数学分析

第三册

（試用教材）

华中师范学院数学系

一九七三年三月

目　录

毛主席語录

客观現实世界的变化运动永远沒有完結，人們在实践中对于眞理的认識也就永远沒有完結。马克思列宁主义幷沒有結束眞理，而是在实践中不断地开辟认識眞理的道路。

第九章　曲线积分与曲面积分

曲线积分和曲面积分，同定积分和重积分一样，是由实际的需要而产生的．计算物质曲线的质量，求变力沿曲线所作的功，要用到曲线积分；计算物质曲面的质量，求流体流过曲面的流量．要用到曲面积分．曲线积分和曲面积分在流体力学和电磁理论方面有着重要应用．

第一节　曲　綫　积　分

曲线积分有两种类型：第一型曲线积分与第二型曲线积分．

一、第一型曲綫积分

我们从计算物质曲线质量引出第一型曲线积分．

例1　物质曲线的质量

在精密的生产过程和科学试验中，有时需要计算物质曲线（如金属絲线）的质量．设有一平面的物质曲线 (C)，其线密度为 $\rho(x,y)$，试求物质曲线 (C) 的质量 m（图9-1）．

解　如果$\rho(x,y)=\rho$是一常量，那末物质曲线(C)的质量就等于物质曲线(C)的长度与密度ρ的乘积．如果$\rho(x,y)$不是常量，那末我们可以把物质曲线(C)分成n小段，而在每一小段上把$\rho(x,y)$近似地看作是不变的，今考虑其中的某一段Δs_k，其长度也记为Δs_k．在Δs_k上任取一点$P_k(\xi_k,\eta_k)$，并把Δs_k上各点的密度看成等于点P_k的密度$\rho(\xi_k,\eta_k)$．于是Δs_k的质量就近似地等于$\rho(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$，而物质曲线$(C)$的质量

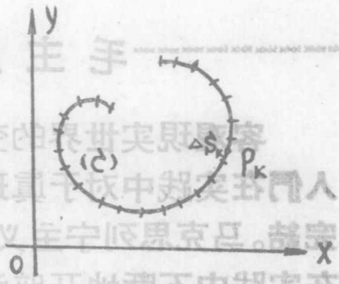

图 9-1

$$m\approx\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k$$

当各弧段中最长者趋于零时，我们就得到物质曲线(C)的质量

$$m=\lim_{max(\Delta s_k)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k.$$

上述类型的和式的极限，在计算物质曲线的重心、转动惯量以及计算某些柱面的侧面积时也碰到．我们抽去其具体意义，引出一般的概念．

定义　设平面上有一逐段光滑* 曲线(C)，$f(x,y)$为(C)上的连续函数．将(C)任意分成n个小弧段$\Delta s_k(k=1,2,\cdots n)$，其长度也记为$\Delta s_k$．在每一小弧段$\Delta s_k$上任取一点$P_k(\xi_k,\eta_k)$．作和式

---

* 所谓逐段光滑曲线是指由有限条光滑弧段所连成的曲线，其中每一弧段，可用参变式$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$表示，$\varphi'(t)$，$\psi'_{(t)}$连续并且至少有一个不等于零．以后，我们总假定曲线积分的路线是逐段光滑的．

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k.$$

如果不论小段怎样划分及点 P_k 怎样取法，上面的和式当各小段中最长者趋于零时，即 $max(\Delta s_k) \to 0$ 有极限存在，那末这极限就称为函数 $f(x,y)$ 沿曲线 (C) 的第一型曲线积分或对弧长的曲线积分，记作

$$\int_{(C)} f(x,y) ds = \lim_{max(\Delta s_k) \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k.$$

根据上述定义，例1中物质曲线 (C) 的质量可表示为

$$m = \int_{(C)} \rho(x,y) ds.$$

如果 (C) 是空间的逐段光滑曲线，$f(x,y,z)$ 是 (C) 上的连续函数，则同样可定义空间曲线上的第一型曲线积分：

$$\int_{(C)} f(x,y,z) ds = \lim_{max(\Delta s_k) \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta s_k.$$

下面说明第一型曲线积分的计算法.

