CEKONG JISHU YU YIQI

测控技术与仪器专业 本科系列教材

数字信号处理

Shuzi Xinhao Chuli

郭永彩 廉飞宇 林晓钢 编著

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

数字信号处理

郭永彩　廉飞宇　林晓钢　编著

重庆大学出版社

内容简介

本书系统地阐述了数字信号处理的基本概念、基本原理、分析方法以及处理技术。全书共分5章，内容包括离散时间信号与系统的基本概念、时域分析、频域分析以及 Z 域分析；离散傅里叶变换及其快速算法，快速傅里叶变换的应用；信号的相关以及频谱分析；数字滤波器的基本概念、设计方法以及实现的网络结构。结合各章的重点和难点内容，配有例题和习题。

本书着重基础知识和理解深度，对各知识点的叙述严谨、简洁明了，强调理论与技术应用的结合。本书可作为普通高等院校信息工程、电子科学与技术、测控技术与仪器、生物医学工程、自动化、通信与信息处理等电子信息类专业本科生的教材，也可供从事数字信号及信息处理方面工作的教师和科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理/郭永彩，廉飞宇，林晓钢编著. —重庆：重庆大学出版社，2009.8

(测控技术与仪器专业本科系列教材)

ISBN 978-7-5624-5061-0

Ⅰ.数… Ⅱ.①郭…②廉…③林… Ⅲ.数字信号—信号处理—高等学校—教材 Ⅳ.TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第140970号

数字信号处理

郭永彩 廉飞宇 林晓钢 编著

责任编辑：彭 宁 文 鹏 版式设计：彭 宁

责任校对：夏 宇 责任印制：赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人：张鸽盛

社址：重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)内

邮编：400030

电话：(023) 65102378 65105781

传真：(023) 65103686 65105565

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆市远大印务有限公司印刷

*

开本：787×1092 1/16 印张：10.25 字数：256千

2009年8月第1版 2009年8月第1次印刷

印数：1—3 000

ISBN 978-7-5624-5061-0 定价：18.00元

前言

随着现代信息科学和计算机技术的进步,数字信号处理作为一门理论与技术应用密切结合的学科得到了飞速的发展和各个领域的广泛应用。数字信号处理的基础知识是信息工程、电子科学、通信工程等电子信息类专业必须掌握的专业基础知识和必修内容。为了满足教学中对数字信号处理教材的需求,同时结合学科发展带来的新技术与新应用,在参考国内外同类优秀教材的基础上编写了这本教材用书。

在编写本书的过程中,有一个清晰的指导思想和明确的用书定位,那就是用作大学本科生教材。基于这个出发点,本书力求具有以下几个特点:

(1)根据教学大纲的要求,在内容的组织安排上重点放在必须讲授的基础知识,同时不失课程内容的完整性。

(2)强调基本概念和基本理论,突出各章节的重难点内容。在对各知识点的叙述中,理论推导严谨,阐述简单明白易懂,既体现本课程理论性强的特点又感觉浅显易学。

(3)注意理论知识与实际应用的联系。数字信号处理是一门理论性和实践性都很强的课程。在编写时充分注意到这一特点。在论述理论知识点的同时讲述在实践应用中的实际考虑情况,并给出适当的例题。这不仅利于对理论知识的理解,同时增加了对知识运用的实感。

全书内容共分 5 章。

第 1 章概述了信号、系统、信号处理的基本概念,数字信号处理的发展历史和特点,数字信号处理的主要内容与关联关系以及数字信号处理技术的典型应用。

第 2 章论述离散时间信号与系统的基本理论,也是本课程的重点内容之一。首先讨论了离散时间信号的时域分析,主要是序列信号的描述以及典型序列介绍;重点讨论线性移不变离散时间系统的时域分析,内容包括线性移不变系统的定义,单位取样响应、卷积计算方法、系统的稳定性和因果性以及差分方程的数值解法;接着论述了离散时间信号与系统的变换域分析方法,包括频域分析和 Z 域分析,推导引入离散时间序列的傅里叶变换(DTFT),建立序列频谱和系统频率响应特性的概

