连续与离散系统常用数学变换

◎ 刘小云 ／编著

人民交通出版社
China Communications Press

Lianxu Yu Lisan Xitong Changyong Shuxue Bianhuan

连续与离散系统常用数学变换

刘小云　编著

人民交通出版社

内 容 提 要

本书根据工程应用涉及的动态系统大都可归为连续系统或离散系统的实际情况，从数学专业的角度，将其中主要应用的数学变换集中起来编为一书. 全书在重视基本理论、基本方法的基础上，强调理论联系实际.

本书分为4章，主要内容是：Fourier 变换，Laplace 变换，双边 Z 变换，单边 Z 变换. 为各章编写了小结和点注，以帮助读者抓住重点，提高学习效率. 各章附有习题，供读者练习之用. 书后附有 Fourier 变换简表，Laplace 变换简表，双边、单边 Z 变换简表及习题答案，以供读者查用参考.

本书可供高等院校工科专业本科生选作教材，也可作为工科研究生的教学参考书，或供广大工程技术人员参考使用.

图书在版编目（CIP）数据

连续与离散系统常用数学变换/刘小云编著. —北京：人民交通出版社，2009.6
ISBN 978-7-114-07725-8

Ⅰ.连… Ⅱ.刘… Ⅲ.①连续系统－变换－高等学校－教材②离散系统－变换－高等学校－教材 Ⅳ.0231

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 066008 号

书　　名：连续与离散系统常用数学变换
著 作 者：刘小云
责任编辑：林宇峰
出版发行：人民交通出版社
地　　址：(100011) 北京市朝阳区安定门外外馆斜街 3 号
网　　址：http://www.ccpress.com.cn
销售电话：(010) 59757969，59757973
总 经 销：北京中交盛世书刊有限公司
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京鑫正大印刷有限公司
开　　本：787 × 1092　1/16
印　　张：10.25
字　　数：262 千
版　　次：2009 年 7 月 第 1 版
印　　次：2009 年 7 月 第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-114-07725-8
印　　数：0001－1000 册
定　　价：20.00 元

前　言

工程应用涉及的动态系统大都可归为连续系统或离散系统. 连续系统响应的控制方程常为微分方程或方程组,离散系统响应的控制方程常为差分方程或方程组,在求解这些方程、方程组时,最常用的数学变换是 Fourier 变换、Laplace 变换和 Z 变换. Fourier 变换、Laplace 变换能将分析运算(指微分、积分运算)转化成代数运算,从而可将一些偏微分方程转化成常微分方程,可将一些常微分方程转化成代数方程;Z 变换可将一些差分方程转化成代数方程,它在求解差分方程、方程组中的作用与 Fourier 变换、Laplace 变换在求解微积分方程中的作用是类似的,重要性是相同的. 它们还能将卷积运算转化为乘积运算,又是连续系统和离散系统进行频域分析不可缺少的工具,所以 Fourier 变换、Laplace 变换、Z 变换是连续与离散系统既常用又重要的三大变换. 从数学角度讲,工科大学生,尤其是电子、通信、自动控制类各专业学生在学习 Fourier 变换、Laplace 变换的同时,还应学习 Z 变换. 出于此,作者以这三大变换为内容,将其编著为一书,并命名为《连续与离散系统常用数学变换》.

本书力求突出以下几个特点:

(1)在建立三大变换基本概念时,尽量联系实际,使其来之自然,以减少读者在理解基本概念上的抽象性.

(2)在三大变换的性质,逆变换的编写中,力求全面、深入. Z 变换在此前常被编写在《信号与线性系统分析》丛书中,在其概念的表述、理论的证明上偏于工科化. 本书从数学专业的角度对 Z 变换的概念进行了叙述,对其结论进行了证明,即对 Z 变换进行了数学上的"锤炼". 本书中,例题解答力求介绍更多方法,各章编写了小结与点注,以帮助读者抓住要点. 第 3 ~4 章的小结与点注是从对双边、单边 Z 变换进行比较的角度编写的,使读者对其概念易于区别,避免进入误区.

