

■ 高等学校教材

高等数学

下册

郑连存 王 辉 朱 婧 编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等数学

下册

郑连存 王 辉 朱 婧 编

高等教育出版社

内容提要

本书是根据多年教学实践,参照“工科类本科数学基础课程教学基本要求”和《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》,按照新形势下教材改革的精神编写而成。与同类教材不同,本书将数学软件 Mathematica 融入到教学实践环节中,对传统的高等数学教学内容和体系进行适当整合,力求严谨清晰,富于启发性和可读性。

全书分上、下两册。上册内容为函数与极限,导数与微分,微分中值定理与导数的应用,一元函数积分学及其应用和无穷级数。下册内容为向量代数与空间解析几何,多元函数微分学及其应用,重积分,曲线积分与曲面积分及常微分方程。书中还配备了丰富的例题和习题,分为 A(为一般基本要求)、B(有一定难度和深度)两类,便于分层次教学。

本书可作为高等学校理、工科各类专业高等数学课程的教材。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/郑连存,王辉,朱婧编. —北京:高等教育出版社,2009.7

ISBN 978-7-04-027237-6

I. 高… II. ①郑…②王…③朱… III. 高等数学 - 高等学校 - 教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 085333 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印 刷	国防工业出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2009 年 7 月第 1 版
印 张	25.25	印 次	2009 年 7 月第 1 次印刷
字 数	470 000	定 价	27.20 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 27237-00

目 录

第六章 向量代数与空间解析几何	1
第一节 向量及其线性运算	1
一、向量概念	2
二、向量的线性运算	2
三、向量在轴上的投影	6
习题 6-1	8
第二节 向量的坐标	9
一、空间直角坐标系	9
二、向量的坐标表示法	14
习题 6-2	18
第三节 向量的乘积	19
一、两向量的数量积	19
二、两向量的向量积	22
*三、三向量的混合积	25
习题 6-3	27
第四节 平面与直线	28
一、平面及其方程	29
二、直线及其方程	35
习题 6-4	40
第五节 空间曲面与空间曲线	42
一、空间曲面及其方程	42
二、空间曲线及其方程	56
习题 6-5	62
*第六节 Mathematica 在空间解析几何中的应用	64
一、基本命令	64
二、实验举例	64
本章小结	68
总习题六	72

第七章 多元函数微分学及其应用	75
第一节 平面点集与多元函数	76
一、平面点集	76
二、 n 维空间	78
三、多元函数	80
习题 7-1	83
第二节 多元函数的极限与连续性	83
一、二元函数极限	83
二、多元函数的连续性	86
习题 7-2	88
第三节 全微分与偏导数	89
一、全微分定义	89
二、偏导数	91
三、高阶偏导数	98
*四、全微分在近似计算中的应用	101
习题 7-3	102
第四节 多元复合函数的微分法	104
一、复合函数的求导法则	105
二、复合函数的全微分	112
习题 7-4	114
第五节 隐函数的微分法	115
一、一个方程的情形	115
二、方程组的情形	119
*三、反函数组定理	122
习题 7-5	124
第六节 方向导数与梯度	125
一、方向导数	126
二、梯度	130
习题 7-6	132
第七节 微分法在几何上的应用	133
一、空间曲线的切线与法平面	133
二、空间曲面的切平面与法线	137
习题 7-7	140
第八节 多元函数的极值	141
一、多元函数的极值与最值	141
二、条件极值和拉格朗日乘数法	147

习题 7-8	153
*第九节 二元函数的泰勒公式	154
一、二元函数的泰勒公式	154
二、二元函数极值的充分条件的证明	156
习题 7-9	157
*第十节 Mathematica 在多元函数微分学中的应用	158
一、基本命令	158
二、实验举例	159
本章小结	162
总习题七	169
第八章 重积分	171
第一节 二重积分的概念及性质	171
一、二重积分的概念	172
二、二重积分的性质	175
习题 8-1	177
第二节 二重积分的计算	178
一、直角坐标系下二重积分的计算	178
二、极坐标系下二重积分的计算	186
*三、二重积分的一般变量代换	191
习题 8-2	194
第三节 三重积分	198
一、三重积分的概念和性质	198
二、三重积分的计算	200
习题 8-3	212
第四节 重积分的应用	215
一、曲面的面积	216
二、质心	220
三、转动惯量	222
四、引力问题	224
习题 8-4	227
*第五节 Mathematica 在重积分中的应用	228
一、基本命令	228
二、实验举例	228
本章小结	229
总习题八	236