念，强调物理意义的理解；作为数学工具将 Z 变换引入离散时间信号与系统的分析之中，重点是系统函数的应用；最后讨论了模拟信号的数字处理方法以及取样定理。

第 3 章讨论了离散傅里叶变换及其快速算法。这是数字信号处理的重要工具。本章以严谨的数学推导为基础，引入傅里叶变换的四种形式，给出定义和性质，重点放在快速算法（FFT）及其应用上面。讨论了 FFT 的算法依据，基本的时域抽取、频域抽取基 2 算法，其他的实用算法及其在计算线性卷积与线性相关中的应用。

第 4 章讨论相关与谱分析。频谱分析是数字信号处理的主要内容之一。本章主要讨论连续确知信号的频谱分析，首先介绍了频谱分析的原理并进行公式推导，重点分析误差来源、减少误差的措施以及参数的选择，接着讨论了离散时间序列以及周期信号的频谱分析方法，最后讨论了序列的相关分析、功率谱和能量谱分析。

第 5 章讨论数字滤波器的设计和实现结构。滤波器的设计和实现是数字信号处理的另一主要内容。首先概述了滤波器的概念以及分类，数字滤波器的一般设计步骤。重点描述了基于模拟原型滤波器的 IIR 数字滤波器的设计方法，描述了线性相位 FIR 滤波器的特点以及典型的两种设计方法：窗口法和频率取样法，最后讨论了 IIR 数字滤波器和 FIR 数字滤波器的基本网络结构。

本门课程的先修课程是信号与系统、程序设计、Matlab 语言等。教学参考时数为 45 ~ 50 学时。

本书由郭永彩主编。第 1 章及第 2 章、第 4 章由郭永彩编写，其中 2.4 节由郭春华编写；第 3 章由廉飞宇编写；第 5 章由林晓钢编写。

由于时间仓促和作者水平有限，书中难免存在问题和错误，殷切希望广大读者批评指正。

编　者

2009 年 6 月

目录

第 1 章 绪 论

1.1 数字信号处理的发展历史

数字信号处理是自 20 世纪 60 年代以来迅速发展的一门学科,它的发源最早可以追溯到 17 世纪。当时出现了有限差分方法、数值积分方法和数字内插方法,用以解决与连续变量和函数相关的物理问题。大约在 20 世纪 50 年代,随着大型数字计算机的出现,数字信号处理才开始真正兴起。最初的应用主要是对模拟信号处理方法的仿真。直到 20 世纪 60 年代,数字信号处理的理论才基本形成。1965 年,库利(J. W. Cooley)和图基(J. W. Tukey)提出了快速傅里叶变换(FFT),用于实现离散傅里叶变换(DFT)的快速计算;20 世纪 70 年代,大规模集成电路(LSI)以及芯片技术的发展进一步为数字信号处理的技术实现提供了硬件基础,极大地推动了数字信号处理理论的实际应用。从那时起,数字信号处理的理论和应用研究有了巨大的突破和长足的发展。

1.2 信号处理的基本概念和数字信号处理的特点

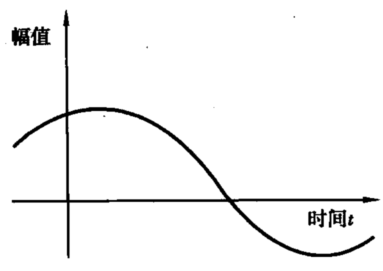
1.2.1 信号和信号处理的基本概念

(1)信号的概念

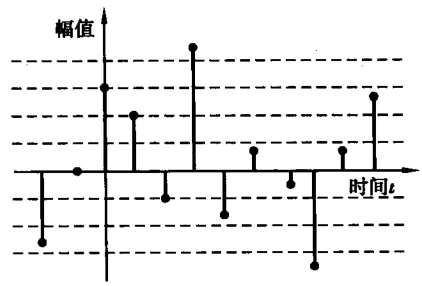
信号广泛存在于自然界和我们的日常生活中,比如我们听到的声音、看到的图片、感受到的温度和压力等。信号究竟怎么定义呢?所谓信号就是含有信息的载体。它可以是传载信号的函数,也可以是携带信息的任何物理量。信号可以是客观存在的,也可以是人为有目的产生的。根据载体的不同,信号可以是电的、磁的、光的、声的、机械的、热的等等。但在各种信号中,电信号是最便于传输、处理和重现的,因此也是应用最广泛的。许多非电信号如温度、压力都可通过适当的传感器变换成电信号,所以对电信号的研究具有普遍的意义。从数学上,信号都可以表示为独立自变量的函数。根据函数的不同特征,可对信号进行分类。根据函数自变