(3)本书强调了三大变换的应用. 除阐述在求解微积分方程、差分方程中的应用外,特别编写了线性系统的动态特性分析,通过对一阶线性系统动态特性的分析,对移动载荷下 Kelvin 黏弹性地基上黏弹性梁的动态响应的分析,展示了 Fourier 变换和 Laplace 变换在解决重大工程问题中的重要作用,后者是作者的科研成果,其用意也在于扩展读者的应用视野.

本书成稿之后,封建湖教授、魏勇教授、赵祥模教授对书稿进行了审阅并提出了宝贵意见,在此深表感谢. 刘军妮同学,张红梅、田润利、何丽梅硕士,张春国博士在搜集资料、绘图制表等方面做了大量工作,在此一并表示感谢.

由于作者水平有限,书中不妥之处在所难免,恳请专家、同行和广大读者批评指正.

编　者

2009 年 1 月

目　　录

第 1 章　Fourier 变换

在分析连续与离散系统中，Fourier（傅里叶）变换、Laplace（拉普拉斯）变换和 Z 变换是重要的、常用的三大数学变换. Fourier 变换、Laplace 变换能将一些分析运算（指微分、积分运算）转化成代数运算，从而可将一些偏微分方程转化成常微分方程，将一些常微分方程转化成代数方程；Z 变换可将一些差分方程转化成代数方程. 它们还能将卷积运算转化为乘积运算，是连续系统和离散系统进行频域分析不可缺少的工具.

本章先介绍 Fourier 变换，Laplace 变换和 Z 变换分别在第 2 章、第 3 章和第 4 章介绍.

1.1　Fourier 变换的理论基础、基本性质

1.1.1　周期函数 Fourier 级数的复指数形式

关于周期函数 $f_T(t)$ 的 Fourier 级数，我们已经知道有如下定理.

定理 1.1.1　设 $f_T(t)$ 是周期为 T 的周期函数，若 $f_T(t)$ 满足 Dirichlet（狄利克雷）条件（简称为狄氏条件），即

（1）在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点；

（2）在一个周期内至多有有限个极值点.

则在 $f_T(t)$ 的连续点上，

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\frac{2n\pi}{T}t + b_n\sin\frac{2n\pi}{T}t\right], \tag{1.1.1}$$

在 $f_T(t)$ 的间断点 t 处，式（1.1.1）的右边收敛于

$$\frac{f_T(t-0)+f_T(t+0)}{2}.$$

对式（1.1.1），令 $\omega_T = \frac{2\pi}{T}$，则在 $f_T(t)$ 的连续点上，

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos n\omega_T t + b_n\sin n\omega_T t\right]. \tag{1.1.2}$$

其中

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\,\mathrm{d}t, \tag{1.1.3}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\cos n\omega_T t\,\mathrm{d}t = a_{-n},\quad n = 1,2,3,\cdots. \tag{1.1.4}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\sin n\omega_T t\,\mathrm{d}t = -b_{-n},\quad n = 1,2,3,\cdots. \tag{1.1.5}$$

称式(1.1.2)为$f_T(t)$的 Fourier 级数的三角形式.

因
$$\cos n\omega_T t = \frac{e^{jn\omega_T t} + e^{-jn\omega_T t}}{2},$$①

$$\sin n\omega_T t = \frac{e^{jn\omega_T t} - e^{-jn\omega_T t}}{2j},$$

代入式(1.1.2)并注意到式(1.1.4)、(1.1.5)中的 $a_n = a_{-n}, b_n = -b_{-n}$,得

$$f_T(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n - jb_n}{2}e^{jn\omega_T t} + \frac{a_{-n} - jb_{-n}}{2}e^{j(-n)\omega_T t}\right].$$

令 $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \frac{a_n - jb_n}{2}$, $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$,

则
$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_T t}, \tag{1.1.6}$$

这就是$f_T(t)$的 Fourier 级数的复指数形式.

