■ 高等学校教材

高等数学

下册

郑连存 王 辉 朱 婧 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等数学

下册

郑连存 王 辉 朱 婧 编

高等教育出版社

内容提要

本书是根据多年教学实践，参照“工科类本科数学基础课程教学基本要求”和《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，按照新形势下教材改革的精神编写而成。与同类教材不同，本书将数学软件 Mathematica 融入到教学实践环节中，对传统的高等数学教学内容和体系进行适当整合，力求严谨清晰，富于启发性和可读性。

全书分上、下两册。上册内容为函数与极限，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，一元函数积分学及其应用和无穷级数。下册内容为向量代数与空间解析几何，多元函数微分学及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分及常微分方程。书中还配备了丰富的例题和习题，分为 A（为一般基本要求）、B（有一定难度和深度）两类，便于分层次教学。

本书可作为高等学校理、工科各类专业高等数学课程的教材。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下册／郑连存，王辉，朱婧编. —北京：高等教育出版社，2009.7

ISBN 978-7-04-027237-6

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①郑…②王…③朱… Ⅲ. 高等数学－高等学校－教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 085333 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　址	北京市西城区德外大街 4 号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网　址	http://www.hep.edu.cn
总　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　刷	国防工业出版社印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　本	787×960　1/16	版　次	2009 年 7 月第 1 版
印　张	25.25	印　次	2009 年 7 月第 1 次印刷
字　数	470 000	定　价	27.20 元

物料号　27237-00

目　　录

第六章　向量代数与空间解析几何

在平面解析几何中，通过坐标法把平面上的点与一对有次序的数对应起来，把平面上的图形和二元方程对应起来，从而可以用代数方法来研究平面几何问题. 类似地，也可以建立空间直角坐标系，将空间的曲面 (线) 和三元方程 (组) 对应起来，从而可以利用代数方法来研究空间几何问题.

本章首先引进在工程技术上具有广泛应用的向量，介绍向量的线性运算，建立空间直角坐标系，然后用坐标表示向量，讨论向量的数量积、向量的向量积及向量的混合积运算，以向量为工具来研究空间的平面和直线及其方程，最后介绍空间曲面、二次曲面及空间曲线. 这些内容不仅是学习后面的多元函数微积分学的重要基础，而且它们对物理学、力学、其它科学及工程都有着重要和广泛的应用. 本章的知识结构框图如图 6-1 所示.

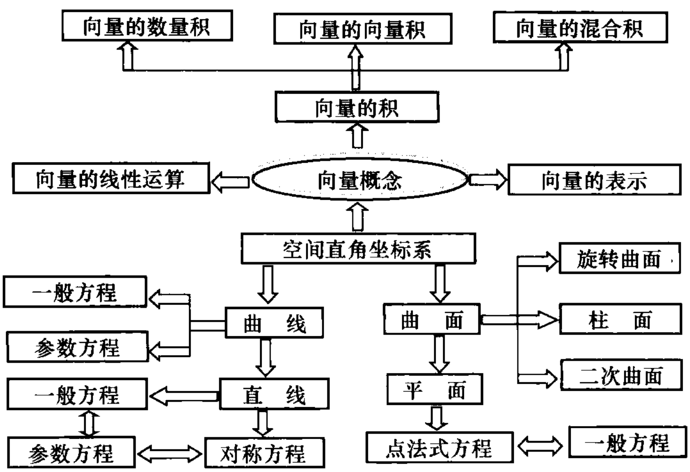

图 6-1

第一节　向量及其线性运算

本节介绍有关向量的概念、向量的加法、向量与数的乘法及其向量在某轴

上的投影.

一、向量概念

在研究力学、物理学以及其它应用科学时, 常会遇到这样一类量, 它们既有大小, 又有方向. 例如, 力、力矩、位移、速度等等, 把这种既有大小又有方向的量称为**向量**.

