21世纪高职高专教材

供药学、药剂学、中药学、制药工程、制剂工程、医药市场营销等专业使用

高等数学

王小平 主编

科学出版社
www.sciencep.com

21世纪高职高专教材

（供药学、药剂学、中药学、制药工程、制剂工程、医药市场营销等专业使用）

高　等　数　学

王小平　主编
蒋贻澄　主审

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是根据教育部《高职高专高等数学课程教学基本要求》编写而成的。考虑到专科层次的特点和药学专业的需要，全书共分为8章，各章分别为函数、极限和连续，一元函数微分学，一元函数积分学，常微分方程，向量与空间解析几何，多元函数微分学，多元函数积分学，级数。

本书可供药学、医学类高职高专师生使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王小平主编.—北京：科学出版社，2004.9

21世纪高职高专教材

ISBN 7-03-014302-7

Ⅰ.高… Ⅱ.王… Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第089870号

责任编辑：李 君 吴茵杰 贺丕珍／责任校对：张 琪

责任印制：刘士平／封面设计：卢秋红

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年9月第一版 开本：850×1168 1/16

2004年9月第一次印刷 印张：20 3/4

印数：1—4 000 字数：501 000

定价：29.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉)

21 世纪高职高专教材编写委员会

供药学、药剂学、中药学、制药工程、制剂工程、
医药市场营销等专业使用

总 序

近十几年来，中国高等职业技术教育的发展，为中国的高教事业撑起了一片新的蓝天绿地。高等职业技术教育越来越为社会和广大学生认同、看重。

高等职业技术教育对于学生承担着科学与技术的双重教育任务，既要讲授科学文化知识，又要培训实践技能。因此，它必须具有新的教育理念和新的培养模式。教材建设是办好高等职业技术教育的重要环节之一。

中国药科大学高等职业技术学院十分重视教材建设。经过两年多的运作，组织了一批有丰富知识、教学经验、实践经验的教师和一批有现代教育理念、熟悉科技发展进程和方向的青年骨干教师，围绕药学各专业高等职业教育培养的目标和方向，第一批编写了《工业药剂学》、《药物化学》、《化学原理与化学分析》、《药物分析》、《制药化工过程及设备》、《计算机组装与维护》、《医药市场营销》、《医学基础》、《医药工作应用文》、《制药机械学》、《生物化学》、《微生物学》、《中医学基础》、《药理学》、《生理学》、《医药应用统计》、《药用物理》、《中药炮制学》、《中药药剂学》、《中药方剂学基础》、《医药数学建模教程》、《高等数学》、《有机化学》、《实用中药鉴定学》等计 24 门课程的高职教材。

一本好的教材，会给学习者以巨大的深刻的启迪，学习者不但能从中循序渐进地学到科学文化知识，从中还能够较快地接触到这门课程的本质；能够打开视窗，拓展视野，发现和思考新问题；能够接受到相应的人文教育，提高学习者的品味；能够洞知科学技术的发展方向和前沿阵地。我们的教材编写人员尽力按这个方向编写教材，它们将受到广大读者的检验。

本套教材主要特色：紧扣职业技术教育，淡化理论推导，加强理论与实际的结合，面向药品生产、质量检验和销售一线的技术要求，特别是药剂专业与药学专业（质量保证），以工艺为主线进行了串联，充分体现了我院在进行示范性高职建设过程中的成果。因此，本套教材特别适合于药学类高职教育。

囿于水平、人力、时间，教材中会有不尽恰当的地方，甚至会有谬误，欢迎广大读者、教师、专家赐教，批评，以便再版时修订。

今后，我们还将计划编写出版药学类专业其他课程的教材。

本套教材主要面向高职专科生，考虑到专转本的需要，《高等数学》增加了部分带 * 内容。另外，根据教学计划的差异，有的课程的教材可供高职本科使用。

承蒙科学出版社的大力支持和关注，这套教材得以较快的速度编纂和付梓，在此，我们谨向科学出版社表示诚挚的谢意。

杨静化

2004 年 5 月

编 写 说 明

为了适应高职高专发展的需要，根据《教育部高教司关于高职高专高等数学教学的基本要求》，参考高职高专类药学有关专业的教学大纲，本着课程改革的目的，结合多年的教学实践，我们编写了本教材，供药学类高职高专院校使用。

