經濟統計應用數學講義

中國人民大學
數學教研室
北京 一九五三年

中國人民大學數學教研室

經濟統計應用數學講義

北京　一九五三年

書號：總7—16

經濟統計應用數學講義

編　者：中國人民大學
　　　　數學教研室

出版者：中國人民大學

印刷者：中國人民大學印刷廠

（本校教材，請勿翻印）

一九五三年二月一日第一版第二次印刷

3322(300+20+3002)

目　　錄

第一章　解析幾何基礎

§1. 函數的定義. 在一問題中某文字之值確定不變者，叫做常數如1,2,3,……及a,b,c,……設其值不定而可表某範圍內任意一值者，叫做變數．如x,y,z…….設有兩個變數y與x，對x的任一值 y有一值與它相應，即y之值隨x的值而定，則稱y爲x的函數，其中x叫做自變數，y叫做因變數，常以下列記號表示

$$y=f(x) \text{ 或 } y=\phi(x) \text{ 或 } F(x,y)=0\text{等等.}$$

例如　$y=x^2$, $y=2x+1$. $F(x,y)=ax+by+c=0$等，y的值均隨x的值而定，故均爲x的函數；又如

1. 正方形的面積A是邊長x的函數$A=x^2$.
2. 圓周長l是半徑r的函數 $l=2\pi r$.
3. 圓面積A是半徑r的函數 $A=\pi r^2$.
4. 球體積V及表面積A都是半徑r的函數 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$ 及 $A=4\pi r^2$.
5. 自由落下體的距離S是時間t的函數 $S=\dfrac{1}{2}gt^2$.
6. 壓力是體積的函數或體積是壓力的函數 $PV=C$.
7. 在經濟方面單位商品零售價格p乘全部賣出商品數量q，等於銷售流轉額 $U=pq$，即商品流轉額是全部

賣出商品數量的函數.

8. 在農業中"耕耘愈深，則平均收穫率愈高"是蘇聯統計中已經證明的事實，故平均收穫率是耕耘深度的函數.

§2. 函數的圖示法. 將函數$y=f(x)$中的x,y看作笛卡爾坐標平面上之點的坐標，對於x的每一值，有一相應的$y=f(x)$值，即可決定平面上之一點，故由方程式可求得無窮多之點，先求出若干適當多的點，作一平滑曲線，即爲函數的圖形表示.(參看代數講義下冊第十六章)

曲線與方程$y=f(x)$之關係爲(1) 凡坐標能適合於方程之一切點，均在曲線上.反之(2) 曲線上一切點的坐標都適合於方程.

曲線由方程表示而方程$y=f(x)$叫做曲線的方程，曲線亦叫做方程的軌跡，故曲線圖形與方程相互對應，由方程以研究曲線圖形或軌跡的性質是解析幾何的基礎. 另一方面由曲線圖形的形狀與變化以研究函數本身所表的性質或規律，則係解析數學和應用數學常用的一般方法.

例如在x軸上所有點的縱坐標皆爲0. 故 $y=0$是x軸的方程;同樣y軸的方程是$x=0$; 平分第一及第三象限的直線方程是$y=x$;平分第二及第四象限的直線方程是$y=-x$.

在經濟方面 (1) 勞動生產率x提高，則價值y降低的函數$y=f(x)$ 及 (2) 在其他條件不變下，有機構成E提高，則利潤率ρ'降低的函數$\rho'=\phi(E)$均爲下面單調遞減的圖形:

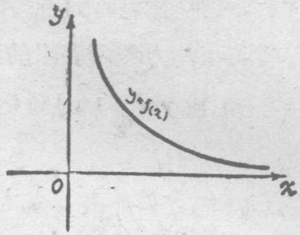

圖1

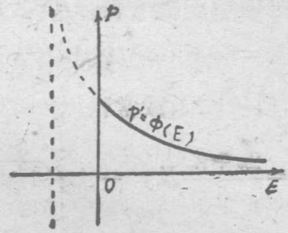

圖2

§3. 函數的分類. 以下常見下列各種函數:

(一)單值函數.多值函數. 若對應於自變數x之任一值,因變數y有單個值或二個值以上,則$y=f(x)$叫做單值函數或多值函數.例如$y=\pm\sqrt{x}$是二值函數.單值函數的圖形與x軸的垂線相交只有一點.多值函數的圖形與x軸的垂線相交就依函數之爲二值n值而有兩個交點n個交點.因n值函數的圖形可分爲n個單支,例如$y=\pm\sqrt{x^2-4}$的圖形,當$y=+\sqrt{x^2-4}$時,它的圖形是在x軸上側的半圓.當$y=-\sqrt{x^2-4}$時,是在x軸下側的半圓.