其中
$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\left[\cos n\omega_T t - j\sin n\omega_T t\right]dt$$

即
$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-jn\omega_T t}dt, n = 0, \pm 1, \pm 2\cdots. \tag{1.1.7}$$

所以,式(1.1.6)还可以写成

$$f_T(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)e^{-jn\omega_T t}dt\right]e^{jn\omega_T t} \tag{1.1.8}$$

1.1.2 非周期函数的 Fourier 积分

对于满足定理 1.1.1 条件的周期函数,在$f_T(t)$的连续点上,式(1.1.8)成立. 而对于非周期函数,有没有类似的结论呢?

为此先寻求非周期函数与周期函数的关系.

设$f(t)$是一非周期函数,根据$f(t)$,构造周期函数$f_T(t)$. 取 T>0,

当 $t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$时,取$f_T(t) = f(t)$,当

$t \notin \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$时,取$f_T(t)$为将$\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$上的$f(t)$进行周期为 T 的周期性延拓而得到的函数(如图 1.1.1),从而

$$f_T(t) = f(t), t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right),$$

$$f_T(t+T) = f_T(t), t \in (-\infty, +\infty)$$

且
$$\lim_{T\to+\infty} f_T(t) = f(t). \tag{1.1.9}$$

① 数学中常用"i"表示虚数单位,这里按照电工学及诸多工程应用叙述的习惯用"j"表示.

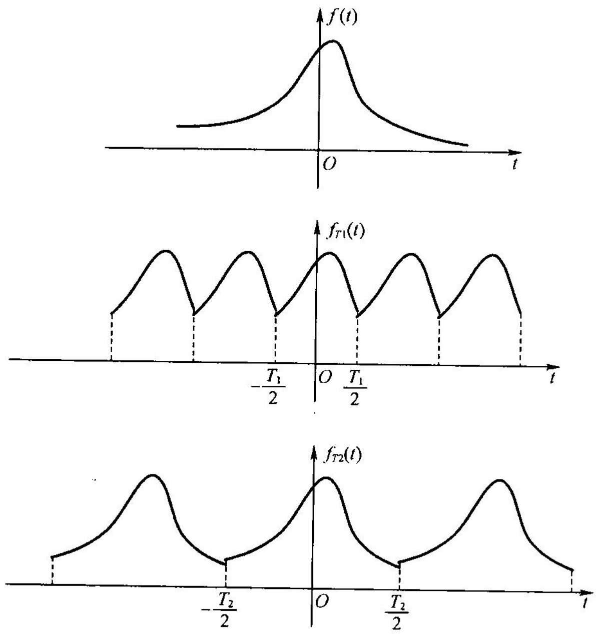

图 1.1.1　非周期函数与周期函数的关系示意图

称函数 $f_T(t)$ 为与 $f(t)$ 对应的周期函数. 从 $f_T(t)$ 的构造知,任一非周期函数 $f(t)$,都可以根据上述方法构造出与之对应的周期函数 $f_T(t)$,使式(1.1.9)成立. 式(1.1.9)揭示了非周期函数与周期函数间的关系.

若 $f_T(t)$ 满足定理 1.1.1 的条件,则由式(1.1.8)得

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\,\mathrm{e}^{-jn\omega_T t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{jn\omega_T t}\,\frac{2\pi}{T},$$

令 $n\omega_T = n\dfrac{2\pi}{T} = \omega_n, \Delta\omega_n = \omega_n - \omega_{n-1} = \dfrac{2\pi}{T}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$

则

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\,\mathrm{e}^{-j\omega_n t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{j\omega_n t}\Delta\omega_n. \tag{1.1.10}$$

因 $\Delta\omega_n = \dfrac{2\pi}{T}$ 与 n 无关,所以当 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 时,ω_n 均匀地分布在实数轴上(如图 1.1.2). 形成了 $(-\infty, +\infty)$ 上的一个关于 ω 的分划,而式(1.1.10)右端恰为函数

$$\Phi(\omega, T, t) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t)\,\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{j\omega t}$$

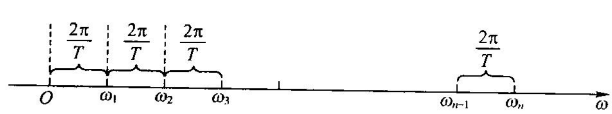

图 1.1.2　以 $\Delta\omega_n = 2\pi/T$ 为间隔的等距分划

关于上述分划的一个积分和.