为突出专业特点，体现"以应用为目的，以必需、够用为度"的原则，我们在以下 3 个方面做了有益的尝试。

1. 启发兴趣，渗透思想

本书每章开篇用简练的语言介绍一位微积分史上有名的数学家（如牛顿、莱布尼兹等），让数学家领进相关的知识领域，同时介绍相关的数学史，让学生了解数学概念的来龙去脉；每节前安排了 1～2 个小问题，这些问题往往与本节的概念、思想方法有关，如"与取整函数相关的星期几问题"、"与极值相关的登山问题"、"与级数相关的阿基里斯悖论问题"，通过对这些问题的介绍，以引起学生的好奇心，激发学生学习本节内容的兴趣，并利用微积分解决一些实际问题，如"光的折射定律"，使学生感到生活中离不开微积分。

2. 内容的优化

我们按照从一元函数到多元函数的顺序介绍微积分知识，根据高职高专学生的特点，用通俗的语言、直观的图形介绍微积分的基本概念和基本方法，不追求理论的严密性和体系的完整性，力求让学生理解相关概念和思想方法。精选例题和习题，使学生用较少的时间掌握微积分的各种运算方法和运算技巧。每一章后附有单元测试，供学生检验学习效果。

本教材的基本教学时数不少于 100 学时，标有" * "的内容如"级数"等，可供一些特殊需要（如"专升本"）的学生学习。

3. 加强数学的应用意识

本书作为药学相关专业的一本高等数学教材，强化了数学的应用意识，体现了初步的数学建模思想，用专门的章节介绍高等数学在药学上的应用，通过相关的专业课中一些实例的分析，如"药学分析中的化学计量点的测定"、"药学萃取中的次数"、"药学研究中的最小二乘法"等问题，拉近数学与药学的距离，为学生学习专业课打下坚实的数学基础。同时在附录中介绍了 Mathematica 的简单用法，并处理教材中的一些知识难点。

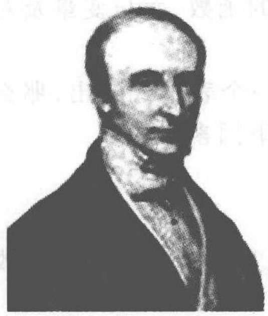
本书在编写过程中得到学院领导和专业课老师的大力支持，在此一并表示感谢。由于时间仓促，书中缺点、漏误在所难免，敬请读者赐教指正。

编　者

2004 年 3 月

目 录

第 1 章 函数、极限和连续



柯西(Augustin-Louis Cauchy 1978～1857)是一位数学奇才,在父亲的逼迫下最初致力于哲学的研究,但他却成为一位伟大的数学家. 他在数学上最大的贡献是在微积分中引进极限概念,由他提出的极限定义的 ε 方法,后经维尔斯特拉斯改进,已成为今天所有微积分教科书中的典范.

高等数学又称微积分,它研究的对象是函数——一种刻画变量间相互关系的数学模型,主要是具有连续性的函数. 它研究的主要内容是微分和积分,而它们的基础是极限—— 刻画运动中函数的变化趋势. 本章主要介绍函数的极限和连续性的基本知识,为今后的微积分学习打下坚实的基础.

第 1 节 函 数

1. 你能画出以数学家狄利克雷的名字命名的函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x \text{ 为有理数},\\ 0, & x \text{ 为无理数}\end{cases}$$ 的图形吗?

2. 不用日历,你能算出 2001 年 1 月 1 日是星期几吗?

17 世纪以前,函数的概念一直与公式相联系,到了 1873 年,德国数学家狄利克雷(Dirichle 1805～1859)抽象出为人们易于接受的函数概念.

一、函数的概念

客观世界中存在两种不同的量:一种是在某一变化过程中保持某个数值不变的量,称为常量;另一种是可以取不同数值的量,称为变量.