(二)減函數.增函數. 若自變數x之值增加而因變數y之值隨着減小或隨着增加,則$y=f(x)$分別叫做減函數或增函數.若y之值一方面的減小或一方面的增加,則$y=f(x)$分別叫做單調減函數或單調增函數.

(三)偶函數與奇函數. 若$f(-x)=f(x)$則$y=f(x)$叫做x的偶函數.例如$y=x^2$, $y=\pm\sqrt{x^2-4}$.若$f(-x)=-f(x)$則$y=f(x)$叫做x的奇函數,例如$y=x^3$.

(四)顯函數與隱函數. 由未經解出的方程所表出的函

數叫做隱函數常表以$f(x,y)=0$，$F(x,y)=0$或$\phi(x,y)=0$等，如$2x-5y+3=0$及$x^2+y^2=5$. 由已經解出的方程所表出的函數，叫做顯函數常表以$y=f(x)$，$y=F(x)$ 或 $y=\phi(x)$等，如

$$y=\frac{2x+3}{5}\text{及}y=\pm\sqrt{4-x^2}.$$

(五)反函數及其圖形． 將某數先乘以2再除以2，或將某數先平方再開方叫做互逆運算．將後者以式表示為

若$y=x^2$則$x=\sqrt{y}$. x^2 及 $\sqrt{y}$ 叫做互為反函數的關係．兩函數若其函數關係互為相反，則其圖形對於$y=x$直線相對稱．如 $y=x^2$，$y=\sqrt{x}$ 二函數之圖形如圖3所示．

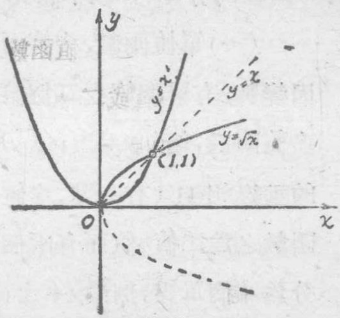

圖3

§4. 二點間的距離．

在笛卡爾坐標平面內，已知兩點的坐標$A(x_1,y_1)$及$B(x_2,y_2)$，求其間的距離AB. 就右圖4 因$\triangle ABC$為直角三角形，由商高定理．

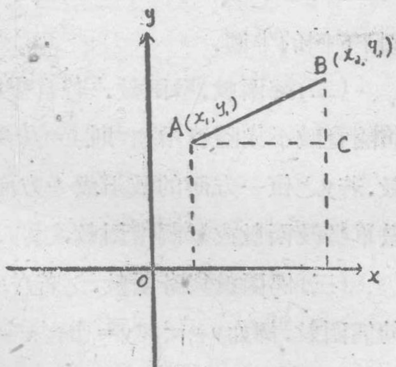

圖4

$$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{CB}^2$$

$$\therefore\quad \overline{AB}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

$\therefore AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ ………………… (1)

〔例〕 求$P(1,2)$,$Q(3,6)$兩點間的距離.

$x_1=1$, $y_1=2$	$\therefore\ d=\sqrt{(3-1)^2+(6-2)^2}$
$x_2=3$, $y_2=6$	$=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}=\underline{\underline{4.47}}$ (答).

題1. 求下面二點間的距離.

(a) $P(1,2)$,$Q(4,3)$ (答) (a) $\sqrt{10}$

(b) $P(1,2)$,$Q(-4,3)$ (答) (b) $\sqrt{26}$

題2. 一三角形之三頂點是$A(-4,-1)$, $B(2,1)$, $C(3,-2)$求其三邊之長並示明其爲一直角三角形.

(答) $AB=2\sqrt{10}$, $BC=\sqrt{10}$, $CA=5\sqrt{2}$,

$(\overline{CA}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)$

§**5**. **定比分點與中點的坐標.** 設$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$;

求一點$P(x,y)$ 以 $\dfrac{AP}{PB}=\lambda$ 的比值,分AB爲二段.由圖5 知

$A_1P_1:P_1B_1=AP:PB$ 即

$(x-x_1):(x_2-x)=\lambda$,

$x(1+\lambda)=x_1+\lambda x_2$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad x&=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\ \text{同理得}\quad y&=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\end{aligned}\right\}\cdots(2)$$

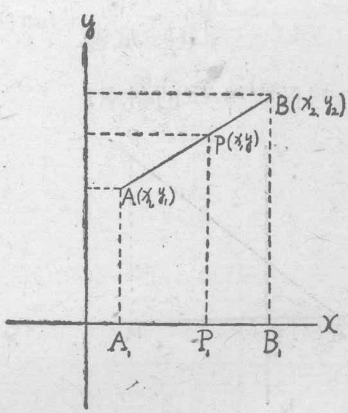

圖5

若$P(x,y)$居AB之內，則定比爲正，叫做內分點；若$P(x,y)$居AB之外，則定比爲負，叫做外分點·特例，若P爲AB的中點，則$\lambda=1$而得

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

〔例〕 一點$P(x,y)$將經過$A(2,-5)$,$B(-3,4)$之直線分做$\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{2}{3}$的比，試求此$P$點的坐標.