量个数为一个、二个或多个,可将信号分为一维信号、二维信号或多维信号;根据函数取值为确定值或随机取值,信号分为确知信号和随机信号。例如心电图、脑电图,就是随时间变化的一维自然信号,它反映了一个人心脏和大脑活动的信息,图像就是随空间变量变化的二维信号。在这里对信号的讨论限定为一维的确知电信号,即一维时间函数 $x(t)$。函数值也称为信号的幅度值,简称幅值。

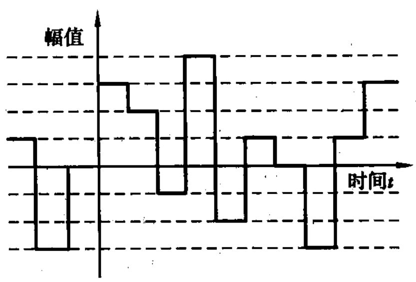
根据 $x(t)$ 的自变量及函数值是否连续可将信号分为 4 种形式,如图 1.1 所示。



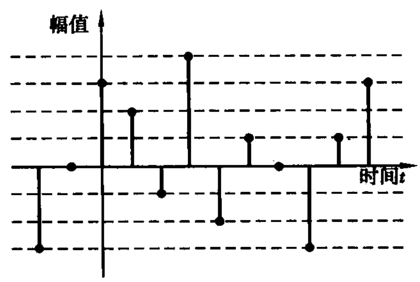
(a)模拟信号



(b)离散时间信号



(c)量化的阶梯信号



(d)数字信号

图 1.1

(a)模拟信号,也称连续时间信号。时间自变量 t 和表示信号的函数值 x 都是连续变化的,如图 1.1(a)所示。

(b)离散时间信号,也称抽样信号序列。时间自变量 t 取离散值 nT,而函数 x 是连续变化的,记为 $x(n)$,n 取整数,T 为时间间隔,如图 1.1(b)所示。

(c)量化的阶梯信号。时间自变量 t 连续,但幅值 x 取量化值,如图 1.1(c)所示。

(d)数字信号。自变量 t 和函数 x 均取离散值,数字信号就是幅值量化的离散时间信号,如图 1.1(d)所示。

(2)系统的概念

系统的定义是处理(或变换)信号的物理装置(或设备)。或者说,凡是对信号进行加工、变换达到预期目的的各种装置(或设备)都称为系统。一般将能够直接处理模拟信号、离散时间信号和数字信号的系统分别称为模拟系统、离散时间系统和数字系统。

模拟系统通常由电阻、电容、电感、半导体元件以及模拟集成电路等组成,系统的输入输出均为模拟信号。离散时间系统通常由电荷耦合器件以及开关电容组成,系统的输入输出均为离散时间信号。数字系统通常由数字逻辑电路以及各种单元电路组成,包括运算单元、存储单元、逻辑控制单元以及 CPU 等,系统的输入输出都是数字信号。

随着模数转换器的转换精度越来越高和计算机的字长不断增加,信号的幅度在量化过程中的误差越来越小。若忽略这些误差,数字信号就可以等同于离散时间信号,数字系统就可以等同于离散时间系统,从而实现对离散信号的数字化处理。

(3)信号处理的概念

信号处理是指用系统对信号进行某种加工变换的过程。数字信号处理就是用数字方式和手段对数字信号所进行的各种运算、加工、变换等过程。通常以 PC 机或专用 DSP 装置为硬件平台,以信号处理算法为工具,实现信号中有用信息的提取,达到认识信号、利用信号并将它用于实际的目的。从这个意义上讲,数字系统的定义应推广为对数字信号进行加工、变换和运算处理的硬件装置、软件程序以及二者的结合体。

1.2.2 数字信号处理的特点

数字信号处理的实质是用数值计算的方法在一定的程序或时序控制下完成对信号的各种运算。实现这一功能的数字系统类似于具有特定功能的专用计算机。与模拟信号处理相比,数字信号处理具有以下特点:

(1)处理精度高

在模拟系统中,信号处理的精度主要由系统元件决定,一般应用情况下要达到 10^{-3} 都较难,而且模拟电路的噪声、外部干扰以及环境温度等都会影响处理精度。数字系统中处理精度主要由字长决定,普通 17 位字长系统精度就可以达到 10^{-5}。