例 1 正在发育成长的球形细胞的体积与半径的关系为 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$,其中 V 与 r 是变量,圆周率 π 是常量.

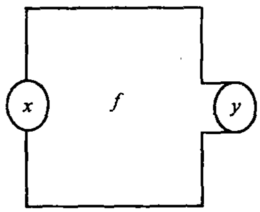


图 1-1

只要给出了半径 r 的值，就有一个体积的值 V 与之对应，这种对应关系称之为函数关系.

1. 函数

定义 1 设在某一变化过程中有两个变量 x 和 y，如果对于某一范围内的每个 x 值，按照一定的法则 f，y 都有惟一确定的值与之对应，那么称 y 为 x 的函数，记作 $y=f(x)$，其中 x 为自变量，y 称为因变量.

● 一个函数，我们可以把它想象为一台机器（如图 1-1），机器的进口为 x，机器的出口为 y，f 为加工过程.

● 自变量的取值范围 D，称为函数的定义域，所有函数值 y 的集合称为值域，通常用 M 表示，$M=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$，当 $x=x_0$ 时的函数值记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.

● 两个函数当且仅当它们的对应规律和定义域都相同时，才是相同的函数，而与变量及对应法则采用什么字母无关.

2. 定义域　函数的定义域是自变量的取值范围. 如果函数仅由一个表达式给出，那么函数的定义域就是使得表达式有意义的自变量的取值范围，通常考虑以下因素：

(1) 函数含有偶次方根时，被开方数不小于等于 0.

(2) 分母不能为 0.

(3) 函数中含有对数、三角函数或反三角函数等，必须根据它们的定义域来决定所求函数的定义域，如出现 $\arcsin x$，必须有 $|x|\leqslant 1$.

(4) 函数较为复杂时，往往需解不等式组.

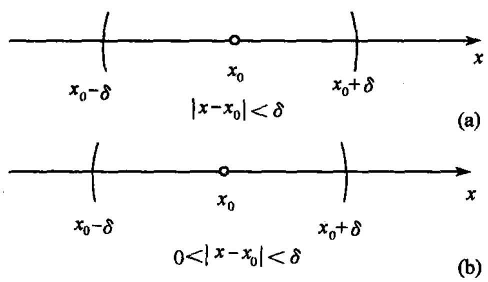


图 1-2

在实际问题中，定义域要结合问题的实际意义来决定，如例 1 中半径 r 不能取负数.

定义域可以用集合表示，也可以用区间表示，如 $y=\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$ 或 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 今后我们会遇到这样一种区间，如图 1-2 所示，称为 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$，与不等式 $|x-x_0|<\delta$ 相对应. 不包括 x_0 的邻域，也称为 x_0 的 δ 的去心邻域，记作 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，与不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 对应.

例 2 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{\ln(2+x)}$　　(2) $y=\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)+\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

解 (1) 要使函数 $y=\sqrt{\ln(2+x)}$ 有意义，必须有不等式组

$$\begin{cases}\ln(2+x)\geqslant 0,\\ 2+x>0,\end{cases}\quad \text{解之得 } x\geqslant -1,$$

所以 $y=\sqrt{\ln(2+x)}$ 的定义域为 $\{x\mid x\geqslant -1\}$，或用区间表示成 $[-1,+\infty)$.

(2) 要使函数 $y=\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)+\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 有意义，必须有不等式组

$$\begin{cases}\left|\dfrac{x}{2}-1\right|\leqslant 1,\\ 4-x^2>0\end{cases}$$

成立，从而有$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 4,\\ -2<x<2,\end{cases}$解之得 $0\leqslant x<2$，如图 1-3 所示.

所以 $y=\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)+\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 的定义域为 $\{x\,|\,0\leqslant x<2\}$.

3. 分段函数　　有这样一种函数，它们在不同的区间上具有不同的表达式，我们称之为分段函数，如本节开始提到的 Dirichlet 函数，在日常生活和药学研究中经常会遇到，由于它们的特殊性，我们在学习中尤其要加以重视.