第九章 曲线积分与曲面积分	240
第一节 第一型曲线积分 —— 对弧长的曲线积分	240
一、第一型曲线积分概念及性质	240
二、第一型曲线积分的计算	243
习题 9-1	246
第二节 第一型曲面积分 —— 对面积的曲面积分	247
一、第一型曲面积分概念及性质	247
二、第一型曲面积分的计算	248
习题 9-2	252
第三节 第二型曲线积分 —— 对坐标的曲线积分	253
一、第二型曲线积分概念及性质	253
二、第二型曲线积分的计算	256
习题 9-3	262
第四节 格林公式及其应用	263
一、格林公式及相关概念	263
*二、格林公式的一个物理原型	272
三、平面曲线积分与路径无关的条件	276
习题 9-4	280
第五节 第二型曲面积分 —— 对坐标的曲面积分	281
一、第二型曲面积分的概念与性质	281
二、第二型曲面积分的计算	285
习题 9-5	289
第六节 高斯公式与斯托克斯公式	290
一、高斯公式	290
*二、第二型曲面积分与曲面无关的条件	294
三、斯托克斯公式	295
*四、空间曲线积分与路径无关的条件	298
习题 9-6	299
第七节 场论初步	300
一、梯度	301
二、散度	302
三、旋度	304
*四、微分算子	307
习题 9-7	308

*第八节 Mathematica 在线面积分中的应用	309
本章小结	310
总习题九	319
第十章 常微分方程	322
第一节 微分方程的基本概念	322
一、微分方程问题举例	322
二、基本概念	326
习题 10-1	328
第二节 可变量分离的微分方程	328
一、可变量分离的方程概念	328
二、可变量分离的方程的解法	329
三、可化为变量分离的方程	330
习题 10-2	333
第三节 一阶线性微分方程与常数变易法	334
一、一阶线性方程	334
二、伯努利方程	337
习题 10-3	338
第四节 全微分方程	339
一、全微分方程的概念	339
二、全微分方程的解法	340
习题 10-4	344
第五节 某些特殊类型的高阶方程	345
一、形如 $y^{(n)} = f(x)$ 的方程	345
二、形如 $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ 的方程	346
三、形如 $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ 的方程	347
习题 10-5	348
第六节 高阶线性微分方程	349
一、线性微分方程的一般理论	349
二、齐次线性方程通解的结构	350
三、非齐次线性方程解的结构	351
习题 10-6	352
第七节 常系数线性微分方程	353
一、常系数齐次线性微分方程	353
二、常系数非齐次线性微分方程	356
习题 10-7	359

*第八节 常微分方程幂级数解法.....	360
习题 10-8	362
*第九节 Mathematica 在微分方程中的应用.....	362
一、基本命令	362
二、实验举例	363
本章小结.....	367
总习题十.....	372
习题答案与提示	374
参考文献.....	393

第六章 向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中,通过坐标法把平面上的点与一对有次序的数对应起来,把平面上的图形和二元方程对应起来,从而可以用代数方法来研究平面几何问题.类似地,也可以建立空间直角坐标系,将空间的曲面(线)和三元方程(组)对应起来,从而可以利用代数方法来研究空间几何问题.

本章首先引进在工程技术上具有广泛应用的向量,介绍向量的线性运算,建立空间直角坐标系,然后用坐标表示向量,讨论向量的数量积、向量的向量积及向量的混合积运算,以向量为工具来研究空间的平面和直线及其方程,最后介绍空间曲面、二次曲面及空间曲线.这些内容不仅是学习后面的多元函数微积分学的重要基础,而且它们对物理学、力学、其它科学及工程都有着重要和广泛的应用.本章的知识结构框图如图 6-1 所示.