当$f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积(即$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t$收敛)时,对式(1.1.10)两侧,令$T\to+\infty$,则$-\frac{T}{2}\to-\infty$,$\frac{T}{2}\to+\infty$,并注意到$f_T(t)\to f(t)$,有

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega. \tag{1.1.11}$$

称此式为非周期函数$f(t)$的 Fourier 积分公式,简称为傅氏积分公式,它的作用如同周期函数展成 Fourier 级数一样. 将此结论叙述为下面定理.

定理 1.1.2 (Fourier 积分定理)若定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数$f(t)$满足下列条件:

(1) $f(t)$在任一有限区间上满足 Dirichlet 条件;

(2) $f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上绝对可积,即$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\mathrm{d}t$收敛,则在$f(t)$的连续点上,$f(t)$的 Fourier 积分公式成立,即

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega. ① \tag{1.1.12}$$

在$f(t)$的间断点t处,式(1.1.12)右端收敛于$\frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$.

由 Euler(欧拉)公式:$\mathrm{e}^{jz}=\cos z+j\sin z$($z$为任意复数),

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\mathrm{e}^{-j\omega(\tau-t)}\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(\tau-t)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega\\&\quad-\frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\sin\omega(\tau-t)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

其中第二项是ω的奇函数对ω在对称区间上的积分,其值为0,所以$f(t)$的 Fourier 积分公式的三角形式为:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(\tau-t)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega\\&=\begin{cases}f(t), & f(t)\text{ 在 }t\text{ 处连续}\\ \frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}, & f(t)\text{ 在 }t\text{ 处间断.}\end{cases}\end{aligned} \tag{1.1.13}$$

因为$\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(\tau-t)\mathrm{d}\tau$是$\omega$的偶函数,所以$f(t)$的 Fourier 积分公式的三角形式为:

---

① 式中的广义积分都是在主值意义下的,主值意义是指$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{N\to+\infty}\int_{-N}^{+N}f(x)\mathrm{d}x$

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cos\omega(\tau-t)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega$$

或
$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)(\cos\omega t\cos\omega\tau+\sin\omega t\sin\omega\tau)\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega.$$

当$f(t)$为奇函数时,注意到$f(\tau)\cos\omega\tau$、$f(\tau)\sin\omega\tau$分别是τ的奇函数和偶函数,有

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\sin\omega t\mathrm{d}\omega. \tag{1.1.14}$$

当$f(t)$为偶函数时,注意到$f(\tau)\sin\omega\tau$、$f(\tau)\cos\omega\tau$分别是τ的奇函数和偶函数,有

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau\right]\cos\omega t\mathrm{d}\omega. \tag{1.1.15}$$

称式(1.1.14)、(1.1.15)分别为$f(t)$的 Fourier 正弦积分公式和余弦积分公式.

1.1.3 Fourier 变换及 Fourier 逆变换

定义 1.1.1 设$f(t)$满足 Fourier 积分定理的条件,则在$f(t)$的 Fourier 积分公式(1.1.12)中,称

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t \tag{1.1.16}$$

为函数$f(t)$的 Fourier 变换,简称为傅氏变换. 记作$\mathscr{F}[f(t)]$.

称
$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega \tag{1.1.17}$$

为函数$F(\omega)$的 Fourier 逆变换. 记作$\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]$.

还称$F(\omega)$为$f(t)$的像函数,$f(t)$为$F(\omega)$的像原函数,称 Fourier 逆变换公式(1.1.17)为 Fourier 变换的反演公式,公式(1.1.17)右边的表达式为$f(t)$的积分表达式.

