ 的定义域是 $D_f=(-\infty,\ +\infty)$，$g(x)$ 的定义域是 $D_g=(-\infty,$

$+\infty)$，两函数定义域相同，并且对于 x 有 $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同的函数.

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$，但当 $x<0$ 时，$f(x)>0$，$g(x)<0$，因而它们的对应规则不同，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是相同的函数.

表示函数常用的方法有**解析法**（即**公式法**）、**图像法**、**表格法**三种，此外还有描述法，如狄利克雷(Dirichlet)函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时} \end{cases}$$

用解析法表示函数时，有时在其定义域的不同部分要用不同的式子来表达函数关系，这样的函数称为**分段函数**. 例如，绝对值函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

和符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

都是分段函数，如图 1-2 和图 1-3 所示.

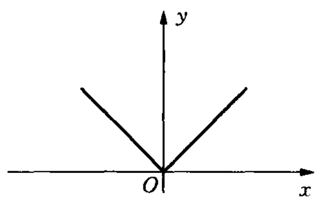

图 1-2

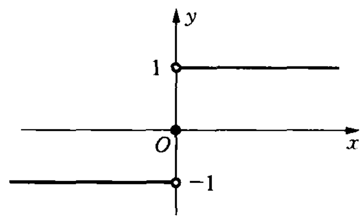

图 1-3

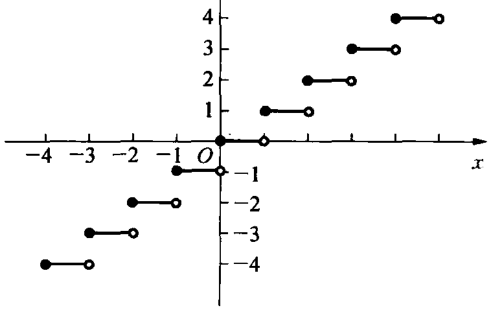

图 1-4

另外，取整函数

$$y = [x] = n,\ x \in [n, n+1)$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

也是分段函数，如图 1-4 所示. 例如，$[-\pi] = -4$，$[2.94] = 2$. 可见 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，显然有 $x \geqslant [x]$.

2. 函数的定义域

函数的定义域就是使函数有意义

自变量所取的一切实数值. 所谓函数有意义是指当函数是分式时,则要求分母不等于 0;函数是偶次根式时,则要求被开方式大于等于 0;函数是对数式时,则要求真数大于 0;函数是反三角函数式时,如 $y=\arcsin u$, $y=\arccos u$, 则要求 $|u|\leqslant 1$, 即 $-1\leqslant u\leqslant 1$ 等. 在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义确定的.

例 1.2　求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x^2+2x-8}}$;　　(2) $y=\sqrt{x-2}-\arcsin\dfrac{3}{x+1}$.

解　(1) 要使函数有意义,必须 $\begin{cases}x+1>0;\\x^2+2x-8>0,\end{cases}$ 即 $x>2$, 所以函数的定义域是 $(2,+\infty)$.

(2) 要使函数有意义,必须 $\begin{cases}x-2\geqslant 0;\\-1\leqslant\dfrac{3}{x+1}\leqslant 1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\geqslant 2;\\x\leqslant -4\text{ 或 }x\geqslant 2,\end{cases}$ 所以函数的定义域是 $[2,+\infty)$.

1.1.3　反函数　复合函数　初等函数

1. 反函数

定义 1.2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D_f,值域为 $f(A)$. 若对每个 $y\in f(A)$ 有唯一的 $x\in D_f$, 使得 $f(x)=y$, 于是,由 $y=f(x)$ 也确定了一个 $f(A)$ 到 D_f 的函数,称此函数是 $y=f(x)$ 的**反函数**,记为

$$f^{-1}: f(A)\rightarrow A\quad\text{或}\quad x=f^{-1}(y)$$

而函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

数学习惯上,常用 x 表示自变量, 用 y 表示因变量, 因此,常将反函数 $x=f^{-1}(y)$ 记为 $y=f^{-1}(x)$.

由反函数的定义知, $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 互为反函数,并且直接函数的定义域与值域分别是其反函数的值域与定义域.

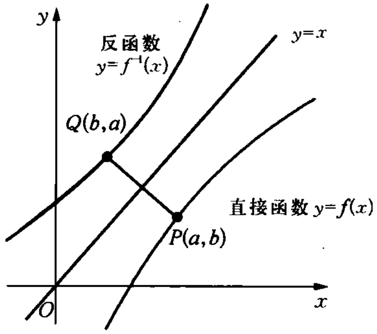

图 1 - 5

由于 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 表示了变量 x 与 y 之间的一一对应关系,因此它们的图形在同一坐标系中是同一曲线. 而 $y=f^{-1}(x)$ 是将反函数 $x=f^{-1}(y)$ 中的 x 与 y 互换后得到的,因此互为反函数 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的图形在同一个坐标系中关于直线 $y=x$ 对称(图 1 - 5),还有

如下定理.

定理 1.1 严格单调函数必存在反函数,且其反函数具有相同的严格单调性.