当积分路线的方程为已知时，第一型曲线积分可化成定积分计算.

如果曲线 (C) 的方程是：

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

则

$$\int_{(C)} f(x,y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

事实上，若将区间分为

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta,$$

并设 Δs_k 为对应区间 $[t_{k-1}, t_k]$ 上的一段弧长，τ_k 为 区 间 $[t_{k-1}, t_k]$ 上的任一点．根据第一型曲线积分定义，有

$$\int_{(C)} f(x,y)\,ds = \lim_{max(\Delta s_k)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)]\Delta s_k.$$

由弧长的表达式及积分中值公式：

$$\Delta s_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$$
$$= \sqrt{\varphi'^2(\tau_k^*)+\psi'^2(\tau_k^*)}\,\Delta t_k,$$

其中 $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$，$\tau_k^*$ 为 $[t_{k-1}, t_k]$ 上的某一点．显然，当 $max(\Delta s_k)\to 0$ 时，有 $max(\Delta t_k)\to 0$．于是

$$\int_{(C)} f(x,y)\,ds =$$

$$= \lim_{max(\Delta t_k)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)]\cdot\sqrt{\varphi'^2(\tau_k^*)+\psi'^2(\tau_k^*)}\,\Delta t_k.$$

由于 τ_k 与 τ_k^* 不一致，等式右端的和数不是积分和数，因此不能马上取极限得出结果．但是可按下面方法处理：

$$\int_{(C)} f(x,y)\,ds =$$

$$= \lim_{max(\Delta t_k)\to 0} \left\{ \sum_{k=1}^{n} f[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)]\cdot\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\tau_k)}\,\Delta t_k + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \eta_k \Delta t_k, \right\}$$

其中

$$\eta_k = f[\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)]\cdot[\sqrt{\varphi'^2(\tau_k^*)+\psi'^2(\tau_k^*)} -$$

$$-\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\tau_k)}].$$

因为有“三角不等式”

$$\left|\sqrt{\varphi'^2(\tau_k^*)+\psi'^2(\tau_k^*)}-\sqrt{\varphi'^2(\tau_k)+\psi'^2(\tau_k)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{[\varphi'(\tau_k^*)-\varphi'(\tau_k)]^2+[\psi'(\tau_k^*)-\psi'(\tau_k)]^2},$$

再利用 $f(x,y)$ 及 $\varphi'(t)$，$\psi'(t)$ 的连续性，容易证得

$$\lim_{max(\Delta t_k)\to 0}\sum_{k=1}^{n}\eta_k\Delta t_k=0,$$

从而得到公式：

$$\int_{(C)}f(x,y)ds=\int_{\alpha}^{\beta}f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

如果曲线 (C) 的方程是：

$$y=\psi(x),\quad a\leqslant x\leqslant b.$$

这时，只要令 $x=t$，由上面的公式便得到

$$\int_{(C)}f(x,y)ds=\int_{a}^{b}f[x,\psi(x)]\sqrt{1+\psi'^2(x)}\,dx.$$

利用上述两个公式计算第一型曲线积分时，只要把曲线 (C) 的表达式以及由它们算出来的弧微分 ds 形式地代入第一型曲线积分的记号中，并把自变量的变化范围取作定积分的限，第一型曲线积分就化成定积分了．

例2 求 $I=\int_{(C)}xyds$，其中积分路线 (C) 是第一象限內的一段椭圆：

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ o\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

解 令 $\varphi_{(t)}=a\cos t$，$\psi_{(t)}=b\sin t$

于是 $\varphi'(t)=-a\sin t,\ \psi'(t)=b\cos t,$

$$\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos t},$$

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot b\sin t\cdot\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos t}\,dt$$

令

$$z=a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t,$$

则

$$dz=2(a^2-b^2)\sin t\cos t\,dt.$$

由于 $t=o$ 时，$z=b^2$；$t=\dfrac{\pi}{2}$时，$z=a^2$，因此

$$I=\frac{ab}{2(a^2-b^2)}\int_{b^2}^{a^2}\sqrt{z}\ dz=\frac{ab}{2(a^2-b^2)}\cdot\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}\Big|_{b^2}^{a^2}$$

$$=\frac{ab(a^3-b^3)}{3(a^2-b^2)}=\frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}.$$

例 3 求 $I=\int\limits_{(C)} x\,ds$，其中 (C) 是抛物线 $y=x^2$ 上从原点到点 (1, 1) 的一段.