(2)可靠性强

数字系统中所有信号和参数都是用“0”、“1”表达,这两个数字电平受环境和噪声影响而导致电平状态改变的可能性较小,系统工作稳定。另一方面,各级数字系统之间是通过数据进行耦合和传递信号的,所以不存在模拟电路中的阻抗匹配问题。

(3)灵活性好

数字系统性能是由放在存储器的数据参数决定的,因此易于修改。改变存储器中数据参数内容,即可得到不同性能的数字系统,然而要改变模拟系统,必须改变构成系统的元器件,需要重新设计和制作,难度显然较大。

(4)易于大规模集成

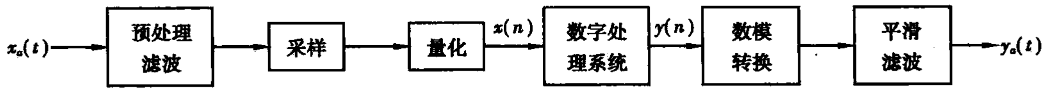
数字部件具有高度规范性,便于大规模集成和生产。由于电路参数的要求不高,故产品成品率高。相比复杂的模拟系统,数字系统体积小、成本低。随着大规模集成电路技术的发展,一个复杂的数字信号处理系统已可以集成在一个芯片上,即所谓的“片上系统”(System on Chip, SOC),它包括实现信号处理的主单元电路和辅助电路,是数字信号处理系统的一种新的实现方法。

1.3 数字信号处理的基本内容

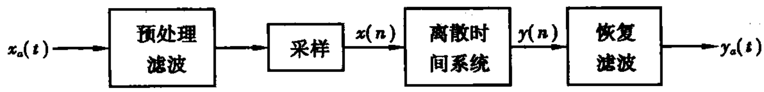
1.3.1 系统的基本组成

数字信号处理相对于模拟信号处理具有许多优点,因此在工程实际中人们经常希望针对

模拟信号也采用数字信号处理的技术来进行处理。这时，首先必须将模拟信号经过采样和量化编码形成数字信号，再用数字处理技术进行处理，如果需要，还可将处理结果转换成模拟信号。这种方法称为模拟信号的数字处理方法，其系统组成的基本原理框图如图 1.2 所示。



(a)实用框图



(b)理论框图

图 1.2　模拟信号的数字处理原理框图

在工程实际中，常将采样和量化编码两部分集成在一起，称为模数转换器，其功能是将模拟信号变换成数字信号。量化编码器的作用是将采样得到的每个信号样值变换成有限二进制编码。

随着计算机和专用数字处理系统的字长不断增加，模数转换器（A/D）和系统参数值的量化误差以及计算误差越来越小。如果忽略这些误差，经过采样得到的抽样信号可等同为经A/D转换后的数字信号，离散时间系统也等价于数字系统。

