高等数学

学习指导与练习

GAODENG SHUXUE
XUEXI ZHIDAO YU LIANXI

主编 张士林

新疆大学出版社
XINJIANG UNIVERSITY PRESS

高等数学学习指导与练习

主　编　张士林
参　编　李志军　殷　珊　张蜀红

新疆大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导与练习/张士林主编. —乌鲁木齐:新疆大学出版社,2008.10

ISBN 978-7-5631-2253-0

Ⅰ.高… Ⅱ.张… Ⅲ.高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 157750 号

高等数学学习指导与练习

主 编 张士林

参 编 李志军 殷 珊 张蜀红

新疆大学出版社出版发行

(乌鲁木齐市胜利路 14 号 邮编:830046)

乌鲁木齐大金马印务有限责任公司印刷

787×1092 1/16 8 印张 200 千字

2008 年 10 月第 1 版 2008 年 10 月第 1 次印刷

印数:0001-4000

ISBN 978-7-5631-2253-0 定价:14.80 元

目　　录

第一章　函　数

本章学习要求与内容提要

（一）学习要求

1. 理解函数的概念.

2. 了解分段函数、基本初等函数、初等函数的概念.

3. 了解反函数、复合函数的概念，会分析复合函数的复合结构.

4. 会建立简单实际问题的函数模型.

重点　函数的概念、复合函数和初等函数的概念，会求函数的定义域.

难点　分段函数的概念，建立简单实际问题的函数模型.

（二）内容提要

1. 函数的定义

（1）函数的定义

定义 1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x \in D$，变量 y 按照一定法则总有唯一确定的数值与其对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$. 数集 D 称为该函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量.

当自变量 x 取数值 x_0 时，因变量 y 按照法则 f 所取定的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$. 当自变量 x 遍取定义域 D 的每个数值时，对应的函数值的全体组成的数集 $W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

定义 2　设 D 与 B 是两个非空实数集，如果存在一个对应规则 f，使得对 D 中任何一个实数 x，在 B 中都有唯一确定的实数 y 与 x 对应，则对应规则 f 称为在 D 上的函数，记为

$$f: x \to y \quad 或 \quad f: D \to B,$$

y 称为 x 对应的函数值，记为 $y = f(x)$，$x \in D$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量.

由定义 2 知，函数是一种对应规则，在函数 $y = f(x)$ 中，f 表示函数，$f(x)$ 是对应于自变量 x 的函数值，但在研究函数时，这种对应关系总是通过函数值表现出来的，所以习惯上常把在 x 处的函数值 y 称为函数，并用 $y = f(x)$ 的形式表示 y 是 x 的函数. 但应正确理解，函数的本质是指对应规则 f. 例如 $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ 就是一个特定的函数，f 确定的对应规则为 $f(\quad) = (\quad)^3 + 4(\quad)^2 - 10$ 就是一个函数.

（2）函数的两要素

函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 是自变量 x 的取值范围，而函数值 y 又是由对应规则 f 来确定的，所以函数实质上是由其定义域 D 和对应规则 f 所确定的，因此通常称函数的定义域和对应规则为函数的两个要素. 也就是说，只要两个函数的定义域相同，对应规则也相同，就称这两个函数为相同的函数，与变量用什么符号表示无关，如 $y=|x|$ 与 $z=\sqrt{v^2}$，就是相同的函数.

2. 函数的三种表示方法

（1）图像法

用函数的图形来表示函数的方法称为函数的图像表示方法，简称图像法. 这种方法直观性强并可观察函数的变化趋势，但根据函数图形所求出的函数值准确度不高且不便于作理论研究.

（2）表格法

将自变量的某些取值及与其对应的函数值列成表格表示函数的方法称为函数的表格表示方法，简称表格法. 这种方法的优点是查找函数值方便，缺点是数据有限、不直观、不便于作理论研究.

（3）公式法

用一个（或几个）公式表示函数的方法称为函数的公式表示方法，简称公式法，也称为解析法. 这种方法的优点是形式简明，便于作理论研究与数值计算，缺点是不如图像法来得直观.

在用公式法表示函数时经常遇到下面几种情况：

① 分段函数

在自变量的不同取值范围内，用不同的公式表示的函数，称为分段函数. 如

$$f(x)=\begin{cases}x+1, x<0,\\ x^2, 0\leqslant x<2,\\ \sin x, 2\leqslant x\leqslant 5.\end{cases}$$

就是一个定义在区间 $(-\infty,5]$ 上的分段函数.

② 用参数方程确定的函数

用参数方程 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}\quad(t\in \mathrm{I})$

表示的变量 x 与 y 之间的函数关系，称为用参数方程确定的函数. 例如函数 $y=\sqrt{1-x^2}\,(x\in[-1,1])$ 可以用参数方程 $y=\begin{cases}\cos t\\ \sin t\end{cases}\quad(0\leqslant t\leqslant\pi)$ 表示.