解 令 $\varphi_{(x)}=x^2$，于是 $\varphi'(x)=2x$,

$$\sqrt{1+\varphi'^2(x)}=\sqrt{1+4x^2},$$

$$I=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

$$=\int_0^1\frac{1}{8}\sqrt{1+4x^2}\,d(1+4x^2)$$

$$=\frac{1}{8}\left[\frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{12}(\sqrt{125}-1).$$

二、第二型曲线积分

我们通过计算变力沿曲线所作的功，来引出实用上更为重要的第二型曲线积分.

例 4 变力沿曲线所作的功

火箭在空中飞行，轮船在海上航驶，都需要考虑变力沿曲线作功问题. 设平面上一物体 M，在变力 $\overrightarrow{F}(x,y)=F_1(x,y)\vec{i}+F_2(x,y)\vec{j}$ 的作用下，由点 A 经曲线 (C) 运动到点 B，试求变力 $\overrightarrow{F}$ 对物体 M 所作的功 W（图 9-2）.

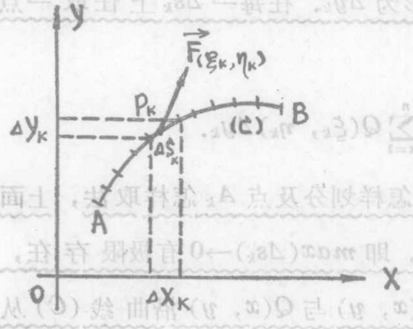

图 9-2

解 将曲线 (C) 从 A 到 B 任意地分成 n 个有向弧段 Δs_k ($k=1,2,\cdots n$)，其长度也记为 Δs_k. 在每一 Δs_k 上任取一点 $P_k(\xi_k,\eta_k)$. 由于力 $\overrightarrow{F}$ 是连续变化的，加之 Δs_k 又很小，因此，在 Δs_k 上各点力的大小与方向都可近似地看作不变，就算它等于在点 P_k 处的力：$\overrightarrow{F}(\xi_k,\eta_k)=F_1(\xi_k,\eta_k)\vec{i}+F_2(\xi_k,\eta_k)\vec{j}$. 同时，有向弧段 Δs_k 可用有向线段 $\overrightarrow{\Delta s_k}=\Delta x_k\vec{i}+\Delta y_k\vec{j}$ 代替. 于是，从物理学中知道，变力 $\overrightarrow{F}$ 在曲线 (C) 上任一小段 Δs_k 上所作的功就近似地等于

$$\overrightarrow{F}(\xi_k,\eta_k)\cdot\overrightarrow{\Delta s_k}=F_1(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k+F_2(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k$$

因此，变力 $\overrightarrow{F}$ 沿整个曲线 (C) 所作的功就近似地等于

$$\sum_{k=1}^{n}[F_1(\xi_k,\ \eta_k)\Delta x_k+F_2(\xi_k,\ \eta_k)\Delta y_k].$$

显然，当曲线愈分愈细，这近似值便愈来愈准确．这样，我们所要求的功应该是

$$W=\lim_{max(\Delta s_k)\to 0}\sum_{k=1}^{n}[F_1(\xi_k,\ \eta_k)\Delta x_k+F_2(\xi_k,\ \eta_k)\Delta y_k].$$

上述和式的极限，在计算平面稳定流动的流体流过某曲线的流量以及计算理想气体由一个状态变到另一个状态所吸收的热量时都遇到．它具有一定的普遍意义．我们经过抽象，得出一般概念．