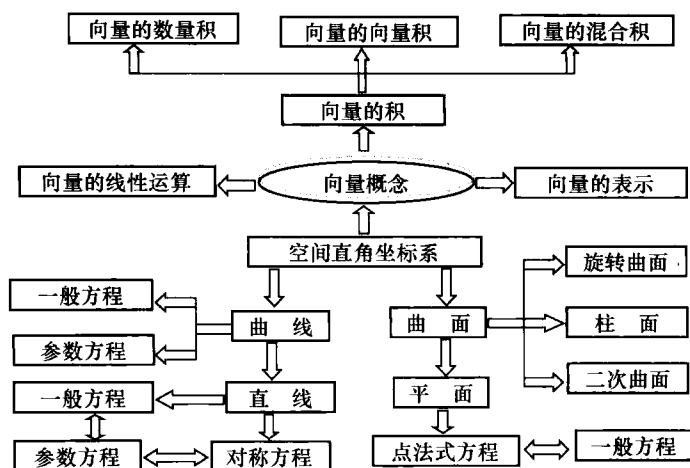


图 6-1

第一节 向量及其线性运算

本节介绍有关向量的概念、向量的加法、向量与数的乘法及其向量在某轴

上的投影.

一、向量概念

在研究力学、物理学以及其它应用科学时,常会遇到这样一类量,它们既有大小,又有方向.例如,力、力矩、位移、速度等等,把这种既有大小又有方向的量称为**向量**.

在数学上,常常用一条有方向的线段,即有向线段来表示向量.有向线段的长度表示向量大小,有向线段的方向表示向量的方向.以 M_1 为起点、 M_2 为终点的有向线段所表示的向量,记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$,如图 6-2 所示.也用一个粗体字母或用一个书写体上面加箭头的字母来表示,如向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{F}$ 或 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{F}$ 等.

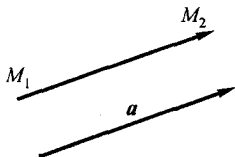


图 6-2

向量的大小称为**向量的模**,向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\mathbf{a}$ 的模分别记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$, $|\mathbf{a}|$. 模等于 1 的向量称为**单位向量**,模等于 0 的向量称为**零向量**,记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的起点和终点重合,它的方向可以看作是任意的.

以坐标原点 O 为起点,以点 M 为终点的向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 对于 O 的**向径**,常用粗体字 $\mathbf{r}$ 表示.

由于所有向量的共性是它们都有大小和方向,所以在数学上只研究与起点无关的向量,并称这种向量为**自由向量**(简称**向量**),即只考虑向量的大小和方向,而不考虑它的起点在何处.若两个向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的大小相等,且方向相同,则称向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 是**相等的**,记作 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. 这就是说,经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

若两个非零向量的方向相同或者相反,则称这两个**向量平行**. 向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 平行,记作 $\mathbf{a} // \mathbf{b}$. 由于零向量的方向可以看作是任意的,因此可以认为零向量与任何向量都平行.

二、向量的线性运算

1. 向量的加减法

定义 1.1 设有两个向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$,任取一点 A ,作 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$,再以 B 为起点,作 $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$,连接 AC ,如图 6-3 所示,则向量 $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$ 称为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的**和**,记作 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$,即 $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$. 这种作出两向量之和的方法称为**向量相加的三角形法则**.

力学上有求合力的平行四边形法则,仿此,也有向量相加的**平行四边形法则**. 当向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不平行时,作 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$,以及以 AB , AD 为邻边作平行四边形 $ABCD$,连接对角线 AC ,如图 6-4 所示,显然向量 $\overrightarrow{AC}$ 等于向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的

和 $a + b$.