在数学上, 常常用一条有方向的线段, 即有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量大小, 有向线段的方向表示向量的方向. 以 M_1 为起点、M_2 为终点的有向线段所表示的向量, 记作 $\overrightarrow{M_1M_2}$, 如图 6–2 所示. 也用一个粗体字母或用一个书写体上面加箭头的字母来表示, 如向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{F}$ 等.

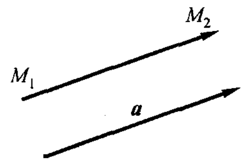

图 6–2

向量的大小称为**向量的模**, 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\boldsymbol{a}$ 的模分别记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$, $|\boldsymbol{a}|$. 模等于 1 的向量称为**单位向量**, 模等于 0 的向量称为**零向量**, 记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$. 零向量的起点和终点重合, 它的方向可以看作是任意的.

以坐标原点 O 为起点, 以点 M 为终点的向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 对于 O 的**向径**, 常用粗体字 $\boldsymbol{r}$ 表示.

由于所有向量的共性是它们都有大小和方向, 所以在数学上只研究与起点无关的向量, 并称这种向量为**自由向量** (简称**向量**), 即只考虑向量的大小和方向, 而不考虑它的起点在何处. 若两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等, 且方向相同, 则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是**相等的**, 记作 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. 这就是说, 经过平行移动后能完全重合的向量是相等的.

若两个非零向量的方向相同或者相反, 则称这两个**向量平行**. 向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行, 记作 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向可以看作是任意的, 因此可以认为零向量与任何向量都平行.

二、向量的线性运算

1. 向量的加减法

定义 1.1 设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 任取一点 A, 作 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, 再以 B 为起点, 作 $\overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$, 连接 AC, 如图 6–3 所示, 则向量 $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**, 记作 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, 即 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$. 这种作出两向量之和的方法称为向量相加的**三角形法则**.

力学上有求合力的平行四边形法则, 仿此, 也有向量相加的**平行四边形法则**. 当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时, 作 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$, 以及以 AB, AD 为邻边作平行四边形 $ABCD$, 连接对角线 AC, 如图 6–4 所示, 显然向量 $\overrightarrow{AC}$ 等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的

和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

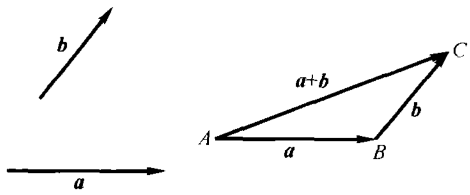

图 6–3

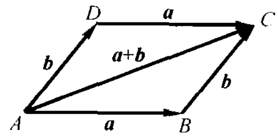

图 6–4

向量的加法满足下列运算规律:

(1) **交换律**　$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) **结合律**　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由图 6–5 可知: 结合律成立.

由于向量的加法符合交换律与结合律, 故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n (n \geqslant 3)$ 相加可写成 $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$, 并按向量加法的三角形法则, 可得 n 个向量相加的法则如下: 使前一向量的终点作为后一向量的起点, 相继作出向量 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$; 再以第一向量的起点为起点, 最后一个向量的终点为终点作一向量, 这一向量即为所求的和. 例如,

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3+\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5,$$

其和如图 6–6 所示.

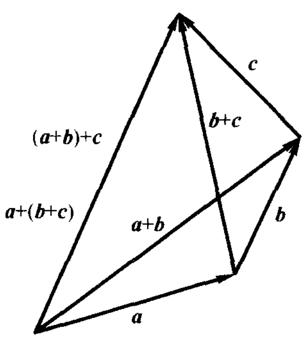

图 6–5

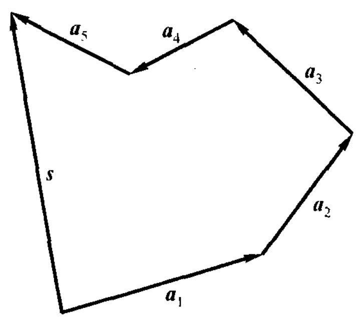

图 6–6

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量, 与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**, 记作 $-\boldsymbol{a}$. 由此, 规定两个向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的**差** $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$, 即把向量 $-\boldsymbol{a}$ 加到向量 $\boldsymbol{b}$ 上, 便得 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, 如图 6–7 所示. 类似地, 把 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起.