定义 设平面上有一逐段光滑曲线 (C)，$P(x,\ y)$ 与 $Q(x,\ y)$ 为曲线 (C) 上的两个连续函数．将曲线 (C) 从起点至终点任意地分成 n 个有向弧段 $\Delta s_k(k=1,\ 2,\ \cdots n)$，其长度也记为 Δs_k，且 Δs_k 在 x 轴上的投影为 Δx_k，在 y 轴上的投影为 Δy_k．在每一 Δs_k 上任取一点 $A_k(\xi_k,\ \eta_k)$，分别作和式

$$\sum_{k=1}^{n}P(\xi_k,\ \eta_k)\Delta x_k,\quad \sum_{k=1}^{n}Q(\xi_k,\ \eta_k)\Delta y_k.$$

如果不论曲线 (C) 上这些小段怎样划分及点 A_k 怎样取法，上面的和式当各小段中最长者趋于零时，即 $max(\Delta s_k)\to 0$ 有极限存在，那么这两个极限就分别称为函数 $P(x,\ y)$ 与 $Q(x,\ y)$ 沿曲线 (C) 从起点至终点的第二型曲线积分，或对坐标 x 与坐标 y 的曲线积分，记作

$$\int_{(C)}P(x,\ y)dx=\lim_{max(\Delta s_k)\to 0}\sum_{k=1}^{n}P(\xi_k,\ \eta_k)\Delta x_k,$$

$$\int_{(C)}Q(x,\ y)dy=\lim_{max(\Delta s_k)\to 0}\sum_{k=1}^{n}Q(\xi_k,\ \eta_k)\Delta y_k.$$

应用中常遇到的是上述两个积分之和的形式，这时就简单地表示成

$$\int_{(C)} P(x,\ y)dx + Q(x,\ y)dy = \int_{(C)} P(x,\ y)dx + \int_{(C)} Q(x,\ y)dy.$$

根据上述定义，例 4 中变力 $\overrightarrow{F}$ 沿曲线 (C) 所作的功可表示为

$$W = \int_{(C)} F_1(x,\ y)dx + F_2(x,\ y)dy.$$

如果 (C) 是逐段光滑的空间曲线，$P(x,\ y,\ z)$，$Q(x,\ y,\ z)$，$R(x,\ y,\ z)$ 是 (C) 上的连续函数，则同样可定义空间中的第二型曲线积分

$$\int P(x,\ y,\ z)dx + Q(x,\ y,\ z)dy + R(x,\ y,\ z)dz =$$

$$= \lim_{max(\Delta S_k)\to 0} \sum_{k=1}^{n} [P(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta y_k +$$

$$+ R(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta z_k].$$

注意：第二型曲线积分与沿曲线的方向有关．当所沿曲线的方向改变时，曲线积分的值要改变正负号．如果曲线是闭合的，曲线的方向就不能用曲线的起点和终点来说明．这时，我们规定，反时针方向为闭合曲线的正向，顺时针方向为闭合曲线的负向．以后，若无特别说明，第二型曲线积分总认为是沿曲线正向计算的．

下面说明第二型曲线积分的计算法．

当积分的路线的方程为已知时，第二型曲线积分也可化为定积分来计算．

如果曲线 (C) 的方程是：

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

并且 $t=\alpha$ 时对应 (C) 的起点，$t=\beta$ 时对应 (C) 的终点，则

$$\int_{(C)} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} [\rho(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]\,dt.$$

事实上，若将区间 $[\alpha,\beta]$ 分为

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta,$$

并设 Δs_k 为对应区间 $[t_{k-1},t_k]$ 上的一段弧长，τ_k 为区间 $[t_{k-1},t_k]$ 上任一点，Δx_k 为 Δs_k 在 x 轴上的投影，即 $\Delta x_k = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})$，$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$. 根据第二型曲线积分定义，有

$$\int_{(C)} P(x,y)\,dx = \lim_{max(\Delta s_k)\to 0} \sum_{k=1}^{n} P[\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)]\Delta x_k.$$

由微分中值公式，$\Delta x_k = \varphi'(\tau_k{}^*)\Delta t_k$，其中 $\tau_k{}^*$ 是 $[t_{k-1},\ t_k]$ 上的某一点. 显然，当 $max(\Delta s_k)\to 0$ 时，有 $max(|\Delta x_k|)\to 0$；当 $max(\Delta t_k)\to 0$ 时，因 $x=\varphi(t)$ 为连续函数，有 $max(|\Delta x_k|)\to 0$. 于是

$$\int_{(C)} P(x,y)\,dx = \lim_{max(\Delta t_k)\to 0} \sum_{k=1}^{n} P[\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)]\varphi'(\tau_k{}^*)\Delta t_k.$$