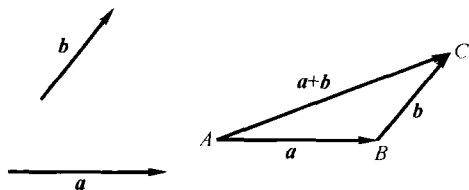


图 6-3

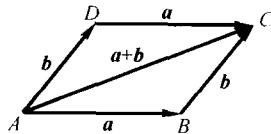


图 6-4

向量的加法满足下列运算规律:

- (1) **交换律** $a + b = b + a$;
- (2) **结合律** $(a + b) + c = a + (b + c)$.

由图 6-5 可知: 结合律成立.

由于向量的加法符合交换律与结合律, 故 n 个向量 $a_1, a_2, \dots, a_n (n \geq 3)$ 相加可写成 $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, 并按向量加法的三角形法则, 可得 n 个向量相加的法则如下: 使前一向量的终点作为后一向量的起点, 相继作出向量 $a_1, a_2, \dots, a_n$; 再以第一向量的起点为起点, 最后一个向量的终点为终点作一向量, 这一向量即为所求的和. 例如,

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5,$$

其和如图 6-6 所示.

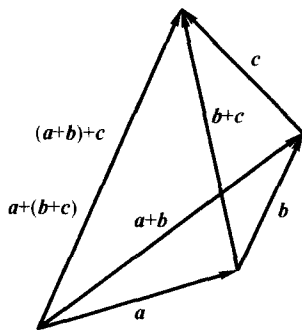


图 6-5

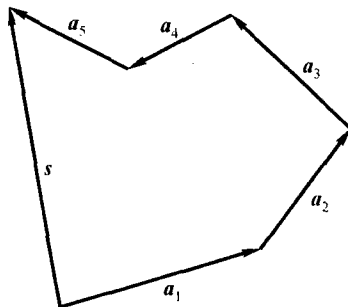


图 6-6

设 a 为一向量, 与 a 的模相同而方向相反的向量称为 a 的**负向量**, 记作 $-a$. 由此, 规定两个向量 b 与 a 的差 $b - a = b + (-a)$, 即把向量 $-a$ 加到向量 b 上, 使得 b 与 a 的差 $b - a$, 如图 6-7 所示. 类似地, 把 a 与 b 的起点放在一起.

以 a 的终点为起点, 以 b 的终点为终点的向量即为 $b - a$. 特别地, 当 $b = a$ 时, 有 $a - a = a + (-a) = 0$.

由于三角形两边之和大于第三边, 于是得到
三角形不等式

$$|a \pm b| \leq |a| + |b|,$$

其中等号在 a 与 b 平行时成立.

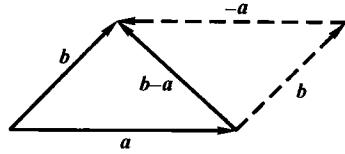


图 6-7

2. 向量与数的乘法

定义 1.2 设 λ 是实数, a 是一个向量, λ 与 a 的乘积记作 λa , 其定义如下:

- (1) λa 是一个向量;
 - (2) 其模为 $|\lambda| |a|$;
 - (3) 其方向为: 当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 方向相同; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 方向相反;
 - (4) 当 $\lambda = 0$ 时, $|\lambda a| = 0$, 即 λa 为零向量, 这时它的方向可以是任意的.
- 特别地, 当 $\lambda = \pm 1$ 时, 有 $1a = a, (-1)a = -a$.

向量与数的乘积符合下列运算规律:

- (1) **结合律** $\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a$, 其中 λ, μ 为任意实数, a 为向量.

由向量与数的乘积的定义可知, 向量 $\lambda(\mu a)$, $\mu(\lambda a)$, $(\lambda\mu)a$ 都是平行的向量, 它们的指向是相同的, 而且 $|\lambda(\mu a)| = |\mu(\lambda a)| = |(\lambda\mu)| |a|$, 所以 $\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a$.

- (2) **分配律** $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$;

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a,$$

其中 λ, μ 为任意实数, a 为向量.