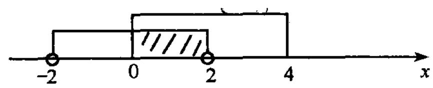


图 1-3

例 3　根据某试验，血液中胰岛素浓度 $c(t)$（单位/毫升）与时间 t（分钟）的关系可表示为

$$c(t)=\begin{cases}t(10-t),0\leqslant t\leqslant 5\\ 25e^{-k(t-5)},t>5\end{cases}$$

其中 k 为常数. 计算函数值时，需根据对应的表达式来进行，如 $c(5)=5\times(10-5)=25$，$c(7)=25e^{-k(7-5)}=25e^{-2k}$

想一想，这个函数的定义域是什么？

例 4　$y=[x]$ 称为取整函数，表示不超过 x 的最大整数，这是高斯研究圆内整点问题时引入的一个函数，我们在学习计算机编程时会遇到.

如 $[\pi]=3$，$[-4.6]=-5$，$\left[\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right]=0$，$[1]=1$. 取整函数的图形如图 1-4 所示，其图形像一系列台阶. 你能用这个函数将一个正数 x 四舍五入吗？

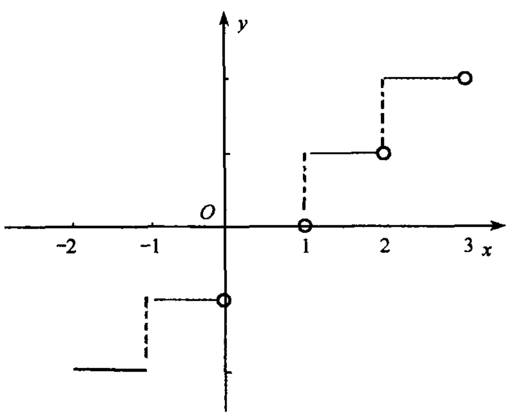


图 1-4

二、函数的表示法

要表示一个函数，通常有 3 种方法.

1. 解析法　　用数学表达式来表示函数（如例 1），这是我们学习高等数学的常用方法，也是应用数学研究实际问题的第 1 步.

2. 图示法　　用具体图形来表示函数，此方法直观，可启迪思维.

例 5　　图 1-5 中的 c-t 曲线是研究血管外用药（如口服、皮下注射等）中血药浓度与时间关系的曲线.

随着药物不断被吸收，血药浓度持续上升，这一阶段为吸收相，此段时间内吸收大于消除；当吸收与消除达到平衡时，血药浓度达到峰值，在此之后，消除大于吸收，血药浓度持续下降.

3. 列表法　　用一个表格来表示函数，在化学、药学等试验学科中经常通过试验得到一

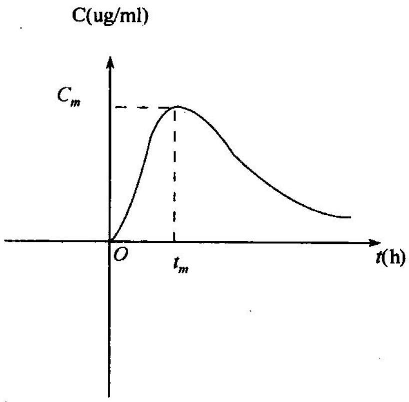


图 1-5

组数据，从而用列表法来表示.

例 6 给一糖尿病患者按每公斤体重口服葡萄糖 1.75 克后，测定其血糖含量. 数据如表 1-1.

表 1-1

口服葡萄糖后的时间 t(小时)	0	0.5	1	2	3
患者的血糖水平 y(毫克%)	115	150	175	165	120

为了便于处理分析，常常需要进行数据的拟合，得到相应的解析式，第 6 章介绍的最小二乘法便是药学中常用的处理方法之一，当所给变量间关系不是线性关系时，常通过取对数和倒数等方法转化成线性关系.

三、函数的性质

1. **函数的有界性** 设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义，若存在一个正数 M，对于所有的 $x\in(a,b)$，均有$|f(x)|\leqslant M$ 成立，则称函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内是有界的，否则称为无界的.