根据式(1.1.14)、(1.1.15),做出定义如下:

当$f(t)$为奇函数时,称

$$F_s(\omega)=\int_0^{+\infty}f(t)\sin\omega t\mathrm{d}t \tag{1.1.18}$$

为$f(t)$的 Fourier 正弦变换,并记作$F_s(\omega)=\mathscr{F}_s[f(t)]$. 称

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}F_s(\omega)\sin\omega t\mathrm{d}\omega \tag{1.1.19}$$

为$F_s(\omega)$的 Fourier 正弦逆变换,并记作$f(t)=\mathscr{F}_s^{-1}[F_s(\omega)]$.

当$f(t)$为偶函数时,称

$$F_c(\omega)=\int_0^{+\infty}f(t)\cos\omega t\mathrm{d}t \tag{1.1.20}$$

为$f(t)$的 Fourier 余弦变换,并记作$F_c(\omega)=\mathscr{F}_c[f(t)]$. 称

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}F_c(\omega)\cos\omega t\mathrm{d}\omega \tag{1.1.21}$$

为$F_c(\omega)$的 Fourier 余弦逆变换,并记作$f(t)=\mathscr{F}_c^{-1}[F_c(\omega)]$.

例 1.1.1 求函数$\dfrac{\sin at}{t}$的 Fourier 变换,其中 $a>0$,为常数.

解
$$\mathscr{F}\left[\frac{\sin at}{t}\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin at}{t}\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$
$$=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{t}[\sin(a+\omega)t+\sin(a-\omega)t]\mathrm{d}t.$$

由 Dirichlet(狄利克雷)积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\omega}{\omega}\mathrm{d}\omega=\frac{\pi}{2}$,得
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin at}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}a,$$

其中 $\mathrm{sgn}a=\begin{cases}1, & a>0,\\ 0, & a=0,\\ -1, & a<0,\end{cases}$ 为符号函数. 则

$$\mathscr{F}\left[\frac{\sin at}{t}\right]=\mathrm{sgn}(a+\omega)\cdot\frac{\pi}{2}+\mathrm{sgn}(a-\omega)\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$=\begin{cases}\pi, & |\omega|<a,\\ \dfrac{\pi}{2}, & |\omega|=a,\\ 0, & |\omega|>a.\end{cases}$$

例 1.1.2 设单个矩形脉冲函数(见图 1.1.3)
$$f(t)=\begin{cases}0, & |t|\geqslant\dfrac{\tau}{2},\\ E, & |t|<\dfrac{\tau}{2},\end{cases}\quad \tau>0,\text{为常数}.$$

求:(1) $f(t)$的 Fourier 变换;

(2) $f(t)$的积分表达式.

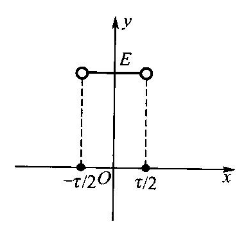

图 1.1.3 单个矩形脉冲函数

解 (1) $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$
$$=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}E\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$
$$=\left.\frac{-E\mathrm{e}^{-j\omega t}}{j\omega}\right|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}=\frac{2E\sin\dfrac{\omega\tau}{2}}{\omega}.$$

(2) $f(t)$的积分表达式为
$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{E}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\dfrac{\omega\tau}{2}}{\omega}\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega.$$

例 1.1.3　对指数衰减函数 $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ e^{-\beta t}, & t\geqslant 0\end{cases}$，其中 $\beta>0$，为常数，

求：(1) $f(t)$ 的 Fourier 变换；

(2) $f(t)$ 的积分表达式；

(3) 证明含参变量的广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & t=0,\\ \pi e^{-\beta t}, & t>0.\end{cases}$$

解　(1) $F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}e^{-\beta t}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t$

$$=-\frac{1}{\beta+j\omega}\left[e^{-(\beta+j\omega)t}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{\beta+j\omega}=\frac{\beta-j\omega}{\beta^2+\omega^2}.$$

(2) $f(t)$ 的积分表达式为：

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta-j\omega}{\beta^2+\omega^2}e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega.\tag{1.1.22}$$