代入公式得

$$x=\frac{2-\frac{2}{3}\cdot 3}{1+\frac{2}{3}}=0,\quad y=\frac{-5+\frac{2}{3}\cdot 4}{1+\frac{2}{3}}=-\frac{7}{5}.$$

§6. 直線的斜率. 直線與x軸之正方向相交之角叫做斜角θ.下圖內二線分的比

$$\frac{MP}{AM}=\frac{高}{底邊}=\tan\theta=m\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

叫做直線AP的斜率.

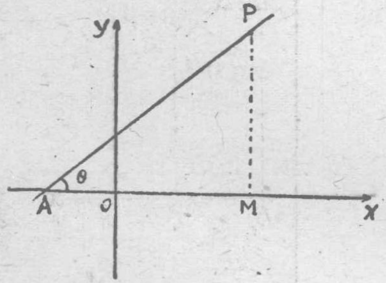

圖6

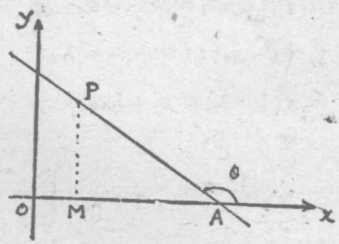

圖7

在圖6中，$AM>0, MP>0$

$$\therefore \text{斜率}=\frac{MP}{AM}=\tan\theta>0$$

在圖7中，$AM<0, MP>0$

$$\therefore \text{斜率}=\frac{MP}{AM}=\tan\theta<0$$

至於斜角，斜率的對應值由三角函數表查出，茲列一簡單對照表如下：

角的大小	0°	30°	45°	60°	90°	120°	150°	180°
斜　率	0	0.577	1	1.732	$\pm\infty$	-1	-0.577	0

當一直線和x軸平行時，它的斜角是0°或180°．因此，一直線的斜角最小是0°最大是180°．如下列各圖所示：

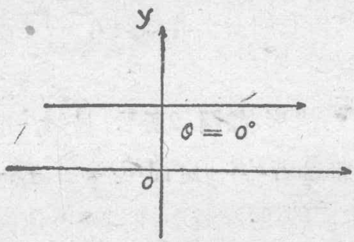

圖8

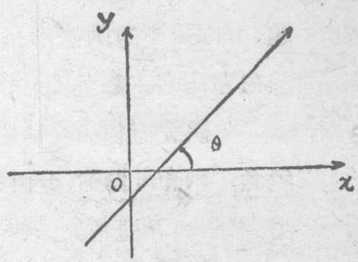

圖9

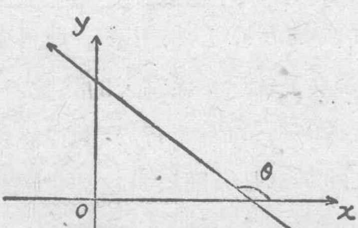

圖10

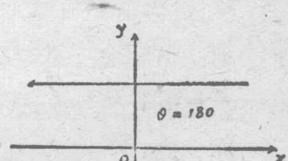

圖11

故$0 \leq \theta \leq 180°$ 而

$-\infty \leq \tan\theta \leq \infty$.

又如圖12所示

$$m=\tan\theta=\frac{MP}{AM}=\frac{RQ}{PR}$$

$$=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdots\cdots\cdots(5)$$

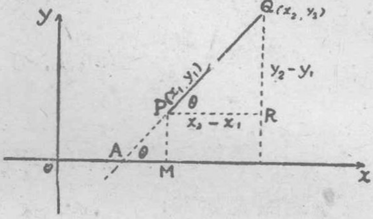

圖12

爲兩點$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$所定直線的斜率以坐標表出的重要公式.

§7. 斜率和斜角的關係. 一已知直線最重要的性質，爲共對於二定坐標軸ox,oy的方位,即由上節斜角，斜率所决定的問題.有兩種不同的情形一是直線由左向右上昇如圖9；一是直線由左向右下降如圖10的情形.