如 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界，$y=\dfrac{1}{x}$在$(0,+\infty)$上无界.

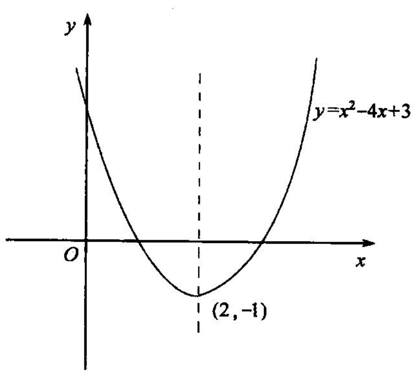


图 1-6

2. **函数的单调性** 若对于区间(a,b)上任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，均有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)成立，则称函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内单调增加(或单调减少).

如图 1-6 所示，函数 $y=x^2-4x+3$ 在$(2,+\infty)$单调增加，在$(-\infty,2)$单调减少.

3. **函数的奇偶性** 若函数 $y=f(x)$对于定义域内任意 x，均有 $f(-x)=f(x)$成立，则称函数 $y=f(x)$为偶函数. 若对于定义域内任意 x 均有$f(-x)=-f(x)$，则称函数$y=f(x)$为奇函数.

如 $y=x^2$，$y=\cos x$ 为偶函数，$y=x$，$y=\sin x$ 为奇函数.

奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

4. **函数的周期性** 若存在一个不为零的常数 T，使得 $y=f(x)$对于定义域中的任意 x，均有 $f(x+T)=f(x)$成立，则称 $y=f(x)$为周期函数，常数 T 为$y=f(x)$的周期，通常所讲周期是指它的最小正周期，如 $y=\sin x$ 周期为 2π，周期函数在每个周期内具有相同的图形.

四、反函数和复合函数

1. 反函数

定义 2　设 $y=f(x)$ 是定义域 D 上的函数，值域为 M. 如果对于值域 M 上的每个 y，数集 D 上均有惟一的 x 与之对应，这种因 y 变化而导致 x 变化的对应关系称为 $y=f(x)$ 的反函数.

● 反函数记作 $x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$. 但由于人们习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量，所以 $y=f(x)$ 的反函数常常记为 $y=\varphi(x)$ 或 $y=f^{-1}(x)$.

● 求一个函数的反函数的步骤：(1)由 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$，即用 y 表示 x，(2)判断单值，(3)交换 x 和 y.

● $y=f(x)$ 和 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于 $y=x$ 对称，如图 1-7 所示.

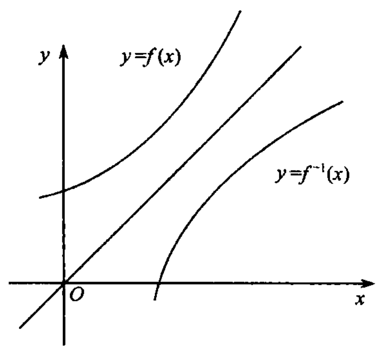


图 1-7

例 7　求函数 $y=2^x+1$ 的反函数

解　由 $y=2^x+1$，解出 $x=\log_2{}^{(y-1)}$，显然，对于每个 $y>1$，都有惟一的 x 与之对应，所以 $y=2^x+1$ 的反函数为 $y=\log_2{}^{(x-1)}$.

2. 复合函数

定义 3　设两个函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$，且 $g(x)$ 的值全部或部分落在 $y=f(u)$ 的定义域内，这种因 x 变化通过 u 导致 y 变化的对应关系称为 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数，记作 $y=f[g(x)]$，u 称为中间变量.

● 如果把函数比做机器，那么复合函数就是一组相互关联的机器，如图 1-8 所示.

● 不是任意两个函数都可以复合，如 $y=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 不能复合成 $y=\arcsin(2+x^2)$，由于 $2+x^2\geqslant 2$，所以 $\arcsin(2+x^2)$ 无意义.

● 复合函数可以有 2 个或 2 个以上的中间变量.