1.3.2　基本内容

数字信号处理是一门理论和应用密切结合的学科，它的内容包括基本理论、算法和技术实现三方面，三者密不可分。数字信号处理的学科概貌如图 1.3 所示。

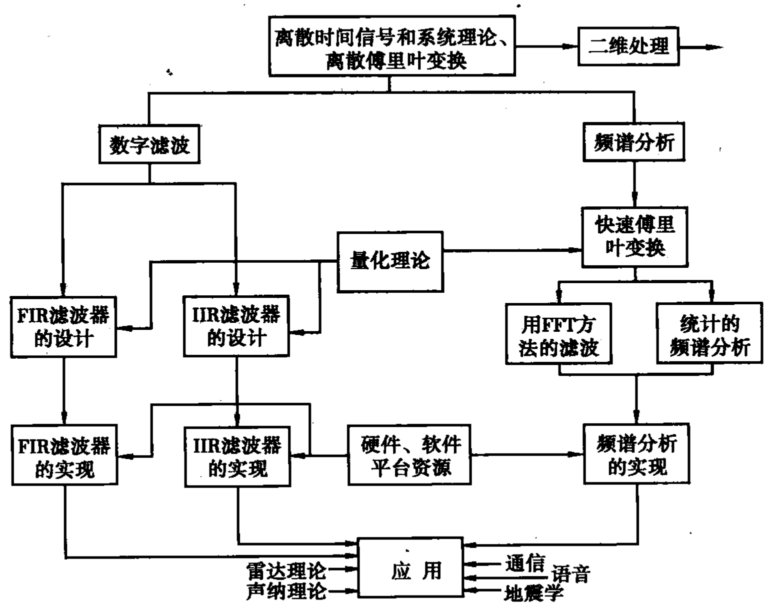


图 1.3　数字信号处理的学科概貌

离散时间信号、线性移不变（LTI）系统理论和离散傅里叶变换（DFT）是数字信号处理的

理论基础,而数字滤波和数字频谱分析是数字信号处理的两个基本的学科分支。数字滤波领域则分为无限长单位冲激响应(IIR)数字滤波器和有限长单位冲激响应(FIR)数字滤波器两部分内容,包括它们的数学逼近问题、综合问题(包括选择滤波器结构及选择运算字长)以及具体的硬件或计算机软件实现问题。频谱分析包括两部分内容:①确定信号的频谱分析,这可采用离散傅里叶变换(DFT)法来进行分析,或者对于较复杂的情况,可采用线性调频 Z 变换(CZT)。②随机信号的频谱分析,这就是统计的谱分析方法。实际谱分析技术中都要用到快速傅里叶变换(FFT)和一些快速卷积算法。FFT 且可用来实现 FIR 数字滤波运算,而统计频谱分析法又可用来研究数字信号处理系统的量化噪声效应。二维和多维信号处理则是新发展的领域。

本课程作为大学本科生的一门专业基础课程,所学的内容为限于现代信号处理理论和专门技术的基础部分。随着电子技术、计算机和超大规模集成电路技术,以及信息技术的飞速发展,信号处理的理论也在不断地丰富与完善,各种新理论和新算法不断出现。应当注意,把一个好的信号处理理论应用于工程实际,需要相应的算法使信号处理灵活高效,并使实现系统简单易行。所以除了基础理论,数字信号处理的算法及其实现技术也是极其重要的研究内容。

1.4 数字信号处理技术的应用

数字信号处理应用十分广泛。在日常生活中,我们经常无意识地遇到大量数字信号处理的应用。由于篇幅限制,这里简单列举以下几个方面的应用。

(1)通信工程中的信号变换处理

通信技术实际上就是信号的传输与处理技术。通信系统的基本功能由放大、衰减、滤波、均衡、调制解调、多路复用、同步与变换等构成。以前这些功能都是用模拟电路实现,目前越来越多地被数字电路所代替。而且在编码调制、信号的加解密、频分复用与时分复用的转换以及在通信网络的控制与切换、通信系统的性能测试等方面也都使用了数字信号处理技术。

(2)语音信号处理

在目前的语音信号处理中,语音信号的压缩、语音的分析与合成、语音的检测与识别以及语言理解,都是通过数字处理系统和技术来实现的。

在混音阶段用到了不同类型的信号处理技术,有些用来修改声音信号的频谱特性并加入特殊效果,还有些用来增强传输媒质的质量。典型的应用是均衡器和滤波器。不同类型的滤波器用来修改录音的频率响应或监测信息。这样的滤波器称为斜坡滤波器,它在声音频率范围的低端或者高端提供增强(上升)或切断(下降)的频率响应,而不影响声音谱其余范围的频率响应。典型的均衡器由一个低频斜坡滤波器、一个高频斜坡滤波器和三个或更多参数可调(在整个音频频谱范围内对均衡器频率响应进行调整)的峰化滤波器级联组成。在参数均衡器中,其滤波组的每个参数可以独立变化,而不影响其他均衡滤波器的参数。

(3)图像信号处理

人类由视觉获得的信息量约占由五官获得的信息总量的 70% 以上,信息量大,而且包含着多维空间信息,这些都决定了图像处理的复杂性。但是,由于采用了迅速发展的数字信号处理技术,图像信息的传输(通信)和处理(图像增强、识别、压缩、复原等)技术有了显著的进展,

是近年来发展比较迅速的一个领域。目前,在国民经济各部门,如空间技术、遥感技术、地形勘测、机械操作自动监测等很多方面都已得到广泛应用。

(4)生物医学信息处理

数字信号处理技术在生物医学及诊断方面的应用也是很有效的。例如通过对反映生物电活动的心电信号、脑电信号、肌电信号的处理,提取信号的数字特征,可及早发现一些用常规方法难以判断的疾病等。另外,如 X 射线计算机断层(CT)技术,血像、血球、肿瘤的识别以及疑难疾患的诊断等也不断取得新的成果。