先研究直線由左向右上昇的情形,如圖12所示,易知θ是銳角，斜率m爲正,並由(5)可推知若PR一定而RQ增加,則m增大,斜角θ也增大,若RQ一定而PR逐漸減小,則斜率m逐漸增大,斜角θ也逐漸增大,即斜率m增大,則斜角θ也增大.反之亦成立若PR繼續逐漸減小而趨近於0以爲極限，則斜率m由繼續逐漸增大而最後因太大了就以正無窮大的記號∞,表示共概念，這時斜角θ趨近於$90°$.當PQ平行於x軸時斜角$\theta=0°$，$RQ=0$ 故斜率$m=0$.即斜率是0,則斜角也是$0°$反之亦成立.

總結以上所述知：若斜率m是任一正實數，則斜角都是銳角. 斜率$m=0$時,則斜角$\theta=0°$，當斜率由0逐漸增大,則

斜角隨着也逐漸增大，當斜率繼續無限的增大而以∞表示其意義時，則斜角$\theta=90°$.以上諸情形反之都能成立.

再研究直線由左向右下降的情形.如圖13所示，易知斜角θ是鈍角，斜率m爲負並由(5)可推知.若PR一定而RQ增加，則m之絕對值增大，斜角θ也增大.若RQ一定而PR之絕對值逐漸減小，則斜率m之絕對值逐漸增大，斜角θ也逐漸增大，即斜率m的絕對值增大，則斜角θ也增大，反之亦成立.若PR之絕對值繼續逐漸減小而趨近於0以爲極限，則斜率m之絕對值由繼續逐漸增大而最後因爲太大了就以負無窮大的記號$-\infty$表示它的概念.這時斜角θ趨近於$90°$當PQ平行於x軸時，斜角$\theta=180°$，$RQ=0$故斜率$m=0$.即斜率由負數趨近於0時.則斜角趨近於$180°$.反之亦成立.

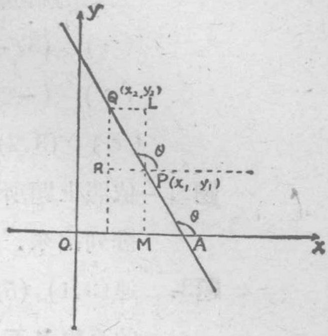

圖13

總結以上所述：若斜率m是任一負實數，則斜角都是鈍角.斜率m由負數趨近於0時，則斜角趨近於$180°$.當斜率m之(絕對值減小)值增大，則斜角隨着也逐漸增大，當斜率m之絕對值繼續無限的增大而以$-\infty$表示其意義時，則斜角$\theta=90°$.以上諸情形反之都能成立.

易見在此情形y爲x的單調減函數.當x增加時y反而減小，其減小的速率，以斜率m表之如下式所示：

$$m=\tan\theta=\frac{MP}{AM}=\frac{RQ}{PR}=\frac{LP}{QL}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}<0$$

題1. 求下列各對點間之直線的斜率，作出直線並說明它們的斜角各是什麼角?

(a) (3,−2), (5,−7) (b) (−2,3), (5,−7)

(c) (−2,−3), (3,2) (d) (−3,3), (2,3)

(e) (3,2), (5,−7) (f) (3,−4), (−2,−4).

題2. 依照上題所求得的斜率值，把斜角依大小的順序排列出來.

題3. 連(3,1),(5,4)兩點的直線和連(7,3),(5,0)兩點的直線是否平行?

題4. 用斜率證明(1,2),(2,4),(2,6)三點在一直線上. 又(1,3),(2,3),(3,9)三點是否亦在一直線上?

§8. 直線的方程及其圖形. 直線是曲線之最簡單的情形. 茲求其方程.

(一) 過原點的直線方程. 在過原點O之直線OP上取一點$A(1,m)$並假定$P(x,y)$為OP上其他任一點，則如圖14 所示得下比例式

$$y:x=m:1$$

故得直線方程為

$$y=mx\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

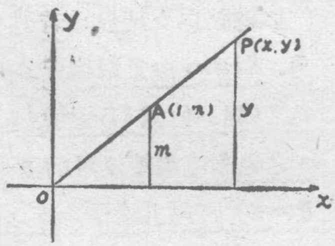

圖14

其中m是直線的斜率. 一般言之比值為一常數m之二變數x,y間之函數關係式表一斜率為m且通過原點之一直線

的規律。

〔例1〕 生產支出總額(C)常爲生產數量(q)之K倍的場合,即服從一直線$C=Kq$的規律.