以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为起点, 以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为终点的向量即为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. 特别地, 当 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$ 时, 有 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

由于三角形两边之和大于第三边, 于是得到

三角形不等式

$$|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

其中等号在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行时成立.

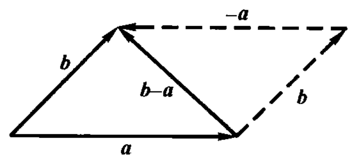

图 6-7

2. 向量与数的乘法

定义 1.2 设 λ 是实数, $\boldsymbol{a}$ 是一个向量, λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的**乘积**记作 $\lambda\boldsymbol{a}$, 其定义如下:

(1) $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量;

(2) 其模为 $|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|$;

(3) 其方向为: 当 $\lambda>0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同; 当 $\lambda<0$ 时, $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反;

(4) 当 $\lambda=0$ 时, $|\lambda\boldsymbol{a}|=0$, 即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量, 这时它的方向可以是任意的.

特别地, 当 $\lambda=\pm1$ 时, 有 $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

向量与数的乘积符合下列运算规律:

(1) **结合律** $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$, 其中 λ,μ 为任意实数, $\boldsymbol{a}$ 为向量.

由向量与数的乘积的定义可知, 向量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$, $\mu(\lambda\boldsymbol{a})$, $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 都是平行的向量, 它们的指向是相同的, 而且 $|\lambda(\mu\boldsymbol{a})|=|\mu(\lambda\boldsymbol{a})|=|(\lambda\mu)|\,|\boldsymbol{a}|$, 所以 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

(2) **分配律** $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$;

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},$$

其中 λ,μ 为任意实数, $\boldsymbol{a}$ 为向量.

这个规律同样可以按向量与数的乘积的定义来证明, 这里从略.

定理 1.1 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 则向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是存在唯一的实数 λ, 使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证 条件的充分性是显然的, 下面证明条件的必要性.

设 $\boldsymbol{b}//\boldsymbol{a}$, 由于 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$, 所以 $|\boldsymbol{a}|\neq0$. 取 $\lambda=\pm\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$, 当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同时, λ 取正号; 当 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 方向相反时, λ 取负号, 此时 $\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$ 方向相同, 且

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|,$$

即有 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

再证数 λ 的唯一性. 设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 且 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$, 两式相减, 便得

$$(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},$$

即 $|\lambda-\mu|\,|\boldsymbol{a}|=0$, 因 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$, 故 $|\lambda-\mu|=0$, 即 $\lambda=\mu$.

记 $\boldsymbol{e_a}$ 表示与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量, 按照向量与数的乘积的定义, 由于 $|\boldsymbol{a}|>0$, 所以 $|\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{e_a}$ 与 $\boldsymbol{e_a}$ 的方向相同, 即 $|\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{e_a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同. 又因 $|\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{e_a}$ 的模是 $|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{e_a}|=|\boldsymbol{a}|\cdot 1=|\boldsymbol{a}|$, 即 $|\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{e_a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的模也相同, 因此 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{e_a}$. 故当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时, 与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量

$$\boldsymbol{e_a}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

向量的加法和向量与数的乘法统称为向量的线性运算.

例 1.1 在 $\triangle ABC$ 中, D,E 是 BC 边上的三等分点, 如图 6–8 所示, 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$, 试用 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AD}$ 和 $\overrightarrow{AE}$.

解 由三角形法则, 有

$$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},$$

再由数与向量的乘法, 有

$$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{EB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),$$

所以

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b});$$

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})+\frac{1}{3}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\frac{1}{3}(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

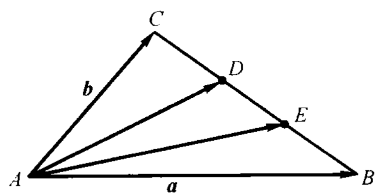

图 6–8

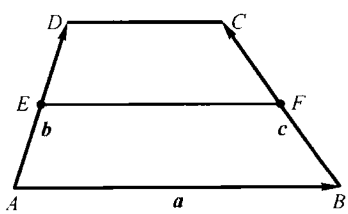

图 6–9

例 1.2 利用向量证明: 梯形两腰中点连线平行于两底边, 其长度为两底边长度之和的一半.