(3) 由式(1.1.22)，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta-j\omega}{\beta^2+\omega^2}e^{j\omega t}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\beta-j\omega)(\cos\omega t+j\sin\omega t)}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t)}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega\\&\quad+\frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(\beta\sin\omega t-\omega\cos\omega t)}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega\\&=\begin{cases}f(t), & t\neq 0\\ \dfrac{f(0-0)+f(0+0)}{2}, & t=0\end{cases}=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{1}{2}, & t=0,\\ e^{-\beta t}, & t>0.\end{cases}\end{aligned}$$

上述两个在 $(-\infty,+\infty)$ 上的积分中，第一项被积函数是 ω 的偶函数，第二项被积函数是 ω 的奇函数，于是有

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{1}{2}, & t=0,\\ e^{-\beta t}, & t>0.\end{cases}$$

解得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\beta\cos\omega t+\omega\sin\omega t}{\beta^2+\omega^2}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}0, & t<0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & t=0,\\ \pi e^{-\beta t}, & t>0.\end{cases}$$

例 1.1.4　工程技术中，常用到钟形脉冲函数 $f(t)=Ae^{-\beta t^2}$，其中 $A,\beta>0$，为常数.

(1)求$\mathscr{F}[f(t)]$及$f(t)$的积分表达式;

(2)证明含参变量t的广义积分$\int_0^{+\infty} e^{\frac{-\omega^2}{4\beta}}\cos\omega t d\omega = \sqrt{\beta\pi}e^{-\beta t^2}$.

解 (1)由 Fourier 变换定义,

$$\mathscr{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt = A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta(t^2+\frac{j\omega}{\beta}t)}dt$$

$$= Ae^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta(t+\frac{j\omega}{2\beta})^2}dt.$$

令 $z=t+j\dfrac{\omega}{2\beta}$,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta(t+\frac{j\omega}{2\beta})^2}dt$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\int_{-R+\frac{j\omega}{2\beta}}^{R+\frac{j\omega}{2\beta}} e^{-\beta z^2}dz = \lim_{R\to+\infty}\int_{DC} e^{-\beta z^2}dz.$$

如图 1.1.4,因$e^{-\beta z^2}$在复平面上处处解析,由 Cauchy-Goursat(柯西 - 古萨)基本定理知:$\int_{ABCDA} e^{-\beta z^2}dz = 0$,

$$\int_{DC} e^{-\beta z^2}dz = \int_{AB} e^{-\beta z^2}dz + \int_{BC} e^{-\beta z^2}dz + \int_{DA} e^{-\beta z^2}dz, \tag{1.1.23}$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{DC} e^{-\beta z^2}dz = \lim_{R\to+\infty}\left(\int_{AB} e^{-\beta z^2}dz + \int_{BC} e^{-\beta z^2}dz + \int_{DA} e^{-\beta z^2}dz\right),$$

而

$$\int_{AB} e^{-\beta z^2}dz = \int_{-R}^{R} e^{-\beta t^2}dt$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\beta}}\int_0^R e^{-(\sqrt{\beta}t)^2}d(\sqrt{\beta}t) = \frac{2}{\sqrt{\beta}}\int_0^{\sqrt{\beta}R} e^{-u^2}du\,(u = \sqrt{\beta}t)$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{AB} e^{-\beta z^2}dz = \frac{2}{\sqrt{\beta}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{2}{\sqrt{\beta}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}},$$

其中,$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$$\left|\int_{BC} e^{-\beta z^2}dz\right| \leqslant \int_{BC} |e^{-\beta z^2}|\, ds$$

$$= \int_{BC} e^{-\beta(t^2-u^2)}ds$$

$$= e^{-\beta R^2}\int_0^{\frac{\omega}{2\beta}} e^{\beta u^2}du.$$

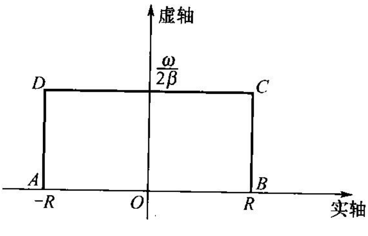

图 1.1.4

因 $\int_0^{\frac{\omega}{2\beta}} e^{\beta u^2}du$ 存在,$e^{-\beta R^2}\to 0(R\to\infty)$,