〔例2〕 若生產一磅糖的生產費是m而x爲糖的磅數,則$y=mx$乃生產x磅糖的總生產費.

題1. 作下列直線方程的圖形.

(a) $y=x$ (b) $y=-x$ (c) $y=\sqrt{3}x$

〔提示〕 斜率各爲 (a)1,(b)-1,(c) $\sqrt{3}$.

(二) 不過原點的直線方程. 茲求平行於過原點之直線$y=mx$且在y軸上之截距爲$OO'=b$之直線的方程.

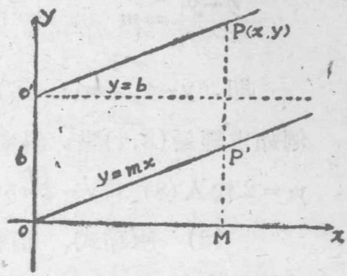

圖15

因 $y=PM=MP'+P'P=mx+b$

故得 $y=mx+b$……(7)

這方程式一般叫做斜截式.

題2. 作下列直線.

(a) $y=2x+1$ (b) $y=-x+2$〔提示〕先求m與b的值.

題3. 試求平行於x軸,在y軸上之截距爲b之直線方程及平行於y軸,在x軸上之截距爲a之直線方程.

(答) $y=b,x=a$.

(三) 由已知條件所決定的直線方程.

(1) 點斜式. 一直線經過$P_1(x_1,y_1)$點,斜率是m.假定$P(x,y)$是直線上任一點.則因$P_1(x_1,y_1)$和$P(x,y)$連線的斜率與m相等,得

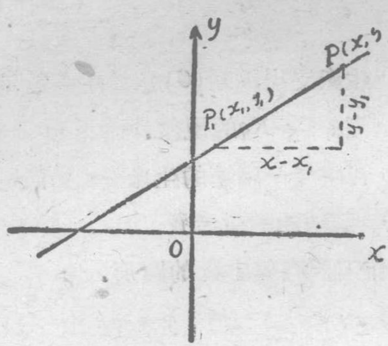

圖16

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m$$

即 $y-y_1=m(x-x_1)$ ………………………………… (8)

例如求經過(3,2)點，斜率是5的直線方程.因$m=5$，$x_1=3$，$y_1=2$代入(8)得$y-2=5(x-3)$.化簡得$5x-y=13$.

(2) 兩點式. 直線經過$P_1(x_1,y_1)$和$P_2(x_2,y_2)$兩點，則斜率是

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

代入(8)得

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots (9)$$

〔例〕 經過(1,2)及(−3,5)二點的直線方程是

$$y-2=\frac{5-2}{-3-1}(x-1)\text{即}3x+4y-11=0.$$

(3) 截距式. 一直線在x軸上的截距爲a，在y軸上的

截距爲b,則經過$A(a,o)$,$B(o,b)$兩點.代入(8)得

$$y-o=\frac{b-o}{o-a}(x-a)$$

即 $\frac{y}{b}=-\frac{x}{a}+1$

$\therefore\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ………………………………(10)

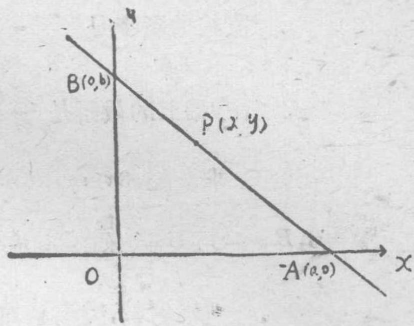

圖17

〔注意〕 直線作圖以截距式最簡便.

〔例〕 求作直線 $x-y+1=0$ 的圖形. 移項得 $x-y=-1$.

$\therefore\quad \frac{x}{-1}+\frac{y}{1}=1.$

故x軸上的截距$a=-1$,y軸上的截距$b=1$.

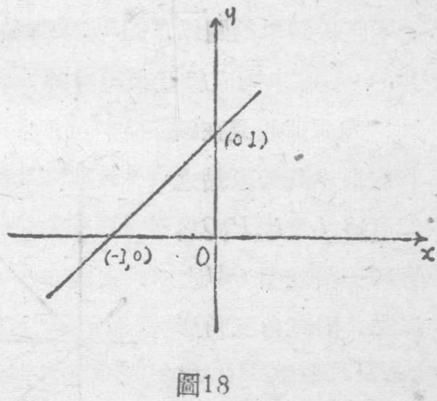

圖18

(四) 普通式. 一般二元一次方程$Ax+By+C=0$恒表一直線因若$B\neq 0$,移項得$By=-Ax-C$

$$\therefore\ y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

與(7)相比較,知