证 设梯形为 $ABCD$, 如图 6–9 所示. 并设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$. 由于 $DC//AB$, 所以 $\overrightarrow{DC}//\overrightarrow{AB}$, 可设 $\overrightarrow{DC}=\lambda\overrightarrow{AB}=\lambda\boldsymbol{a}$, 且 $\lambda>0$. 因为

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{0},$$

即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}-\lambda\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, 所以 $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}=(\lambda-1)\boldsymbol{a}$.

又由于

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{c},$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF}&=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{a}\\&=\frac{1}{2}(\lambda-1)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}(1+\lambda)\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

即 $\overrightarrow{EF}//\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF}//\overrightarrow{DC}$, 且 $\left|\overrightarrow{EF}\right|=\frac{1}{2}(1+\lambda)\,|\boldsymbol{a}|=\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|+\lambda\,|\boldsymbol{a}|)=\frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{DC}|)$.

三、向量在轴上的投影

1. u 轴上有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的值

定义 1.3 设有一数轴 u, $\overrightarrow{AB}$ 是 u 轴上的有向线段, 如图 6–10 所示. 若数 λ 满足 $|\lambda|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$, 且当 $\overrightarrow{AB}$ 的方向与 u 轴方向相同时, λ 取正值; 当 $\overrightarrow{AB}$ 的方向与 u 轴方向相反时, λ 取负值, 则称数 λ 为**有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的值**, 记作 AB, 即 $\lambda=AB$.

设 $\boldsymbol{e}$ 是与 u 轴同方向的单位向量, 易看出: 若有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的值 $AB=\lambda$, 则向量 $\overrightarrow{AB}=\lambda\boldsymbol{e}$; 反之, 若向量 $\overrightarrow{AB}=\lambda\boldsymbol{e}$, 则 $AB=\lambda$. 由此可知: $\overrightarrow{AB}=(AB)\boldsymbol{e}$.

例 1.3 在 u 轴上取一定点 O 作为坐标原点, 设 A, B 是 u 轴上坐标依次为 u_1, u_2 的两个点, $\boldsymbol{e}$ 是与 u 轴同方向的单位向量, 如图 6–10 所示, 证明: $\overrightarrow{AB}=(u_2-u_1)\boldsymbol{e}$.

证 因为点 A 的坐标为 u_1, 即 u 轴上有向线段 $\overrightarrow{OA}$ 的值 $OA=u_1$, 所以 $\overrightarrow{OA}=u_1\boldsymbol{e}$; 同理, $\overrightarrow{OB}=u_2\boldsymbol{e}$, 于是 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=u_2\boldsymbol{e}-u_1\boldsymbol{e}=(u_2-u_1)\boldsymbol{e}$.

2. 两向量的夹角

定义 1.4 设有两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$, 任取空间一点 O, 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, 规定不超过 π 的 $\angle AOB$(记 $\varphi=\angle AOB, 0\leqslant\varphi\leqslant\pi$) 称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角**, 如图 6–11 所示, 记作 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$, 即 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\varphi$.

若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量, 则规定它们的夹角可在 0 与 π 之间任意取值. 类似地, 可以规定向量与数轴的夹角.

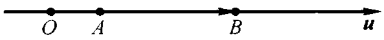

图 6-10

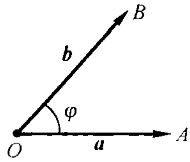

图 6-11

3. 空间点与向量在轴 u 上的投影

定义 1.5 已知空间一点 A 以及一数轴 u, 过点 A 作 u 轴的垂直平面 α, 那么平面 α 与 u 轴的交点 A' 称为点 A 在 u 轴上的投影, 如图 6-12 所示.