从而 $\lim\limits_{R\to+\infty}\left|\int_{BC} e^{-\beta z^2}dz\right| = 0$,

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{BC} e^{-\beta z^2}dz = 0.$$

同理,$\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{DA} e^{-\beta z^2}dz = 0$,由此可知,

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{DC} e^{-\beta z^2}dz = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}},$$

所以
$$\mathscr{F}[f(t)] = A\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}.$$

$f(t)$的积分表达式为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} A\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}e^{j\omega t}d\omega = \frac{A}{\sqrt{\beta\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\cos\omega t d\omega.$$

(2)因$f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,则在$(-\infty,+\infty)$上,

$$\frac{A}{\sqrt{\beta\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\cos\omega t d\omega = f(t) = Ae^{-\beta t^2},$$解得

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}\cos\omega t d\omega = \sqrt{\pi\beta}e^{-\beta t^2},\quad t\in(-\infty,+\infty).$$

1.1.4 Fourier 变换的性质

下面介绍 Fourier 变换的性质. 为了叙述方便,假设在以下各性质及证明中,凡进行 Fourier 变换的函数都满足 Fourier 积分定理的条件,且 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$, $F_i(\omega)=\mathscr{F}[f_i(t)]$, $i=1,2,\cdots$.

1. 线性性质

Fourier 变换与逆变换都具有线性性质,即

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)] &= \alpha\mathscr{F}[f_1(t)]+\beta\mathscr{F}[f_2(t)]\\ &= \alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega),\end{aligned}\tag{1.1.24}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}[\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega)] &= \alpha\mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega)]+\beta\mathscr{F}^{-1}[F_2(\omega)]\\ &= \alpha f_1(t)+\beta f_2(t).\end{aligned}\tag{1.1.25}$$

其中 α,β 是任意常数.

这个性质的正确性是易见的,它可由 Fourier 变换、Fourier 逆变换的定义及积分的线性性质直接推得. 它表明,线性组合的 Fourier 变换(或 Fourier 逆变换)等于 Fourier 变换(或 Fourier 逆变换)的线性组合.

2. 位移性质

(1)像原函数的位移性质:

$$\mathscr{F}[f(t-b)] = e^{-j\omega b}\mathscr{F}[f(t)] = e^{-j\omega b}F(\omega).\tag{1.1.26}$$

(2)像函数的位移性质:

$$F(\omega-\omega_0) = \mathscr{F}[e^{j\omega_0 t}f(t)].\tag{1.1.27}$$

其中 b,ω_0 是任意常数.

事实上,$\mathscr{F}[f(t-b)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-b)e^{-j\omega t}dt$ (令 $u=t-b$)

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-j\omega(u+b)} du$$
$$= e^{-j\omega b} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-j\omega u} du$$
$$= e^{-j\omega b} \mathscr{F}[f(t)].$$

式(1.1.26)得证. 类似地可证明式(1.1.27)的正确性.

这个性质表明:平移函数$f(t-b)$的像函数可通过未平移函数$f(t)$的像函数$F(\omega)$乘以因子$e^{-j\omega b}$表示出来;平移函数$F(\omega-\omega_0)$的原像可通过未平移函数$F(\omega)$的原像$f(t)$乘以$e^{j\omega_0 t}$表示出来.

例 1.1.5 求矩形单脉冲函数$f(t)=\begin{cases}E, & 0<t<\tau,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$的 Fourier 变换.

