中国科学院考研指定参考书

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

中国科学技术大学数学教学丛书

数量经济分析

（第二版）

侯定丕　陈华友　陈　伟　编著

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

中国科学技术大学数学教学丛书

数量经济分析

（第二版）

侯定丕　陈华友　陈　伟　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书为普通高等教育"十一五"国家级规划教材之一，内容包括：规划理论、预测、决策理论、竞争决策.本书内容不求全面，但在数学上有一定深度.旨在培养读者掌握线性规划、线性回归分析、平稳时间序列分析、Bayes决策、组合预测、Nash均衡、合作博弈等知识以及它们在经济分析中的应用.

本书可作为高等学校应用数学、统计学、运筹学、管理科学和系统工程专业的高年级本科生和研究生的教材，也可作为工程技术人员、管理干部和相关学者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数量经济分析/侯定丕，陈华友，陈伟编著.—2版.北京：科学出版社，2009
(中国科学技术大学数学教学丛书)
普通高等教育"十一五"国家级规划教材
ISBN 978-7-03-024393-5

Ⅰ.数… Ⅱ.①侯…②陈…③陈… Ⅲ.数量经济学-高等学校-教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第055013号

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京智力达印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2004年8月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009年6月第 二 版 印张：14 1/2
2009年6月第三次印刷 字数：276 000
印数：5 501—8 500

定价：26.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新伟〉)

第二版序言

最近几十年，数学研究方法开始向经济学渗透，同时经济和管理方面的某些问题也引发对某些数学问题的思考. 数理经济学、数量经济学等交叉学科就是在此背景下逐步产生并发展起来的. 近年来，一些高校数学系的高年级本科生和研究生开设了数量经济分析的课程. 这门课的开设对他们具有重要的现实意义，这主要表现在如下三个方面.

(1) 数学系的本科生或研究生学习一些经济学方面的知识，可以改善他们的知识储备结构，这有利于本科生毕业之后能找到一份合适的工作，并能适应未来工作和生活的需要.

(2) 目前已有一些数学系的本科生在考研或研究生考博时报考经济和管理学科的各个研究方向，学习数量经济分析的课程可以帮助他们提前了解和掌握一些重要的研究方法，并能适应未来从事科学研究的需要.

(3) 当前已有越来越多的高校组织本科生和研究生参加全国的数学建模竞赛活动，数学建模竞赛在高校的素质教育中起着越来越重要的作用. 数学建模竞赛试题往往有一些涉及强烈的经济和管理背景的错综复杂的问题，因此学习数量经济分析的课程可以指导他们如何对复杂的问题作出必要的简化和假设，利用数学的语言将实际问题转化为数学问题，建立合适的数学模型来反映实际问题的数量关系.

2004 年 8 月，《数量经济分析》在科学出版社出版. 本书在它的基础上，总结这几年本科和研究生教学的实际经验，进行了修订. 修订工作围绕规划理论、预测、决策理论、竞争决策等四个方面，主要是增加学科发展中一些新的内容，以体现学科发展的研究动向. 具体修订的内容是：增加了原书第 1 章内容，即补充了 1.4 节——多目标规划；删除原书 2.3 节的内容，增加 2.3 节——非最优的组合预测方法以及 2.4 节——最优的组合预测方法；增加了第 3 章内容，即补充了 3.4 节——多属性决策；在第 4 章中增加了一些实例. 另外每章均补充了参考文献和部分习题.

本书可作为高等学校应用数学、统计学、运筹学、管理科学和系统工程专业的高年级本科生和研究生的教材，也可作为工程技术人员、管理干部和相关学者的参考书. 在本书的编辑出版过程中，得到了科学出版社的大力支持和帮助. 作者在此表示衷心的感谢.