这个规律同样可以按向量与数的乘积的定义来证明, 这里从略.

定理 1.1 设向量 $a \neq 0$, 则向量 b 平行于 a 的充分必要条件是存在唯一的实数 λ , 使得 $b = \lambda a$.

证 条件的充分性是显然的, 下面证明条件的必要性.

设 $b // a$, 由于 $a \neq 0$, 所以 $|a| \neq 0$. 取 $\lambda = \pm \frac{|b|}{|a|}$, 当 b 与 a 方向相同时, λ 取正号; 当 b 与 a 方向相反时, λ 取负号, 此时 b 与 λa 方向相同, 且

$$|\lambda a| = |\lambda| |a| = \frac{|b|}{|a|} |a| = |b|,$$

即有 $b = \lambda a$.

再证数 λ 的唯一性. 设 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$ 且 $\mathbf{b} = \mu \mathbf{a}$, 两式相减, 使得

$$(\lambda - \mu)\mathbf{a} = \mathbf{0},$$

即 $|\lambda - \mu||\mathbf{a}| = 0$, 因 $|\mathbf{a}| \neq 0$, 故 $|\lambda - \mu| = 0$, 即 $\lambda = \mu$.

记 $\mathbf{e}_a$ 表示与非零向量 $\mathbf{a}$ 同方向的单位向量, 按照向量与数的乘积的定义, 由于 $|\mathbf{a}| > 0$, 所以 $|\mathbf{a}|\mathbf{e}_a$ 与 $\mathbf{e}_a$ 的方向相同, 即 $|\mathbf{a}|\mathbf{e}_a$ 与 $\mathbf{a}$ 的方向相同. 又因 $|\mathbf{a}|\mathbf{e}_a$ 的模是 $|\mathbf{a}||\mathbf{e}_a| = |\mathbf{a}| \cdot 1 = |\mathbf{a}|$, 即 $|\mathbf{a}|\mathbf{e}_a$ 与 $\mathbf{a}$ 的模也相同, 因此 $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\mathbf{e}_a$. 故当 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ 时, 与向量 $\mathbf{a}$ 同方向的单位向量

$$\mathbf{e}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

向量的加法和向量与数的乘法统称为向量的线性运算.

例 1.1 在 $\triangle ABC$ 中, D, E 是 BC 边上的三等分点, 如图 6-8 所示, 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, 试用 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AD}$ 和 $\overrightarrow{AE}$.

解 由三角形法则, 有

$$\overrightarrow{CB} = \mathbf{a} - \mathbf{b},$$

再由数与向量的乘法, 有

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} - \mathbf{b}),$$

所以

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \mathbf{b} + \frac{1}{3}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + 2\mathbf{b});$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) + \frac{1}{3}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \frac{1}{3}(2\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

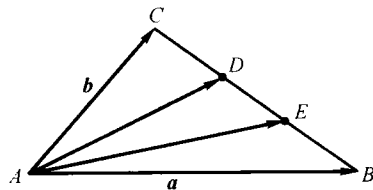


图 6-8

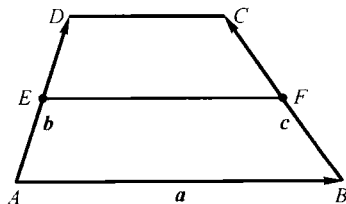


图 6-9

例 1.2 利用向量证明: 梯形两腰中点连线平行于两底边, 其长度为两底边长度之和的一半.

证 设梯形为 $ABCD$, 如图 6-9 所示. 并设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c}$. 由于 $DC \parallel AB$, 所以 $\overrightarrow{DC} \parallel \overrightarrow{AB}$, 可设 $\overrightarrow{DC} = \lambda \overrightarrow{AB} = \lambda \mathbf{a}$, 且 $\lambda > 0$. 因为

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \mathbf{0},$$

即 $\mathbf{a} + \mathbf{c} - \lambda \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$, 所以 $\mathbf{c} - \mathbf{b} = (\lambda - 1)\mathbf{a}$.