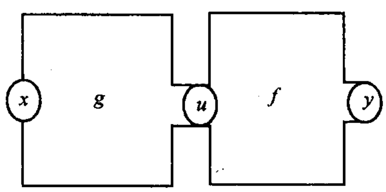


图 1-8

例 8　函数 $y=\lg(1-x^2)$ 可以看成由函数 $u=1-x^2$ 和 $y=\lg u$ 复合而成.

$y=\lg(1-x^2)$ 和 $u=1-x^2$ 的自变量都是 x，它们的定义域有什么关系？结合图形 1-8 说明.

例 9　分析下列函数的复合过程

(1) $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$，　(2) $y=\sqrt{\arctan(1+x^2)}$.

解　(1) $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$ 可看成由 $y=e^u$ 和 $u=-\dfrac{x^2}{2}$ 复合而成.

(2) $y=\sqrt{\arctan(1+x^2)}$ 可以看成由 $y=\sqrt{u}$，$u=\arctan v$ 和 $v=1+x^2$ 复合而成，这里有两个中间变量.

对复合函数进行分解是今后研究函数的基础. 在实际分解的过程中，一般采用“从整体到

局部,一层一层地进行分解”的策略,并尽可能用最简单的基本初等函数来表示.

五、初等函数

1. 基本初等函数　中学里学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数,其中对数函数与指数函数互为反函数,三角函数与反三角函数互为反函数.

基本初等函数是构成复杂函数的基础,就像分子是由原子构成一样. 今后我们在研究函数的微分或积分时,往往先从基本初等函数入手.

为了便于大家查阅,现将它们的图形和性质列在附录 1 中.

2. 初等函数　由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次复合,并可以用一个解析式表示的函数称为初等函数.

例如,$y=\sqrt{\arctan(1+x^2)}$,$y=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$,多项式函数 $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 都是初等函数.

分段函数一般不是初等函数,当然也有例外. 如分段函数 $y=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$ 可以用一个解析式表示(想一想,用什么式子表示?),因此它也是初等函数.

3. 函数概念的推广　19 世纪后,人们把用解析式表示的函数演化成对自变量进行的一系列运算,即函数是运算的一个组合,如欧拉定义的对数函数和指数函数为 $\mathrm{e}^x=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$,$\ln x=\lim\limits_{n\to\infty}n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)$,其中符号“lim”是一种极限运算.

我们讨论的函数仍然用解析式表示. 读者会注意到,本节中的函数值都是惟一确定的,这样的函数称为单值函数. 今后还会遇到函数值不止一个的函数,如同一台机器有几个出口一样,我们称之为多值函数. 后面将要学到的隐函数,如由 $x^2+y^2=4$ 确定的关于自变量 x 的函数 y,就是一个多值函数.

六、建立函数模型

1. 数学模型　数学模型是根据某种事物的主要特征或主要数量相依关系,采用数学语言,从现实世界中抽象出来的一种数学结构,它是对客观事物的某些属性的一个概括或近似的反映.

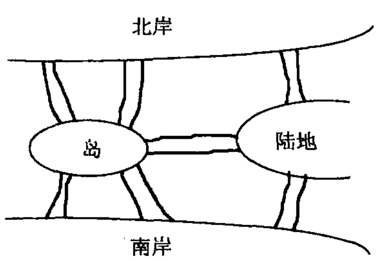


图 1-9

哥尼斯堡七桥问题的解决就是构造数学模型的一个经典实例:哥尼斯堡是一个著名的大学城,位于布勒尔河两条支流之间,河上有 7 座桥(图 1-9). 哥尼斯堡的大学生们常在这里散步,他们总想一次不重复地走过这 7 座桥,但是没有人能够做到.

当时著名的数学家欧拉巧妙地解决了这个问题,并由此促进了对网络论的研究.

(1) 欧拉根据问题的特点，运用数学语言，抽象成一个数学问题，建立了合适的数学模型，把岛及陆地等抽象成数学上的 4 个“点”，把 7 座桥抽象成 7 条“线”(图 1-10)，步行抽象成“画线”，这样就把“7 桥问题”抽象为能否不重复地一笔画成一个几何图形的问题，即线路“一笔画问题”.

