OLYMPIC TEST PAPERS OF MATHEMATICS IN STORAGE

数学奥林匹克题库

KEY TO TEST PAPERS OF MATH COMPETITIONS OF HIGH SCHOOL STUDENTS OF CANADA

加拿大中学生数学竞赛题解

新蕾出版社

OLYMPIC TEST PAPERS OF
MATHEMATICS IN STORAGE
数学奥林匹克题库

KEY TO TEST PAPERS OF MATH
COMPETITIONS OF HIGH SCHOOL
STUDENTS OF CANADA

加拿大中学生数学竞赛题解

数学奥林匹克题库编译小组

新 蕾 出 版 社

〔津〕新登字(90)004号

责任编辑：韩凤岐

数学奥林匹克题库

加拿大中学生数学竞赛题解

数学奥林匹克题库编译小组

*

新蕾出版社 出版

天津新华印刷一厂印刷

新华书店天津发行所发行

开本850×1168毫米 1/32 印张7.5 插页1 字数175,000

1992年6月第1版 1992年6月第1次印刷

印数：1－5,000

ISBN 7-5307-0978-x/G·497(儿)

定 价：3.05元

前　言

奥林匹克运动作为一种运动，是力量、灵活与美的竞赛；数学奥林匹克作为一种数学竞赛，也是数学上的力量、灵活与美的竞争。

1985年，我国首次派两名高中学生参加国际数学奥林匹克(IMO)这个世界上规模和影响最大的学科竞赛，获得一枚铜牌；1986年，我国派出六名学生组成的代表队，获金牌三枚，银牌和铜牌各一枚；1987年，获金牌、银牌和铜牌各两枚；1988年，获金牌两枚，银牌四枚，总分第二；1989年，获金牌四枚，银牌两枚，总分高居第一，这是亚洲国家第一次获得这项冠军。1990年IMO在我国首都举行。这也是第一次在亚洲国家举行IMO。这些令人瞩目的成绩，一系列振奋人心的消息，激励着我们每个数学工作者和中学生，也将为增强与世界各国人民的友谊，促进我国科学与教育事业的发展，提高民族自信心起到促进作用。

数学奥林匹克越来越成为中学生课外生活中有强大吸引力的活动，我国各地数学奥林匹克学校纷纷建立，各中学校数学课外小组活跃异常，许多还是小学生、初中生就跃跃欲试，渴望以数学竞赛的优异成绩冲向全中国，走向全世界。

在国内，数学竞赛有：华罗庚金杯少年数学邀请赛；全国初中数学联赛；全国高中数学联赛；全国中学生数学冬令营等。在国际上，有国际数学奥林匹克；还有苏联、美国、罗马尼亚、匈牙利等国的数学竞赛。许多数学工作者，学生都想了解竞赛，了解竞赛的试题，知道这些题如何去解。《数学奥林匹克题库》正

是应这方面的需求出版的。

《数学奥林匹克题库》汇集了国内外重大数学竞赛的试题和解答。这些竞赛试题构思独特，新颖别致，灵活深邃，内容广，内涵深。解这些题，不仅需较扎实的基础知识和基本技能，也需要灵活的思维和坚强的毅力。因此，常以竞赛题进行训练，就可较快地提高数学水平，对于那些有志于参加数学竞赛的中学生来说，作竞赛题更是不可少的训练环节。

《数学奥林匹克题库》为全国的中学数学教师服务，为全国的数学爱好者服务，为全国的数学奥林匹克服务，为各中学的数学课外小组服务，为支持子女学好数学的家长服务，为一切关心数学奥林匹克运动的人士服务。