又由于

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\mathbf{b}, \quad \overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\mathbf{c},$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = -\frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{c} = \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{b}) + \mathbf{a} \\ &= \frac{1}{2}(\lambda - 1)\mathbf{a} + \mathbf{a} = \frac{1}{2}(1 + \lambda)\mathbf{a}. \end{aligned}$$

即 $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{DC}$, 且 $|\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{2}(1 + \lambda)|\mathbf{a}| = \frac{1}{2}(|\mathbf{a}| + \lambda|\mathbf{a}|) = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}|)$.

三、向量在轴上的投影

1. u 轴上有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的值

定义 1.3 设有一数轴 u , $\overrightarrow{AB}$ 是 u 轴上的有向线段, 如图 6-10 所示. 若数 λ 满足 $|\lambda| = |\overrightarrow{AB}|$, 且当 $\overrightarrow{AB}$ 的方向与 u 轴方向相同时, λ 取正值; 当 $\overrightarrow{AB}$ 的方向与 u 轴方向相反时, λ 取负值, 则称数 λ 为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的值, 记作 AB , 即 $\lambda = AB$.

设 $\mathbf{e}$ 是与 u 轴同方向的单位向量, 易看出: 若有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的值 $AB = \lambda$, 则向量 $\overrightarrow{AB} = \lambda \mathbf{e}$; 反之, 若向量 $\overrightarrow{AB} = \lambda \mathbf{e}$, 则 $AB = \lambda$. 由此可知: $\overrightarrow{AB} = (AB)\mathbf{e}$.

例 1.3 在 u 轴上取一定点 O 作为坐标原点, 设 A, B 是 u 轴上坐标依次为 u_1, u_2 的两个点, $\mathbf{e}$ 是与 u 轴同方向的单位向量, 如图 6-10 所示, 证明: $\overrightarrow{AB} = (u_2 - u_1)\mathbf{e}$.

证 因为点 A 的坐标为 u_1 , 即 u 轴上有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 的值 $OA = u_1$, 所以 $\overrightarrow{OA} = u_1 \mathbf{e}$; 同理, $\overrightarrow{OB} = u_2 \mathbf{e}$, 于是 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = u_2 \mathbf{e} - u_1 \mathbf{e} = (u_2 - u_1)\mathbf{e}$.

2. 两向量的夹角

定义 1.4 设有两个非零向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$, 任取空间一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, 规定不超过 π 的 $\angle AOB$ (记 $\varphi = \angle AOB, 0 \leq \varphi \leq \pi$) 称为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角, 如图 6-11 所示, 记作 $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$ 或 $(\widehat{\mathbf{b}, \mathbf{a}})$, 即 $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \varphi$.

若向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 中有一个是零向量, 则规定它们的夹角可在 0 与 π 之间任意取值. 类似地, 可以规定向量与数轴的夹角.



图 6-10

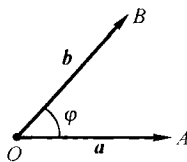


图 6-11

3. 空间点与向量在轴 u 上的投影

定义 1.5 已知空间一点 A 以及一数轴 u , 过点 A 作 u 轴的垂直平面 α , 那么平面 α 与 u 轴的交点 A' 称为点 A 在 u 轴上的投影, 如图 6-12 所示.

定义 1.6 设向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 在 u 轴上的投影分别为 A' 和 B' , 如图 6-13 所示, 则 u 轴上的有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的分向量或投影向量, $\overrightarrow{A'B'}$ 的值 $A'B'$ 称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的投影, 记作 $\text{Prj}_u \overrightarrow{AB}$ 或 $(\overrightarrow{AB})_u$, 即 $\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = A'B'$, u 轴称为投影轴.