(2) 分析数学模型，求出数学解. 一笔画有个起点和终点，除起点和终点外，在一笔画所出现的交点处，曲线总是一进一出，即通过交点处的曲线总是偶数条，至多只有起点和终点有可能通过奇数条，但图 1-10 中 A,B,C,D 4 个点都通过奇数条曲线，由此可以断言它不是一笔能画出的图形.

(3) 欧拉将求得的数学结果再回到实际问题中去，对数学做出解释和评价，形成对实际问题的判断：步行无法一次不重复地通过哥尼斯堡的 7 座桥.

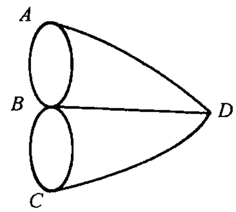


图 1-10

上述数学建模的模式可以用图 1-11 表示.

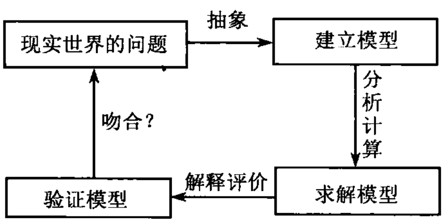


图 1-11

2. 建立函数模型　　函数是一种变量相互依存的数学模型，下面通过几个例子说明由实际问题建立的函数模型.

例 10　一个底半径为 2 厘米，高为 10 厘米的圆锥形杯，为了在上面刻上表示容积的刻度，试求高度与其对应容积之间的函数关系.

解　设溶液高度为 h 时，对应的容积用 V 表示，r 为平行底面的截面半径.

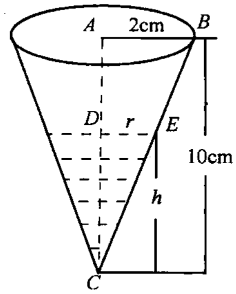


图 1-12

由圆锥体的体积公式知：$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$，由图 1-12 可知，$\triangle ABC \sim \triangle DEC$，因此

$$\frac{CD}{CA}=\frac{DE}{AB},$$

即

$$\frac{h}{10}=\frac{r}{2}, r=\frac{1}{5}h,$$

所以体积 V 和高度 h 间的函数关系为

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{5}h\right)^2 h=\frac{1}{75}\pi h^3,$$

它的定义域为 $0\leqslant h\leqslant 10$.

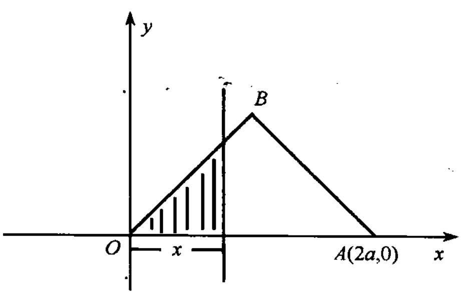


图 1-13

例 11　一斜边为 $2a$ 的等腰直角三角形，如图 1-13 所示. 直线 L 开始位置与 y 轴重合，以匀速沿 x 轴正向平移，求直线 L 扫过的三角形内部的面积 $S=S(x)$ 的函数关系式.

解　当 $0\leqslant x\leqslant a$ 时，$S=\frac{1}{2}x^2$，当 $a<x\leqslant 2a$ 时，未

扫过的三角形内部面积为$\frac{1}{2}(2a-x)^2$,从而所求面积等于$\triangle OAB$的面积减去未扫过的面积,即

$$S=a^2-\frac{1}{2}(2a-x)^2=-\frac{1}{2}x^2+2ax-a^2.$$

当$x>2a$时,$S=a^2$,从而函数S可用分段函数表示:

$$S(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x^2, & 0\leqslant x\leqslant a,\\ -\frac{1}{2}x^2+2ax-a, & a<x\leqslant 2a,\\ a^2, & x>2a.\end{cases}$$

例 12 复利是一种“利滚利”的计息方法.现有p元本金,r是一个计息期内的利率,若按复利计算,试求n个计息期后的本金和(本金+利息).