本书的第一作者侯定丕教授是我的博士生导师，他不幸于 2005 年离开了我

们，因此我想以原书的第二版的出版表达本人对恩师的深深怀念．本书的修订工作全部是由我一个人承担的，由于本人的学识水平有限，书中的选材和叙述难免存在缺点和错误，欢迎读者不吝赐教．

陈华友
2009 年 2 月 16 日
于安徽大学

第一版序言

科学的历史表明，多个学科的交叉融合对数量分析的要求，是促进数学发展的主要推动力之一．在理工科大学里，人们一谈到这一方面，便以力学、物理学为例来证明，也许有人还会提及化学、生物学乃至系统科学，却很少有人会提到经济学．有的人甚至认为，经济学只要用算术就足够了．

我在大学里教运筹学多年，总是以事例向学生说明数学在管理与经济中的应用，以及对管理与经济问题的研究也会推动数学的发展．近年来在数学系高年级开设数量经济学，深知学生学习这方面知识对开拓眼界与启发思维有好处．有一部分同学毕业时找工作，知道一些经济学知识肯定是好的；还有一部分同学拟读商学或管理学方面的研究生，对这方面尤其感兴趣．然而由于数学系本科生所学的课程中很少涉及经济学方面的知识，而他们又习惯于形式逻辑推演，我在选择教学内容时力求少涉及过深的经济学概念和知识，多介绍在经济分析中应用广而深度适当的数学工具．具体来说，我把规划理论、预测、决策理论（包括评估）、竞争决策作为 4 个大题目，选择了线性规划、Kuhn-Tucker 理论、线性回归分析、平稳时间序列分析、组合预测、Bayes 决策、Markov 决策、效用函数、von Neumann 经典博弈理论、Nash 均衡、合作博弈等题目来介绍数学知识以及在经济分析中的应用，现在把教学内容编写成一本薄薄的教材，供大学理工科开设数量经济分析课程时参考使用．

在编写时，注意到以下 3 个方面．其一，在前述 4 个大题目之下内容不求全面，而选择在数学上有一定深度的．其二，对数学上的证明，凡需要过长篇幅的舍去，请读者参考有关书籍，而有简短证明的则力求写出．其三，对经济上的应用力求简单明了，不涉及过多细节．

陈伟、陈华友两位同志与我商讨过编写此书的许多问题，陈华友撰写了第 2 章的原稿．欧宜贵、刘琼林、王惠文三位同志分别撰写了 3.1 节和 3.2 节、3.3 节、第 4 章的原稿．我对他们的原稿进行了修改与汇总．本书的选材如有不妥之处，内容陈述上如有错漏之处，概由我负责．希望本书能对拓宽数学教学中的知识领域起到一定的参考作用．

侯定丕

2004 年 2 月 25 日

于中国科学技术大学

目　录

第 1 章　规 划 理 论

规划理论研究函数在各种条件下求极值的问题. 在经济分析中，规划的多种模型以及求解的算法是最常用的数学工具. 线性规划、整数规划、非线性规划，还有动态规划方法等都在解决实际问题中起着巨大的作用. 在运筹学方面的书籍中可以找到对这些模型与方法的介绍. 而在经济问题的理论研究中，规划理论也是非常重要的. 本章介绍这些方面若干最基本的知识，其中涉及某些定理，限于篇幅不叙述证明，读者可以参阅有关书籍来理解.

1.1　线性规划与对偶定理

线性规划模型是线性函数在线性约束条件下求最大(或最小)值的数学模型. 我们来考察如下的线性规划模型 P：

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad (i = 1, \cdots, m), \\ & x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \cdots, n). \end{aligned}$$

引入向量 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}$ 和矩阵 $\boldsymbol{A}$，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

则 P 可改写成

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}, \\ \text{s. t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}$ 中的 T 是转置运算，向量不等号表示对应分量不等号同时成立，即

$$\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}$$

表示

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, n;$$

而

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}$$

表示

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad i=1,\cdots,m.$$

对于 P，称以下模型 DP：

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}, \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{c}, \\ & \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

为其对偶问题. 这里 $\boldsymbol{y}$ 自然是 m 维列向量，而 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 作为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵自然是 $n\times m$ 矩阵. DP 也就是

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i, \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i \geqslant c_j \quad (j=1,\cdots,n), \\ & y_i \geqslant 0 \quad (i=1,\cdots,m). \end{aligned}$$

称变量 y_i 为 P 的第 i 个对偶变量，或 P 的第 i 个约束条件 $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i$ 相应的对偶变量. 在 DP 的目标函数 $\sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i$ 中 y_i 恰与 b_i 相乘.