由于 τ_k 与 $\tau_k{}^*$ 不一致，等式右端的和数不是积分和数，因此不能马上取极限得出结果. 但是可按下面方法处理：

$$\int_{(C)} P(x,y)\,dx = \lim_{max(\Delta tk)\to 0} \left\{ \sum_{k=1}^{n} P(\varphi(\tau_k),\ \psi(\tau_k))\varphi'(\tau_k)\Delta t_k + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} P[\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)]\,(\varphi'(\tau_k{}^*) - \varphi'(\tau_k)]\Delta t_k \right\}$$

因为 $P(x,y)$ 在 (C) 上连续，所以 $P[\varphi(t),\psi(t)]$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续. 设 M 是它的上界，于是

$$\left| \sum_{k=1}^{n} P[\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)]\,(\varphi'(\tau_k{}^*) - \varphi'(\tau_k))\Delta t_k \right| \leqslant$$

$$\leqslant M\sum_{k=1}^{n}\left|\varphi'(\tau_k^*)-\varphi'(\tau_k)\right|\Delta t_k.$$

又因 $\varphi'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，故它也一致连续．因而对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $max(\Delta t_k)<\delta$ 时，有

$$\left|\varphi'(\tau_k^*)-\varphi'(\tau_k)\right|<\varepsilon.$$

从而

$$\left|\sum_{k=1}^{n}P[\varphi(\tau_k),\psi(\tau_k)](\varphi'(\tau_k^*)-\varphi'(\tau_k))\right|\Delta t_k\leqslant$$

$$\leqslant M\varepsilon\sum_{k=1}^{n}\Delta t_k=M(\beta-\alpha)\varepsilon.$$

由于 ε 的任意性，因此得到

$$\int_{(C)}P(x,y)dx=\int_{\alpha}^{\beta}P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)dt.$$

同理

$$\int_{(C)}Q(x,y)dy=\int_{\alpha}^{\beta}Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)dt.$$

将上面两式相加，于是有

$$\int_{(C)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt.$$

如果曲线 (C) 的方程是：

$$y=\psi(x),\qquad a\leqslant x\leqslant b,$$

并且对应于 a 和 b 的分别是曲线 (C) 的起点和终点．这时，只要令 $x=t$，由上面的公式便得到

$$\int_{(C)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_a^b \{P[x,\psi(x)]+Q[x,\psi(x)]\}dx.$$

这些公式很象定积分的换元公式．但须注意，上面等式右端定积分的下限与上限必须分别与等式左端曲线积分的曲线 (C) 的起点和终点相对应．

例5 求 $I=\int_{(C)}(2a-y)dx+xdy$，其中 (C) 为旋轮线：

$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，且 t 增加的方向为积分路线 (C) 的方向．

解 令 $\varphi(t)=a(t-\sin t)$，$\psi(t)=a(1-\cos t)$，

所以

$$\varphi'(t)=a(1-\cos t),\ \psi(t)=a\sin t,$$

$$I=\int_{(C)}(2a-y)dx+xdy$$

$$=\int_0^{2\pi}\{[2a-a(1-\cos t)]a(1-\cos t)+a(t-\sin t)a\sin t\}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}a^2t\sin t dt$$

$$=-2\pi a^2.$$

例 6 求 $I=\int\limits_{(C)} 6x^2y\,dx+10xy^2\,dy$，其中 (C) 是曲线 $y=x^3$ 从 $(1,1)$ 至 $(2,8)$ 的一段.

解 $I=\int\limits_{(C)} 6x^2y\,dx+10xy^2\,dy$

$$=\int_1^2 [6x^2\cdot x^3+10x\cdot(x^3)^2\cdot 3x^2]\,dx$$

$$=\int_1^2 (6x^5+30x^9)\,dx$$

$$=3132.$$

例 7 求 $I=\int\limits_{(C)}\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$，其中 (C) 为园周 $x^2+y^2=a^2$.