解 由例 1.1.2 知,当 $f_1(t)=\begin{cases}E, & |t|<\dfrac{\tau}{2},\\ 0, & |t|\geqslant\dfrac{\tau}{2},\end{cases}$ 时.

$$\mathscr{F}[f_1(t)]=F_1(\omega)=\frac{2E\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega},\text{而} f(t)=f_1\left(t-\frac{\tau}{2}\right),$$

所以 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]=\mathscr{F}\left[f_1\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]=2Ee^{-j\omega\frac{\tau}{2}}\dfrac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\omega}.$

3. 相似性质

$$\mathscr{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right),\ (a\neq 0,\text{为常数}). \tag{1.1.28}$$

证 $a>0$ 时,$\mathscr{F}[f(at)] = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-j\frac{\omega}{a}u}du = \dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$,

$a<0$ 时,$\mathscr{F}[f(at)] = \dfrac{1}{-a}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-j\frac{\omega}{a}u}du = \dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$, 其中 $u=at$,

故有 $\mathscr{F}[f(at)]=\dfrac{1}{|a|}F\left(\dfrac{\omega}{a}\right)$.

这个性质在几何上表现出缩放变化. 当$a>1$时,$f(at)$相对$f(t)$缩窄;而其 Fourier 变换$\mathscr{F}[f(at)]$相对于$\mathscr{F}[f(t)]$放宽、变低;当$0<a<1$时,$f(at)$相对于$f(t)$放宽;而$\mathscr{F}[f(at)]$相对$\mathscr{F}[f(t)]$缩窄、变高,故亦常称此性质为缩放性质.

特别地,当$a=-1$时,

$$\mathscr{F}[f(-t)] = F(-\omega) = \overline{F(\omega)}, \tag{1.1.29}$$

即$\mathscr{F}[f(-t)]$与$F(\omega)$在几何上关于实轴对称. 所以,亦称 Fourier 变换具有翻转性质.

4. 对称性质

若 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$,则 $\mathscr{F}[F(\pm t)]=2\pi f(\mp\omega)$. $\quad$ (1.1.30)

证 因 $F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]$,则

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega,\ 令\ t=-\omega,$$

$$f(-\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\nu)e^{-j\nu\omega}d\nu=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[F(t)],$$

有 $\mathscr{F}[F(t)]=2\pi f(-\omega)$.

同理可证,$\mathscr{F}[F(-t)]=2\pi f(\omega)$.

特别地,当 $f(t)$ 为偶函数时,式(1.1.30)为:

$$\mathscr{F}[F(t)]=2\pi f(\omega). \tag{1.1.31}$$

式(1.1.30)、(1.1.31)表明,当 $f(t)$ 与 $F(\omega)$ 为一对 Fourier 变换对时,在 Fourier 变换下,$f(t)$ 与 $F(\omega)$ 在一定程度上具有对称性,尤其当 $f(t)$ 为偶函数时,这种对称性更为明显.

例 1.1.6 利用 Fourier 变换的对称性质证明 Dirichlet 积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}.$$

证 由例 1.1.2 知,当 $f(t)=\begin{cases}E, & |t|<\frac{\tau}{2},\\ 0, & |t|\geqslant\frac{\tau}{2},\end{cases}$ $(\tau>0)$ 时

$$F(\omega)=\frac{2E}{\omega}\sin\frac{\omega\tau}{2}.$$

又因 $f(t)$ 为偶函数,由对称性质知

$$\mathscr{F}[F(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2E}{t}\sin\frac{t\tau}{2}e^{-j\omega t}dt=2\pi f(\omega).$$

当 $|\omega|<\frac{\tau}{2}$ 时,$4E\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{\tau t}{2}\cos\omega t}{t}dt=2\pi E$,有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\frac{\tau t}{2}\cos\omega t}{t}dt=\frac{\pi}{2},$$

取 $\omega=0,\tau=2$ 即得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}.$$

5. 微分性质

(1)像原函数的微分性质

$$\mathscr{F}[f'(t)]=j\omega\mathscr{F}[f(t)]=j\omega F(\omega) \tag{1.1.32}$$

更一般地,有

$$\mathscr{F}[f^{(n)}(t)]=(j\omega)^n\mathscr{F}[f(t)]=(j\omega)^nF(\omega),n=1,2,\cdots.$$

(2)像函数的微分性质

$$F'(\omega)=\mathscr{F}[-jtf(t)], \tag{1.1.33}$$