对于不是 P 这种形式的线性规划模型，也可以相应地定义其对偶问题. 具体方法是先把它改写成 P 这种形式，找到 DP，然后再改换合适的形式.

例如，线性规划

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2, \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 = 1, \\ & 2x_1 + 4x_2 \geqslant 5, \\ & x_1 \geqslant 0, \quad -\infty < x_2 < +\infty \end{aligned}$$

不是 P 这种形式. 变量 x_2 不是非负的，对它作变换，令 $x_2 = x'_2 - x''_2$，其中 $x'_2 \geqslant 0$，$x''_2 \geqslant 0$ 是两个新引入的变量，都是非负的，约束条件 $2x_1 + 4x_2 \geqslant 5$ 为

$$-2x_1 - 4(x'_2 - x''_2) \leqslant -5,$$

即

$$-2x_1 - 4x'_2 + 4x''_2 \leqslant -5.$$

约束条件 $x_1 - x_2 = 1$ 可写成两个不等式

$$x_1 - x_2 \leqslant 1 \quad 和 \quad -(x_1 - x_2) \leqslant -1,$$

亦即

$$x_1 - x'_2 + x''_2 \leqslant 1 \quad 和 \quad -x_1 + x'_2 - x''_2 \leqslant -1.$$

于是原问题改写成

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 3x_1 + 2x'_2 - 2x''_2, \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - x'_2 + x''_2 \leqslant 1, \\
& -x_1 + x'_2 - x''_2 \leqslant -1, \\
& -2x_1 - 4x'_2 + 4x''_2 \leqslant -5, \\
& x_1 \geqslant 0, \quad x'_2 \geqslant 0, \quad x''_3 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

这是标准的 P 这种形式. 引入对偶变量 z_1, z_2, z_3, DP 是

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z_1 - z_2 - 5z_3, \\
\text{s.t.} \quad & z_1 - z_2 - 2z_3 \geqslant 3, \\
& -z_1 + z_2 - 4z_3 \geqslant 2, \\
& z_1 - z_2 + 4z_3 \geqslant -2, \\
& z_1 \geqslant 0, \quad z_2 \geqslant 0, \quad z_3 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

考虑到 z_1 与 z_2 的关系，令 $y_1 = z_1 - z_2$, $y_2 = z_3$. 以上模型改变为

$$
\begin{aligned}
\min \quad & y_1 - 5y_2, \\
\text{s.t.} \quad & y_1 - 2y_2 \geqslant 3, \\
& -y_1 - 4y_2 \geqslant 2, \\
& y_1 + 4y_2 \geqslant -2, \\
& -\infty < y_1 < +\infty, \quad y_2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

亦即

$$
\begin{aligned}
\min \quad & y_1 - 5y_2, \\
\text{s.t.} \quad & y_1 - 2y_2 \geqslant 3, \\
& y_1 + 4y_2 = -2, \\
& -\infty < y_1 < +\infty, \quad y_2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

这便是原问题的对偶问题. 由于经过几次变换，对偶问题的形式不一定唯一. 例如

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -y_1 + 5y_2, \\
\text{s.t.} \quad & -y_1 + 2y_2 \leqslant -3, \\
& y_1 + 4y_2 = -2, \\
& -\infty < y_1 < +\infty, \quad y_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

也是原问题的对偶问题.

回到 P 与 DP. 不难证明，DP 作为线性规划，它的对偶问题恰巧就是 P. 事实上，把 DP 改写成 P 这种形式，得

$$
\begin{aligned}
\max \quad & (-\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}, \\
\text{s.t.} \quad & (-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} \leqslant -\boldsymbol{c}, \\
& \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0}.
\end{aligned}
$$

它的对偶问题是

$$\begin{aligned} \min\quad & (-\boldsymbol{c})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}, \\ \text{s.t.}\quad & ((-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z} \geqslant -\boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned} \max\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{z}, \\ \text{s.t.}\quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{z} \leqslant \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{z} \geqslant \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

它就是 P.