定义 1.6 设向量 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 和终点 B 在 u 轴上的投影分别为 A' 和 B', 如图 6-13 所示, 则 u 轴上的有向线段 $\overrightarrow{A'B'}$ 称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的**分向量或投影向量**, $\overrightarrow{A'B'}$ 的值 $A'B'$ 称为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 u **轴上的投影**, 记作 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}$ 或 $(\overrightarrow{AB})_u$, 即 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB} = A'B'$, u 轴称为**投影轴**.

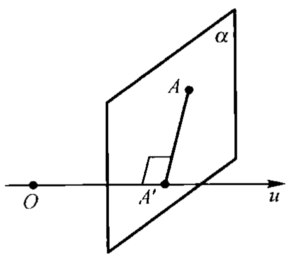

图 6-12

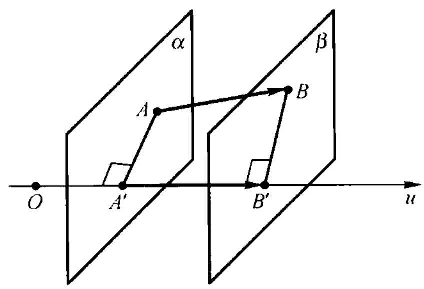

图 6-13

注 一个向量在某轴上的投影是一个数量, 它可以是正数, 也可以是负数或零, 而一个向量在某轴上的投影分量或投影向量是一个向量.

性质 1.1 (投影定理) 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的投影等于向量的模乘以轴与向量的夹角 φ 的余弦, 即

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi.$$

证 把向量 $\overrightarrow{AB}$ 平行移动, 使得 $\overrightarrow{AB}$ 的起点与 A' 重合, 如图 6-14 所示, 则 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B_1}$. 由定义 1.6 得,

$$\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB} = A'B' = \left|\overrightarrow{A'B_1}\right|\cos\varphi = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi.$$

性质 1.2 两个向量的和在轴上的投影等于这两个向量在该轴上投影的和，即

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2.$$

证 设有向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2$ 及 u 轴，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}_1$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}_2$，如图 6–15 所示，则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2$. 设点 A,B 在 u 轴上的投影点分别为 A',B'，由定义 1.6，有

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)=OB'=OA'+A'B'=\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{OA}+\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{AB}=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2.$$

该性质可以推广到 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的情形，即

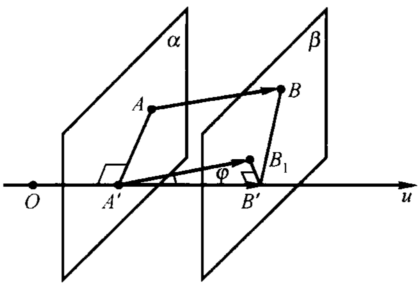

图 6–14

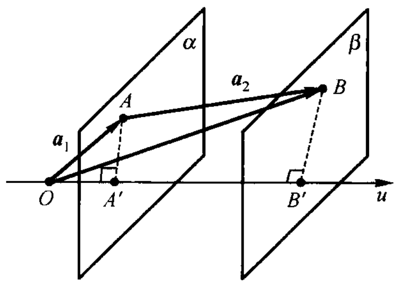

图 6–15

$$\mathrm{Prj}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n)=\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_1+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_2+\cdots+\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}_n.$$

类似地，可以证明如下性质：

性质 1.3 向量与数的乘积在轴上的投影等于向量在轴上的投影与该数的乘积，即

$$\mathrm{Prj}_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\,\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a},$$

其中 $\boldsymbol{a}$ 为任意向量，λ 为任一实数.

习　题　6–1

(A)

1. 单项选择题.

(1) 设 M 是平行四边形 $ABCD$ 的中心，O 是任意点，则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=$ (　　)；

(A) $\overrightarrow{OM}$　　(B) $2\overrightarrow{OM}$　　(C) $3\overrightarrow{OM}$　　(D) $4\overrightarrow{OM}$

(2) 若在四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-4\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ ($\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$)，则四边形 $ABCD$ 是 (　　).