解 用A表示n个计算期后的本金和,

当$n=1$时,利息为pr,从而$A=p+pr=p(1+r)$.

当$n=2$时,本金和中的本金p和利息pr都将产生利息,从而利息为$p(1+r)r$,所以$A=p(1+r)+p(1+r)r=p(1+r)^2$.

当$n=3$时,利息为$p(1+r)^2\cdot r$,从而

$$A=p(1+r)^2+p(1+r)^2\cdot r=p(1+r)^3.$$

一般地,本金和的函数关系为$A=p(1+r)^n$ (可用归纳法证明).

最后,我们说明问题 2 中计算星期几的方法.

设x为公元的年数,y是从这年的元旦到这一天(包括这一天)的天数,由

$$n=x-1+\left[\frac{x-1}{4}\right]-\left[\frac{x-1}{100}\right]+\left[\frac{x-1}{400}\right]+y$$

计算出n以后,除以 7,余数为几,便为星期几.

例如,2001 年 1 月 1 日,对应的$x-1=2001-1=2000$,$y=1$代入公式有

$$n=2000+\left[\frac{2000}{4}\right]-\left[\frac{2000}{100}\right]+\left[\frac{2000}{400}\right]+1=2486,$$

因此 $n\equiv 1(\mathrm{mod}7)$,即 2001 年 1 月 1 日为星期 1.

习题 1-1

1. 试讨论 Dirichlet 函数的有界性、周期性、奇偶性.

2. 下列各对函数中哪些是相同的函数?

(1) $y=(\sqrt{x})^2$ 与 $y=|x|$

(2) $y=e^{\ln x}$与$y=x$

(3) $y=\frac{x^2-4}{x-2}$与 $y=x+2$

(4) $y=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ 与 $y=\sqrt{x^2}$

3．判定下列函数的奇偶性：

(1) $y=\sin^2 x$　　(2) $y=\dfrac{e^x+1}{e^{-x}+1}$

(3) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$　　(4) $y=|x+1|-|x-1|$

(5) $y=x^2$　　$x\in[-1,1)$

4．求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{x^2}{1+x}$　　(2) $y=\sqrt{3x-x^2}$

(3) $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{x-3}+\ln(5-x)$　　(4) $y=\tan 2x$

(5) $y=\arcsin(1-x)+\ln\dfrac{1+x}{1-x}$　　(6) $y=\dfrac{x}{\sin x}$

(7) $y=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$　　(8) $y=\begin{cases} x & -2<x\leqslant 0 \\ -x+1 & 0<x\leqslant 2 \\ e^x & 2<x\leqslant 4 \end{cases}$

5．求下列函数的反函数

(1) $y=\sqrt{x^2+1}$　　(2) $y=1+\ln(x-2)$

(3) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$　　(4) $y=\cos x, x\in[0,\pi]$

6．指出下列函数的复合过程

(1) $y=\sin^2 x$　　(2) $y=\sqrt[3]{(4+3x)^2}$

(3) $y=\ln\tan\dfrac{x}{2}$　　(4) $y=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$

(5) $y=\arctan e^{x^2}$　　(6) $y=3^{\cos(\ln x)}$

7．设 $f(x)=\begin{cases} e^x & x\leqslant 0 \\ 1+\sin x & 0<x\leqslant \pi \\ \dfrac{\pi}{x} & x>\pi \end{cases}$

试求 $f(-1), f(0), f\left(\dfrac{\pi}{2}\right), f(\pi), f(2\pi)$．

8．已知 $f(x)=2^x$，$g(x)=x^2$．试求 $f[f(x)], f[g(x)], g[f(x)], g[g(x)]$．

9．已知 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$，试求 $f(x), f[f(x)]$ 的定义域．

10．试按单利计算本节例 12 中的本金和．

11．火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50kg 时按基本运费计算，每千克收取 0.30 元，当超过 50kg 时，超重部分按每千克 0.45 元收取，试建立行李费 y（单位：元）与重量 x（单位：kg）之间的关系，并画出函数的图形．