对偶问题的对偶就是原问题,这一事实可以形式地表为

$$\mathrm{D(DP)} = \mathrm{P}.$$

关于 P 和 DP,以下关系成立.

定理 1.1.1（对偶定理）　给定 P 和 DP,设 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$ 分别为它们的可行解,即分别满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0},$$

则必然有不等式

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}.$$

证明　由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}$,又 $\boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}$,故 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$, 即

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}) \leqslant \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}.$$

因 $\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$,故 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}) \leqslant \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$, 亦即

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}.$$

定理 1.1.2　在线性规划模型 P:

$$\begin{aligned} \max\quad & \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}, \\ \text{s.t.}\quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \leqslant \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

中,假设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数 m 小于列数 n,而 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 m,且 $\boldsymbol{A}$ 有 m 阶子方阵 $\boldsymbol{B}$, $|\boldsymbol{B}|\neq 0$,$\boldsymbol{B}$ 由 $\boldsymbol{A}$ 的 $i_1,i_2,\cdots,i_m$ 这 m 个不同列组成,记 m 维列向量

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = (x_{B1},\cdots,x_{Bm})^{\mathrm{T}}.$$

又设 n 维列向量 $\boldsymbol{x}^* = (x_1^*,\cdots,x_n^*)^{\mathrm{T}}$,其中 $x_{i_k}^* = x_{Bk}, k = 1,\cdots,m$, 其他 $n-m$ 个 x_i^* 为零. 如果 $\boldsymbol{x}^*$ 是 P 的最优解,则

$$\boldsymbol{y}^{*\mathrm{T}} = (c_{i_1},\cdots,c_{i_m})\boldsymbol{B}^{-1}$$

必是 DP:

$$\begin{aligned} \min\quad & \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}, \\ \text{s.t.}\quad & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{c}, \\ & \boldsymbol{y} \geqslant \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

的可行解,并且有 $c^{\mathrm{T}}x^* = b^{\mathrm{T}}y^*$.

证明　参阅运筹学方面的书籍.

从此凡不证明的定理一律不再写参阅的话.

定理 1.1.3　对于线性规划 P,如果目标函数值有上界,则必存在最优解,它具备定理 1.1.2 中 x^* 的性质. 对于 DP,如果目标函数有下界,则必存在最优解.

定理 1.1.4(强对偶定理)　如果 P 和 DP 都有可行解,则它们都有最优解,并且

$$\max c^{\mathrm{T}}x = \min b^{\mathrm{T}}y.$$

证明　设 x^0 和 y^0 分别为 P 和 DP 的可行解,根据定理 1.1.1,对于 P 的所有可行解 x,必有

$$c^{\mathrm{T}}x \leqslant b^{\mathrm{T}}y^0.$$

由定理 1.1.3 知,P 必有最优解 x^*,且具备定理 1.1.2 中所述性质. 而根据定理 1.1.2,DP 必有可行解 y^*,满足

$$c^{\mathrm{T}}x^* = b^{\mathrm{T}}y^*.$$

DP 的目标函数有下界 $c^{\mathrm{T}}x^*$,由定理 1.1.3 知,DP 必有最优解,即存在 y^{Δ},满足

$$A^{\mathrm{T}}y^{\Delta} \geqslant c, \quad y^{\Delta} \geqslant 0,$$

$$b^{\mathrm{T}}y \geqslant b^{\mathrm{T}}y^{\Delta}, \quad \forall \text{ 可行解 } y.$$

特别,

$$b^{\mathrm{T}}y^* \geqslant b^{\mathrm{T}}y^{\Delta}.$$

又根据定理 1.1.1 知,$c^{\mathrm{T}}x^* \leqslant b^{\mathrm{T}}y^{\Delta}$,故有

$$c^{\mathrm{T}}x^* \leqslant b^{\mathrm{T}}y^{\Delta} \leqslant b^{\mathrm{T}}y^* = c^{\mathrm{T}}x^*.$$

因此 $b^{\mathrm{T}}y^* = b^{\mathrm{T}}y^{\Delta}$. 故 y^* 也是 DP 的最优解,而

$$\max c^{\mathrm{T}}x = c^{\mathrm{T}}x^* = b^{\mathrm{T}}y^* = \min b^{\mathrm{T}}y.$$

下面的例子说明以上知识在经济分析中的运用.