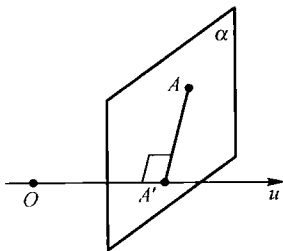


图 6-12

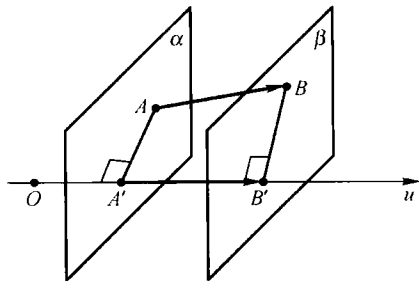


图 6-13

注 一个向量在某轴上的投影是一个数量, 它可以是正数, 也可以是负数或零, 而一个向量在某轴上的投影分量或投影向量是一个向量.

性质 1.1 (投影定理) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的投影等于向量的模乘以轴与向量的夹角 φ 的余弦, 即

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi.$$

证 把向量 $\overrightarrow{AB}$ 平行移动, 使得 $\overrightarrow{AB}$ 的起点与 A' 重合, 如图 6-14 所示, 则 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B_1}$. 由定义 1.6 得,

$$\text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = A'B' = |\overrightarrow{A'B_1}| \cos \varphi = |\overrightarrow{AB}| \cos \varphi.$$

性质 1.2 两个向量的和在轴上的投影等于这两个向量在该轴上投影的和, 即

$$\text{Prj}_u(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \text{Prj}_u \mathbf{a}_1 + \text{Prj}_u \mathbf{a}_2.$$

证 设有向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ 及 u 轴, 作 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}_1, \overrightarrow{AB} = \mathbf{a}_2$, 如图 6-15 所示, 则 $\overrightarrow{OB} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$. 设点 A, B 在 u 轴上的投影点分别为 A', B' , 由定义 1.6, 有

$$\text{Prj}_u(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = OB' = OA' + A'B' = \text{Prj}_u \overrightarrow{OA} + \text{Prj}_u \overrightarrow{AB} = \text{Prj}_u \mathbf{a}_1 + \text{Prj}_u \mathbf{a}_2.$$

该性质可以推广到 n 个向量 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 的情形, 即

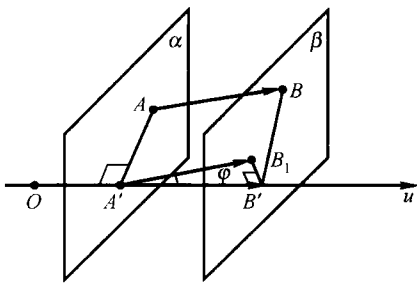


图 6-14

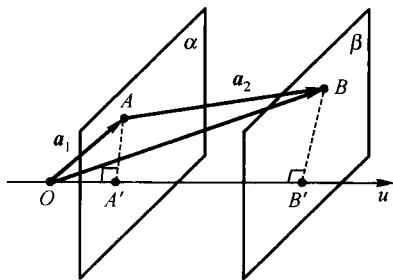


图 6-15

$$\text{Prj}_u(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \dots + \mathbf{a}_n) = \text{Prj}_u \mathbf{a}_1 + \text{Prj}_u \mathbf{a}_2 + \dots + \text{Prj}_u \mathbf{a}_n.$$

类似地, 可以证明如下性质:

性质 1.3 向量与数的乘积在轴上的投影等于向量在轴上的投影与该数的乘积, 即

$$\text{Prj}_u(\lambda \mathbf{a}) = \lambda \text{Prj}_u \mathbf{a},$$

其中 $\mathbf{a}$ 为任意向量, λ 为任一实数.

习 题 6-1

(A)

1. 单项选择题.

(1) 设 M 是平行四边形 $ABCD$ 的中心, O 是任意点, 则 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} =$ ();

(A) $\overrightarrow{OM}$

(B) $2\overrightarrow{OM}$

(C) $3\overrightarrow{OM}$

(D) $4\overrightarrow{OM}$

(2) 若在四边形 $ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $\overrightarrow{BC} = -4\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD} = -5\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ ($\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$), 则四边形 $ABCD$ 是 ().