目　　录

关于加拿大中学生数学竞赛……………………………………（1）

加拿大中学生数学竞赛试题及解答……………………（试题）（答案）

第一届（1969年）……………………………………（5）（27）

第二届（1970年）……………………………………（6）（33）

第三届（1971年）……………………………………（7）（36）

第四届（1972年）……………………………………（8）（40）

第五届（1973年）……………………………………（10）（44）

第六届（1974年）……………………………………（11）（47）

第七届（1975年）……………………………………（13）（54）

第八届（1976年）……………………………………（14）（58）

第九届（1977年）……………………………………（15）（61）

第十届（1978年）……………………………………（16）（64）

第十二届（1980年）…………………………………（17）（69）

第十三届（1981年）…………………………………（18）（73）

第十四届（1982年）…………………………………（18）（76）

第十五届（1983年）…………………………………（19）（82）

第十六届（1984年）…………………………………（20）（85）

第十七届（1985年）…………………………………（21）（88）

第十八届（1986年）…………………………………（21）（93）

第十九届（1987年）…………………………………（22）（98）

第二十届（1988年）…………………………………（23）（103）

第二十一届（1989年）………………………………（24）（107）

第二十二届（1990年）…………………………（24）（110）
第二十三届（1991年）…………………………（25）（114）
附录：加拿大为参加国际数学奥林匹克准备的训练题（1988年，1989年，1991年）…………………………（116）
代数…………………………（116）
不等式…………………………（146）
数论…………………………（164）
几何…………………………（177）
组合及其它…………………………（207）

TABLB OF CONTENTS

On Math Competitions of Canadian High School Students .... (1)

Tests and Key Answers of Mathematics of Canadian High School Students .... (Test)(Key)

1st (1969)	(5)	(27)
2nd (1970)	(6)	(33)
3rd (1971)	(7)	(36)
4th (1972)	(8)	(40)
5th (1973)	(10)	(44)
6th (1974)	(11)	(47)
7th (1975)	(13)	(54)
8th (1976)	(14)	(58)
9th (1977)	(15)	(61)
10th(1978)	(16)	(64)
12nd(1980)	(17)	(69)
13rd(1981)	(18)	(73)
14th(1982)	(18)	(76)
15th(1983)	(19)	(82)
16th(1984)	(20)	(85)
17th(1985)	(21)	(88)
18th(1986)	(21)	(93)
19th(1987)	(22)	(98)

20th (1988) .... (23) (103)
21st (1989) .... (24) (107)
22nd (1990) .... (24) (110)
23rd (1991) .... (25) (114)
Appendix: Exersises Prepared by Canada for the Participation of International Olympic Mathematics Contest for 1988, 1989 and 1991. ...... (116)
Algebra .... (116)
Inequality .... (146)
Mathematics Grounds .... (164)
Geometry .... (177)
Combination and Others .... (207)

关于加拿大中学生数学竞赛

加拿大中学生数学竞赛是从1969年开始的，每年举行一次，到1991年已举办了二十三届，前四届每次竞赛有十个题目，后来减至七、八个题目，从第十二届以后，每届都是五个题目，与美国中学生数学奥林匹克的题目情况类似．本书收集了加拿大中学生数学竞赛从第一届至第二十三届的试题和解答（1979年举办的第十一届暂时空缺）．

加拿大从1981年开始参加国际中学生数学奥林匹克，他们的总成绩多在第10名至第20名之间，最好的是第7名．为了备战国际中学生数学奥林匹克，他们每年都为选手们准备了一定数量的训练题，本书作为附录将1988、1989、1991年的训练题分类整理，供大家参考．

加拿大中学生数学竞赛试题及解答

试 题 部 分

第 一 届（1969年）

1．证明：如果$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$并且$P_1$、$P_2$、$P_3$不全为零，那么对每个正整数$n$，有$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^n=\frac{P_1a_1{}^n+P_2a_2{}^n+P_3a_3{}^n}{P_1b_1{}^n+P_2b_2{}^n+P_3b_3{}^n}$。

2．已知数c大于1．求证两数$\sqrt{c+1}-\sqrt{c}$，$\sqrt{c}-\sqrt{c-1}$的一个总是大于另一个。

3．设c是直角三角形斜边的长，另两边的长是a和b，求证$a+b\leqslant\sqrt{2}\,c$．等式什么时候成立？

4．设ABC是等边三角形，P是三角形内任意点，作三角形三边的垂线PD、PE、PF，D、E、F是垂足，试证不管P在哪里，总有$\frac{PD+PE+PF}{AB+BC+CA}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$。

5．设ABC是边长为a、b、c的三角形，角C的平分线交AB于D．求证CD的长是$\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$。

6．求$1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\cdots+(n-1)(n-1)!+n\cdot n!$的和，这里$n!=n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1$。