例 1.1.1(影子价格)　我们设 P:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \\
\text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad (i = 1, \cdots, m), \\
& x_j \geqslant 0 \quad (j = 1, \cdots, n)
\end{aligned}$$

为产品收益最大化模型,其中 x_j 是第 j 种产品的产量;c_j 为其价格,$j=1,\cdots,n$;b_i 是第 i 种资源(即原料)的可用上限;a_{ij} 是生产第 j 种产品每单位所耗第 i 种资源的数量,$i=1,\cdots,m$,$j=1,\cdots,n$. 同时设 DP:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^{m} b_i y_i, \\
\text{s. t.} \quad & \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j \quad (j = 1, \cdots, n), \\
& y_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \cdots, m)
\end{aligned}
$$

为生产所耗资源价值最小化模型,相当于生产成本最小化模型. y_i 是 P 的第 i 个约束的对偶变量,当 $\sum_{i=1}^{m} b_i y_i$ 作为资源价值来看时,y_i 起着第 i 种资源价格的作用. 不过,y_i 作为 DP 的变量,它还不是价格. 但是,当 P 和 DP 有最优解 $\boldsymbol{x}^*$ 和 $\boldsymbol{y}^*$ 时,$y_1^*, \cdots, y_m^*$ 作为确定的数值,可以认为是对资源价格的估计. 将它们称为影子价格. 记 P 和 DP 公共的最优值为 w,则有等式

$$
w = \max \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}^*, \quad w = \min \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}^*.
$$

于是

$$
\frac{\partial w}{\partial x_j^*} = \frac{\partial}{\partial x_j^*} \sum_{k=1}^{n} c_k x_k^* = c_j
$$

是第 j 种产品的价格,而

$$
\frac{\partial w}{\partial b_i} = \frac{\partial}{\partial b_i} \sum_{k=1}^{m} b_k y_k^* = y_i^*
$$

是第 i 种资源的影子价格.

影子价格不一定等于市场价格. 在 P 和 DP 这两个模型中,并没有包含资源价格作为已知数据,从模型也推不出市场价格,影子价格只能是对市场价格的估计值. 用同一种资源的影子价格 y_i^* 和市场价格 p_i^* 来比较,如果 $p_i^* < y_i^*$,由最小成本 w 的偏微商

$$
\frac{\partial w}{\partial b_i} = y_i^* > p_i^*
$$

得知,多消耗一单位第 i 种资源,最小成本的增量$\frac{\partial w}{\partial b_i} \cdot 1 = y_i^*$ 比市场价格 p_i^* 高. 此时宜尽可能购进这种资源,使今后生产得到成本降低的好处. 如果 $p_i^* > y_i^*$,则生产成本不会因购进此种资源而得以降低,此时宜适当地售出手头拥有的部分此种资源. 影子价格对于企业经营决策有以上参考意义.

在 DP 的最优解中,可能存在 $y_i^* = 0$,而市场价格 p_i^* 一般是不会等于零的. 我们用对偶定理来说明:如果某种资源的影子价格 $y_i^* > 0$,则必有 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$,即此种资源被用完,而当 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i$ 时,必有 $y_i^* = 0$.

事实上,由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* \leqslant \boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}^* \geqslant \boldsymbol{0}$, 故知 $\boldsymbol{y}^{*\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}^* \leqslant \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}^*$. 又由 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}^* \geqslant \boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}^* \geqslant$

$\mathbf{0}$,得知 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* \leqslant \boldsymbol{y}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^*$,故有

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* \leqslant \boldsymbol{y}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* \leqslant \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^*.$$

但是 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^*$,故有等式

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{y}^{*\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}^*.$$

由此得到等式

$$\boldsymbol{y}^{*\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}) = 0,$$

亦即

$$\sum_{k=1}^{m} y_k^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j^* - b_k \right) = 0.$$