(5)电子仪器数字化

目前,越来越多的电子仪器利用了数字信号处理技术,例如数字信号源、数字万用表、数字示波器、数字频谱分析仪等。这些仪器都具有高精度、高稳定度、低功耗、小体积以及可编程控制等特点。此外,利用数字处理技术做成信号分析系统,可以计算并显示被测信号的各种参量,如相关函数、功率谱参数等。目前广泛应用的各种自动测试系统,就是仪器与数字信号处理技术相结合的产物。

除上述应用外,在雷达与声纳、自动控制、地球与核物理、地震与振动等技术领域,数字信号处理技术也都得到了广泛的应用。总之,凡是需要对信号进行处理或控制的一切领域都会从数字信号处理技术中得到巨大的帮助。因此,数字信号处理是一个极富生命力的新兴学科。

第 2 章

离散时间信号与系统

数字信号处理所研究的信号基本上都是离散时间信号，处理这类信号的系统称为离散时间系统。它们与真正的数字信号和数字系统之间的差别在绪论中已说明。本章作为数字信号处理的基础，主要讨论离散时间信号与系统的描述、形式和分析方法。而且讨论将从时域、频域以及 Z 域展开，从三个不同角度和层面分析离散时间信号和系统。对离散时间系统重点讨论最经典常用的线性移不变(LTI)系统。

2.1 离散时间信号的时域分析

2.1.1 离散时间信号——序列

一个时间信号表示为 $x(t)$，其自变量时间 t 取等间隔离散值$(\cdots,-T,0,T,2T,\cdots,nT,\cdots)$后得到的结果为$(\cdots,x(-T),x(0),x(T),x(2T),\cdots,x(nT),\cdots)$，这里 n 取整数，称为离散时间信号。此时信号是由一串大小不等的数值序列构成，故又称序列，简记为 $x(n)$。

序列 $x(n)$ 可以从连续信号 $x_a(t)$ 经抽样而得到，即 $x(n)=x_a(t)\mid_{t=nT}$，其中 T 为抽样时间间隔。另一方面，$x(n)$ 也可以本来就是序列信号。

序列 $x(n)$ 随 n 的变化规律可以用公式表示，也可以用图形表示，或者用一组离散数据的集合表示。

2.1.2 常用的典型序列

最常见的典型序列有单位取样序列、单位阶跃序列、矩形序列、正弦序列以及复指数序列。它们在数字信号处理中扮演的角色和所起的作用与模拟信号处理中的单位冲激信号、单位阶跃信号、矩形信号、正弦信号相当。下面分别给出这些典型序列的定义。

(1) 单位取样序列

单位取样序列又称为单位脉冲序列，其定义如下：

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \tag{2.1.1}$$

它的图形如图 2.1.1 所示。除 $n=0$ 时序列幅值取 1 外,其余各点处的序列值均为零。

(2) **单位阶跃序列**

单位阶跃序列定义为:

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \tag{2.1.2}$$

单位阶跃序列的图形如图 2.1.2 所示,它类似于模拟信号中的单位阶跃信号 $u(t)$,通常用来模拟电源信号的接通过程。$\delta(n)$ 与 $u(n)$ 之间关系如下:$\delta(n)$ 是 $u(n)$ 的一次差分,$u(n)$ 是 $\delta(n)$ 的求和运算,即:

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1),u(n) = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta(m) \tag{2.1.3}$$

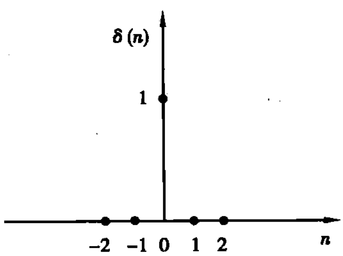


图 2.1.1　单位取样序列

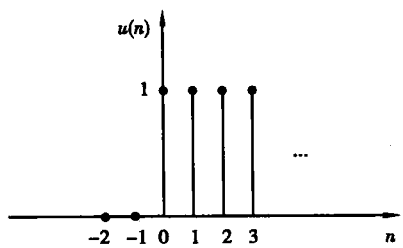


图 2.1.2　单位阶跃序列

(3) **矩形序列**

矩形序列定义为:

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \tag{2.1.4}$$

式中 N 为矩形序列的长度,其波形如图 2.1.3 所示。矩形序列可用阶跃序列表示如下:

$$R_N(n) = u(n) - u(n-N) \tag{2.1.5}$$

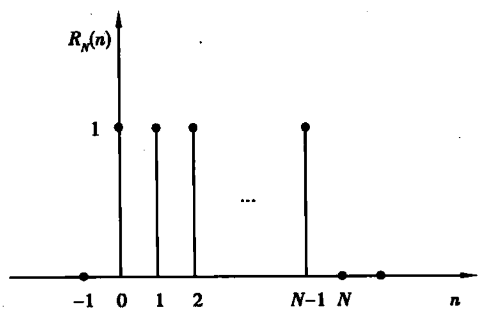


图 2.1.3　矩形序列

(4) **指数序列和正弦序列**

指数序列和正弦序列是另外两种重要的离散时间序列,其中指数序列定义为:

$$f(n) = a^n \tag{2.1.6}$$

这里 a 为常数。当 a 为实常数时,称为实指数序列;当 a 为复常数时,称为复指数序列。

对实指数序列,$|a|>1$,序列值随 n 指数增加;$|a|<1$,序列值则随 n 指数下降,如图2.1.4所示。另外,若 a 是正值的话,则 a^n 的所有值都具有同一符号;而当 a 为负值时,则 $f(n)$ 值的符号交替变化。同时也注意到,若 $a=1$,$f(n)$ 就是一个常数;而当 $a=-1$ 时,$f(n)$ 的值就在 $+1$ 和 -1 之间交替改变。

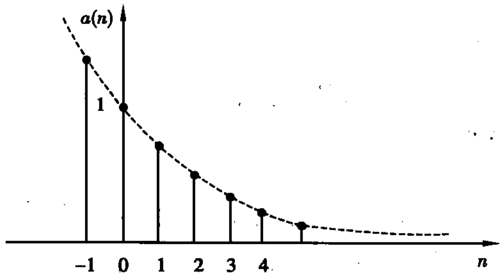


图2.1.4 实指数系列波形图

当式(2.1.6)中的 a 取 $re^{j\omega}$ 时:

$$f(n) = (re^{j\omega})^n = r^n e^{j\omega n} \tag{2.1.7}$$

其中 r、ω 为实数。特别是当 $r=1$ 时,可得到另一个重要的复指数序列:

$$f(n) = e^{j\omega n} \tag{2.1.8}$$

通过欧拉公式展开可得:

$$f(n) = \cos \omega n + \mathrm{j} \sin \omega n \tag{2.1.9}$$

通常情况下,我们把这两种形式的序列统称为复正弦序列,ω 称为数字频率,单位为弧度。该序列在数字信号处理中有着重要的应用,是离散时间信号作傅里叶变换的基函数序列,在下一章的讨论中还会经常用到它。

2.1.3 序列的周期性

设 $x(n)$ 为任意一个序列,如果对所有的 n 存在一个最小正整数 N,使下面等式成立:

$$x(n) = x(n+N), \quad -\infty < n < +\infty \tag{2.1.10}$$

则称序列 $x(n)$ 为周期序列,且周期为 N。下面讨论一般正弦序列的周期性。

设
$$x(n) = A\sin(\omega n + \varphi)$$
那么
$$x(n+N) = A\sin(\omega(n+N)+\varphi) = A\sin(\omega n + \omega N + \varphi)$$

若要满足 $x(n+N)=x(n)$,则要求 $N=\frac{2\pi}{\omega}k$,式中 k 与 N 均取整数,且 k 的取值要保证 N 是最小的正整数,满足这些条件,正弦序列才是以 N 为周期的周期序列。

具体有以下3种情况:

①当 $\frac{2\pi}{\omega}=N$ 为最小正整数(此时 $k=1$)时,正弦序列 $x(n)$ 是周期序列,周期为 N。

②当 $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{P}{Q}$ 为有理数时,P、Q 为互素的整数,此时要使 $N=\frac{2\pi}{\omega}k=\frac{P}{Q}k$ 为最小正整数,只有 $k=Q$,此时正弦序列 $x(n)$ 是以 P 为周期的周期序列,且周期 $N=P>\frac{2\pi}{\omega}$。

③当 $\frac{2\pi}{\omega}$ 是无理数时,任何整数 k 都不能使 N 为正整数,因此,此时的正弦序列 $x(n)$ 不是