7．求证方程$a^2+b^2-8c=6$无整数解。

8．设f是具有下列性质的函数：

（1）$f(n)$对每个正整数n有定义；

（2）$f(n)$是整数；（3）$f(2)=2$；

（4）$f(m\cdot n)=f(m)\cdot f(n)$对一切$m$和$n$；

（5）$f(m)>f(n)$，当$m>n$时。

试证：$f(n)=n$。

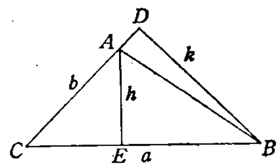
9. 证明半径为1的圆内接四边形最短边不大于$\sqrt{2}$。

10. 设ABC是等腰直角三角形，它的腰长是1，P是斜边AB上一点，由P到其它两边的垂线足是Q和R，考虑三角形APQ和PBR的面积，以及矩形$QCRP$的面积，证明无论P怎样选取，这三个面积中最大的至少是2/9。

第二届（1970年）

1. 求所有三数组(x, y, z)，使得其中任何一数加上其它两数的积，结果都是2。

2. 已知$\triangle ABC$有钝角A和高线长h及k如图示，证明$a+h\geqslant b+k$，并求在何时等号成立。



3. 已知一组球，每个球染成红色或蓝色，每色至少有一个球，每个球重1磅或2磅，每种重量至少有一个球，证明有两个球具有不同的重量和不同的颜色。

4.（1）求一切正整数，它的首位码是6，去掉这个6，所成整数是原整数的$\frac{1}{25}$。

（2）证明没有这样的整数，去掉它的第一个数码6所得结果是原整数的$\frac{1}{35}$。

5．一个四边形在边长为 1 的正方形各边上各有一点，证明四边形的边长a、b、c、d满足不等式$2\leqslant a^2+b^2+c^2+d^2\leqslant 4$．

6．已知三个不共线的点A、B、C，以C为中心作圆，使得由A和B到圆的切线是平行的．

7．证明：由不必相异的五个整数一定可选取其中三个整数，其和能被 3 整除．

8．考虑一端在直线$y=x$上，另一端在直线$y=2x$上，而其长为 4 的一切直线段，求这些线段中点轨迹的方程．

9．设$f(n)$是数列

0，1，1，2，2，3，3，4，4，5，5，6，6，…

前n项的和．

（1）给出$f(n)$的公式．

（2）证明$f(s+t)-f(s-t)=st$，其中s和t是正整数，并且$s>t$．

10．已知有整系数a_1，a_2，…，a_n的多项式．

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

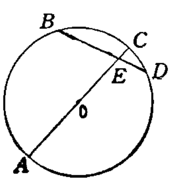
又已知存在四个不同的整数a，b，c，d，使得

$$f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=5,$$

证明没有整数k，使得$f(k)=8$．

第 三 届（1971年）

1．DEB是圆的弦，$DE=3$，$EB=5$．设O是圆心，连结OE且延长交圆于C（如图）．已知$EC=1$．求圆的半径．



2．设x和y是正实数，且$x+y=1$，证明

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geqslant 9.$$

3．$ABCD$是四边形，$AD=BC$。如果$\angle ADC>\angle BCD$，证明$AC>BD$。

4．确定一切实数a使两个多项式x^2+ax+1和x^2+x+a至少有一个公共根。

5．设$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，其中系数$a_i$是整数.如果$P(0)$和$P(1)$都是奇数，证明$P(x)$没有整数根。

6．证明：对一切整数n，$n^2+2n+12$不是121的倍数。

7．设n是五位数(第一位数码不是零)，m是由n取消它的中间一位数码后所成的四位数.试确定一切n使得n/m是整数。

8．正五边形内接于半径为r的圆，P是五边形内任意点，由P作垂线到各边或其延长线上。

（1）证明这些垂线长的和是常数。

（2）用半径r表示这个常数。

9．长h和k的两根旗杆竖在水平面上，相隔$2a$单位，求平面上对杆顶仰角相等的一切点的集合。

10．假定n个人各恰好知道一个消息，而所有n个消息都不相同.每次“A”打电话给“B”，“A”都把所知道的一切告诉“B”，而“B”却不告诉“A”什么消息.为了使各人都知道一切消息，求所有需要两人之间通话的最少次数.证明你的答案是正确的。

第四届（1972年）

1．给定三个单位圆，两两相切，求切于所有这三个圆的半径。

2．设a_1，a_2，…，a_n是非负实数，定义M为一切乘积$a_ia_j(i<j)$的和，即

$$M=a_1(a_2+a_3+\cdots+a_n)+a_2(a_3+a_4+\cdots+a_n)+\cdots+a_{n-1}a_n$$