解 将园周 (C) 的方程写成

$$x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

由于 (C) 是闭曲线，不妨取园周 (C) 与正向 x 轴交点 $(1,0)$ 作为起点. 题中未说明积分路线的方向，因此，总认为是取正向的，也就是从点 $(1,0)$ 依反时针方向环行一周回到点 $(1,0)$，从而 t 必须从 0 单调地增加到 2π. 于是

$$I=\int\limits_{(C)}\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{(a\cos t+a\sin t)(-a\sin t)-(a\cos t-a\sin t)(a\cos t)}{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(-1)dt$$

$$=-2\pi.$$

三、第一型曲綫积分与第二型曲綫积分的关系

第一型曲线积分与第二型曲线积分是从不同客观实际背景引出的两种不同类型的积分，根据它们的定义是不同的．比如，前者不考虑曲线的方向，后者则要强调曲线的方向．尽管如此，但由于它们都是沿曲线的积分，两者之间又有着密切的关系．我们可以将第一型曲线积分化为第二型曲线积分，反之亦然．

事实上，假设积分路线(C)由以弧长 s 作为参数的方程：$x=\varphi(s)$，$y=\psi(s)$，$0\leqslant s\leqslant l$ 给出，而 (C) 的正向就是 s 增大的方向，又 α 为从 x 轴正向到曲线切线的正向的夹角，则由弧微分的表达式和导数的几何意义不难推出：

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,\quad \frac{dy}{ds}=\sin\alpha.$$

于是

$$\int_{(C)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

$$=\int_0^l[P(\varphi(s),\psi(s))\cos\alpha+Q(\varphi(s),\psi(s))\sin\alpha]ds$$

$$=\int_{(C)}[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\sin\alpha]ds.$$

这样，我们就建立起了第一型曲线积分与第二型曲线积分相互联系、互相转化的关系．

四、曲線积分应用实例

现在我们运用由计算物质曲线质量和变力沿曲线所作的功引出的曲线积分的一般概念，来研究几何、力学和物理方面的一些问题.

例 8 物质曲线的重心与转动惯量

设平面上有一物质曲线(C)，试求其重心与转动惯量.

解 将曲线(C)任意分成n小段$\Delta s_k(k=1,2,\cdots n)$. 在每一$\Delta s_k$上任取一点$P_k(\xi_k,\eta_k)$. 在每一$\Delta s_k$上把密度$\rho(x,y)$看作不变，质量集中在点$P_k(\xi_k\eta_k)$上. 于是得到质量分别为$\rho(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k(k=1,2,\cdots n)$的质点组$P_k(\xi_k,\eta_k)(k=1,2,\cdots n)$. 根据物理学知识，这质点组的重心坐标是：

$$\bar{x}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k)\xi_k\Delta s_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k},\quad \bar{y}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k)\eta_k\Delta s_k}{\sum\limits_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k)\Delta s_k}$$

对坐标轴及原点的转动惯量是：

$$\bar{I}_x=\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k)\eta_k^2\Delta s_k,\quad \bar{I}_y=\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k)\xi_k^2\Delta s_k,$$

$$\bar{I}_0=\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k\eta_k)(\xi_k^2+\eta_k^2)\Delta s_k.$$

当最大弧段的长度趋于零时，我们很自然地把质点组的重心与转动惯量的极限当作物质曲线(C)的重心(x_C,y_C)与转动惯量I_x、I_y、I_0：

$$x_c=\frac{\int\limits_{(C)}\rho(x,y)x\,ds}{\int\limits_{(C)}\rho(x,y)\,ds},\quad y_c=\frac{\int\limits_{(C)}\rho(x,y)y\,ds}{\int\limits_{(C)}\rho(x,y)\,ds};$$

$$I_x=\int\limits_{(C)}\rho(x,y)y^2ds,\quad I_y=\int\limits_{(C)}\rho(x,y)x^2ds,\quad I_0=\int\limits_{(C)}\rho(x,y)(x^2+y^2)ds.$$