2. 复合函数

定义 1.3 设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f,值域为 W_f,函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 D_φ,值域为 W_φ. 如果 $W_\varphi \subset D_f$,则可将 $u = \varphi(x)$ 代入 $y = f(u)$ 中,得到一个新的函数

$$y = f[\varphi(x)]\ (x \in D_\varphi)$$

称该函数为函数 $f(u)$ 与 $\varphi(x)$ 的**复合函数**,通常记为 $f \circ \varphi$,称 u 为**中间变量**.

简言之,复合函数是函数的函数,有时也称 f 为**外函数**,φ 为**内函数**.

复合函数概念可以推广到两个及两个以上中间变量的情形. 例如,由函数

$$y = \mathrm{e}^u \qquad u = \sin v \qquad v = \sqrt{\omega} \qquad \omega = 1 + x^2 \tag{1.1}$$

构成的复合函数为

$$y = \mathrm{e}^{\sin\sqrt{1+x^2}}\ (x \in \mathbf{R}) \tag{1.2}$$

反之,将复合函数(1.2)分解,可以分拆成四个所谓"**成员函数**",即(1.1)中的四个函数.

3. 初等函数

在中学学习过的下列六类函数统称为基本初等函数,即常(数)函数 $y = C$、幂函数 $y = x^a$、指数函数 $y = a^x (a > 0$ 且 $a \neq 1,\ x \in \mathbf{R})$、对数函数 $y = \log_a x (a > 0$ 且 $a \neq 1,\ x > 0)$、三角函数及反三角函数,其中三角函数有正弦函数 $y = \sin x (x \in \mathbf{R})$、余弦函数 $y = \cos x (x \in \mathbf{R})$、正切函数 $y = \tan x \left(x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right)$、余切函数 $y = \cot x (x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z})$、正割函数 $y = \sec x \left(x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}\right)$ 及余割函数 $y = \csc x (x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z})$;反三角函数有反正弦函数 $y = \arcsin x (|x| \leqslant 1)$、反余弦函数 $y = \arccos x (|x| \leqslant 1)$、反正切函数 $y = \arctan x (x \in \mathbf{R})$及反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x (x \in \mathbf{R})$.

定义 1.4 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合构成的且可以用一个数学式子表示的函数,统称为**初等函数**.

例如,$y = \mathrm{e}^{\sin\sqrt{1+x^2}}$, $y = \sqrt{x-2} - \arcsin\dfrac{3}{x+1}$ 等都是初等函数.

初等函数是本书的主要研究对象. 不是初等函数的函数,称为**非初等函数**. 例如,狄利克雷函数 $D(x)$、符号函数 $\operatorname{sgn} x$ 及取整函数 $[x]$ 等都是非初等函数,还有后面学习中用积分、级数及微分方程定义的函数,也是非初等函数.

1.1.4　函数的初等性质

1. 有界函数

定义 1.5　设函数 $f(x)$ 在数集 A 有定义,若函数值的集合 $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$ 有界,即 $\exists M>0$("$\exists$"表示存在),使 $\forall x\in A$(这里,符号 $\forall$ 表示"对于任意给定的"的意义),有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 A 上是**有界函数**,否则称 $f(x)$ 在 A 上是**无界函数**.

例如,函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内是有界的,因为 $\forall x\in\mathbf{R}$,都有 $|\sin x|\leqslant 1$. 而函数 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 在$(0,2)$上是无界的,在$[1,\infty]$上是有界的.

2. 单调函数

定义 1.6　设函数 $f(x)$ 在数集 A 上有定义,若 $\forall x_1,x_2\in A$ 且 $x_1<x_2$,有 $f(x_1)<f(x_2)$($f(x_1)>f(x_2)$),则称函数 $f(x)$ 在 A 上**严格单调增加**(**严格单调减少**);上述不等式改为 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ ($f(x_1)\geqslant f(x_2)$),则称函数 $f(x)$在 A 上单调增加(单调减少).

例如,函数 $y=x^3$ 在$(-\infty,+\infty)$内是严格单调增加的;函数 $y=2x^2+1$ 在$(-\infty,0)$内是严格单调减少的,在$[0,+\infty)$内是严格单调增加的. 因此,在$(-\infty,+\infty)$内,$y=2x^2+1$ 不是单调函数.

3. 奇函数与偶函数

定义 1.7　设函数 $f(x)$定义在数集 A 上,若 $\forall x\in A$,有 $-x\in A$,且

$$f(-x)=-f(x)\ (f(-x)=f(x))$$

则称函数 $f(x)$ 是**奇函数**(**偶函数**).

由定义知:若点(x_0,y_0)在奇函数 $y=f(x)$ 的图像上,其中 $y_0=f(x_0)$,则$(-x_0,-y_0)$也在奇函数 $y=f(x)$ 的图像上. 于是奇函数的图像关于原点对称;同理可知,偶函数的图像关于 y 轴对称.

例如,函数 $y=x^2+1$, $y=\sqrt{a^2-x^2}$, $y=\cos x$ 等皆为偶函数;函数 $y=\tan x$, $y=x^3$, $y=x^2\sin x$ 等皆为奇函数.