由于 $y_k^* \geqslant 0, \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j^* \leqslant b_k$,故有

$$y_k^* \left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j^* - b_k \right) = 0, \quad k = 1, \cdots, m.$$

若对某 $k = i, \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i < 0$,则必有

$$y_i^* = 0.$$

而若对某 $k=i, y_i^* > 0$,则必有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i = 0.$$

由此可知,当影子价格 $y_i^* = 0$ 时,第 i 种资源虽未必一定没有用完,但有可能是没有用完的. 无论如何,此时必有 $y_i^* = 0 < p_i^*$,因此为了低成本地生产,宜多用或售出多余的部分此种资源.

例 1.1.2 数据包络分析(DEA,data envelopment analysis)是评价生产系统效率时有用的运筹学方法. 它的一种分析思路引出如下线性规划模型:

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_0, \\ \text{s. t.} \quad & \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \cdots, n), \\ & \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_0 = 1, \\ & \boldsymbol{\omega} \geqslant \mathbf{0}, \\ & \boldsymbol{\mu} \geqslant \mathbf{0}, \end{aligned}$$

其中

$i=1,\cdots,n$,表示同一产业部门的 n 个生产系统,$i=0$ 的系统其实是 $1,\cdots,n$ 中的某一个,取之作为标准单位,而 $i=1,\cdots,n$ 中其他 $n-1$ 个系统被取来作为对 $i=0$ 的系统评价综合效率时的参考;

$\boldsymbol{x}_i$ 与 $\boldsymbol{y}_i$ 分别为系统 i 生产的投入与产出向量,

$$\boldsymbol{x}_i = (x_{1i}, \cdots, x_{mi})^{\mathrm{T}},$$

此处，m 为投入量的种数，x_{ki} 为系统 i 投入第 k 种资源的数量，

$$\boldsymbol{y}_i = (y_{1i}, \cdots, y_{li})^{\mathrm{T}},$$

此处，l 为产出量的种数，y_{ki} 为系统 i 产出的第 k 种产品的数量；

$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\cdots,\mu_l)^{\mathrm{T}}$ 是产出向量 $\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_l$ 的权系数，不要求 $\sum\limits_{k=1}^{l}\mu_k=1$，但要求 $\mu_k \geqslant 0, k=1,\cdots,l$；

$\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\cdots,\omega_m)^{\mathrm{T}}$ 是投入向量 $\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m$ 的权系数，不要求 $\sum\limits_{k=1}^{m}\omega_k=1$，但要求 $\omega_k \geqslant 0, k=1,\cdots,m$.

上述线性规划的对偶模型是

$$\begin{aligned}
\min\quad & \theta, \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i\lambda_i \leqslant \theta\boldsymbol{x}_0, \\
& \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{y}_i\lambda_i \geqslant \boldsymbol{y}_0, \\
& \lambda_i \geqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,n), \\
& -\infty < \theta < +\infty.
\end{aligned}$$

可以证明，上述一对线性规划问题都有最优解，并且公共的最优值

$$\max \boldsymbol{\mu}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}_0 = \min \theta \leqslant 1.$$

记 $\theta_0=\min\theta$. 当 $\theta_0=1$ 时表示生产系统 $i=0$ 是规模有效且技术有效的. θ_0 值越大，系统 $i=0$ 规模有效性越高.

例 1.1.3　博弈论(game theory)是研究竞争格局中各个局中人决策的科学. 博弈论又译作对策论. 有多种博弈模型，其中两人零和博弈是最常被人们提到的. 在这种模型里，两个局中人的最优决策方案的求取，归结为对如下对偶的线性规划求解.

$$\begin{aligned}
\min\quad & \sum_{i=1}^{m} u_i, \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{i=1}^{m} a_{ij}u_i \geqslant 1 \quad (j=1,\cdots,n), \\
& u_i \geqslant 0 \quad (i=1,\cdots,m).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\max\quad & \sum_{j=1}^{n} v_j, \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j \leqslant 1 \quad (i=1,\cdots,m), \\
& v_j \geqslant 0 \quad (j=1,\cdots,n).
\end{aligned}$$