4. 周期函数

定义 1.8 设函数 $f(x)$ 定义在数集 A 上，若 $\exists T>0$，$\forall x\in A$，有 $x\pm T\in A$，且 $f(x\pm T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，T 称为函数 $f(x)$ 的一个**周期**.

注意 若一个函数是周期函数，则周期不唯一；若 T 是函数 $f(x)$ 的周期，则 $2T$ 也是它的周期. 用归纳法不难证明，若 T 是函数 $f(x)$ 的周期，则 $nT(n\in\mathbf{N})$ 也是它的周期.

通常所说的周期是**最小正周期**. 周期函数不一定存在最小正周期. 若函数 $f(x)$ 有最小的正周期，通常称其为函数 $f(x)$ 的**基本周期**，简称为**周期**.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数. 常函数 $y=1$ 也是周期函数，任意正的实数都是它的周期，它没有最小正周期.

1.1.5 经济中常用的函数

在研究经济问题时，常把复杂的经济问题简化、抽象为函数关系，进而进行研究、分析和推算. 常用函数如下.

1. 需求函数

在经济学中，需求是指消费者既有支付能力又有愿望购买的某商品的数量. 消费者对某种商品的需求是由多种因素决定的，但商品的价格是影响需求的主要因素，还有许多其他因素，如消费者收入的增减、消费者的个人偏好等都会影响需求. 在此不考虑价格 P 以外的因素，仅把商品的价格 P 视为自便量，需求量 Q 视为因变量，则称函数 $Q=f(P)$ 为**需求函数**，其图形称为**需求曲线**.

根据实际意义，需求函数的定义域、值域都是非负的，且是单调减函数. 当 $P=0$ 时，可理解为商品免费供应，也即 $Q(0)$ 为该商品的**饱和需求量**.

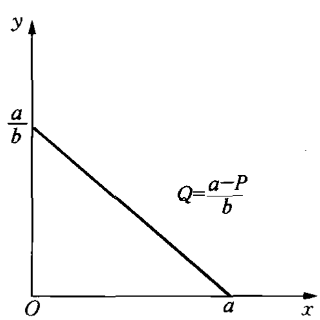

图 1 - 6

最常用的一类需求函数为线性函数 $Q=\dfrac{a-P}{b}$ $(a>0,\ b>0)$. 此线性函数的斜率为 $-\dfrac{1}{b}<0$. 当 $P=0$ 时，$Q=\dfrac{a}{b}$ 表示价格为 0 时，购买者对该商品的需求量，也是市场对该商品的饱和需求量. 当 $P=a$ 时，$Q=0$，表示当价格上涨到 a 时，已没有人购买该商品了(图 1 - 6).

2. 供给函数

需求是对消费者而言的，供给是对生产者而言的. 所谓供给就是指生产者以某种价格愿意出售并能出售的商品数量. 影响供给的因素也很多，但商品的价格是影响需求的主要因素. 假设在其他因素不变的条件下，仅把供给量 Q 视为价格 P 的函数 $Q = Q(P)$，称为供给函数. 其图形称为供给曲线，它是单调上升曲线(图 1－7).

最常用的一类供给函数为线性函数

$$Q = -d + cP \ (d > 0, c > 0)$$

点 $\left(\dfrac{d}{c}, 0\right)$ 的经济意义是：$\dfrac{d}{c}$ 是价格的最低限，只有当价格大于 $\dfrac{d}{c}$ 时，生产者才会供应商品(图 1－7).

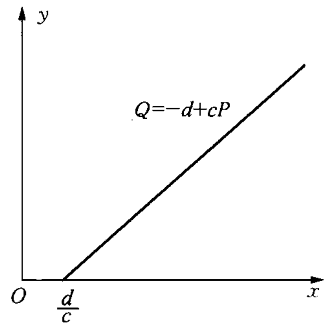

图 1－7

3. 成本函数

在某段时间内生产某产品所消耗的生产费用的总和称为总成本，记为 C. C 为产量 Q 的函数 $C = C(Q)$，称为**总成本函数**. 总成本函数中的产量 Q 和需求函数中的需求量 Q 有时是一致的.

总成本分成两类：一类是诸如厂房、设备等固定资产的折旧，管理者的固定工资等，不随商品量的变化而变化，称为**固定成本**，用 C_0 表示；另一类是诸如能源、原材料、劳动力的计件工资等，随商品产量的变化而变化，称为**可变成本**，用 $C_1(Q)$ 表示，其中 Q 表示产量. 总成本记为

$$C = C(Q) = C_0 + C_1(Q)$$

一般而言，总成本 C 随 Q 增加而单调增加. 常用的总成本函数有

$$C = aQ + b \qquad C = ae^{bQ} \qquad C = aQ^2 + bQ + c \ (a, b, c > 0)$$

平均成本是指总产量为 Q 时平均每单位产品的成本，因而它也是产量 Q 的函数，称为**平均成本函数**，记为

$$\bar{C} = \frac{C(Q)}{Q} = \frac{C_0}{C} + \frac{C_1(Q)}{C}$$

4. 收益函数

出售一定量产品所得的全部收入称为**总收益**，记为 R. 它是销售量 Q 的函数