③ 隐函数

如果在方程 $F(x,y)=0$ 中，当 x 在某区间 I 内任意取定一个值时，相应地总有满足该方程的唯一的 y 值存在，则称方程 $F(x,y)=0$ 在区间 I 内确定了一个隐函数. 例如方程 e^x+xy

$-1=0$ 就确定了变量 y 是变量 x 之间的函数关系.

注意　能表示成 $y=f(x)$（其中 $f(x)$ 仅为 x 的解析式）的形式的函数，称为显函数. 把一个隐函数化成显函数的过程称为隐函数的显化. 例如 $e^x+xy-1=0$ 可以化成显函数 $y=\frac{1-e^x}{x}$. 但有些隐函数确不可能化成显函数，例如 $e^x+xy-e^y=0$.

3. 函数的四种特性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为区间 D，函数的四种特性如下表所示.

表 1－1　函数的四种特性表

函数的特性	定　　义	图像特点
奇偶性	设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对任意 $x\in D$ 满足 $f(-x)=f(x)$ 则称 $f(x)$ 是 D 上的偶函数；若对任意 $x\in D$ 满足 $f(-x)=-f(x)$ 则称 $f(x)$ 是 D 上的奇函数，既不是奇函数也不是偶函数的函数，称为非奇非偶函数	偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于原点对称
单调性	若对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$ 则称函数 $y=f(x)$ 是区间 (a,b) 上的单调增加函数；当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $y=f(x)$ 是区间 (a,b) 上的单调减少函数，单调增加函数和单调减少函数统称单调函数，若函数 $y=f(x)$ 是区间 (a,b) 上的单调函数，则称区间 (a,b) 为单调区间	单调增加的函数的图像表现为自左至右是单调上升的曲线；单调减少的函数的图像表现为自左至右是单调下降的曲线
有界性	如果存在 $M>0$，使对于任意 $x\in D$ 满足 $\lvert f(x)\rvert\leq M$ 则称函数 $y=f(x)$ 是有界的	图像在直线 $y=-M$ 与 $y=M$ 之间
周期性	如果存在常数 T，使对于任意 $x\in D$，$x+T\in D$，有 $f(x+T)=f(x)$ 则称函数 $y=f(x)$ 是周期函数，通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期	在每一个周期内的图像是相同的

4. 基本初等函数

表 1－2　六种基本初等函数

函　数	解析表达式
常函数	$y=C$（C 为常数）
幂函数	$y=x^a$（a 为常数）
指数函数	$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$，a 为常数）
对数函数	$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$，a 为常数）
三角函数	$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$
反三角函数	$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$, $y=\operatorname{arcsec} x, y=\operatorname{arccsc} x$

函数习题

一、选择题

1. $y = \sqrt{x^3 - 8}$ 的定义域是________.

A. $[2, +\infty)$　　B. $(-2, +\infty)$

C. $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$　　D. $(-\infty, -2)$

2. $f(x) = \sqrt{4-x}\ln(x-1)$ 的定义域是________.

A. $(1, +\infty)$　　B. $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$　　C. $(1, 4]$　　D. $(1, 4)$

3. 下列各组中,________组的两个函数相同.

A. $f(x) = \sin x$ 与 $g(x) = 2\sin x$　　B. $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$ 与 $g(x) = x^2 - 1$

C. $f(x) = \ln x^2$ 与 $g(x) = 2\ln x$　　D. $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$ 与 $g(x) = x^2 + 1$

4. 函数 $y = \cos^2 \ln x$ 可以看成由简单函数________的复合.

A. $y = \cos u, u = v^2, v = \ln x$　　B. $y = \cos^2 u, u = \ln x$

C. $y = u^2, u = \cos v, v = \ln x$　　D. $y = \cos u, u = 2\ln x$

5. 设函数 $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$,则 $f(-1) =$________.

A. 0　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. -1

二、填空题

1. $y = \arcsin \dfrac{x-1}{3}$ 的定义域是________.

2. $y = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x-4}$ 的定义域是________________.

三、设函数 $f(x) = \dfrac{x^2}{x-2}$,求 $f(0), f(1), f(-x+1)$.

四、试做函数 $y = \begin{cases} 1 + x, & -1 \leqslant x < 0, \\ 1 - x, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$ 的图像.

五、试做函数 $f(x) = \begin{cases} 3x, & |x| > 1, \\ x^2, & |x < 1, \\ 2, & |x| = 1 \end{cases}$ 的图像,并求 $f(0)$,$f(1)$,$f(-2)$ 的值.

六、下列各题中,函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同?为什么?

1. $f(x) = \ln x^4, g(x) = 4\ln x$;

2. $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 1}, g(x) = x^2 - 1$.

七、求由函数 $y = \log_a u, u = v^3, v = 2 + t$ 复合而成的函数.

八、下列函数可以看成是那些简单函数的复合？

1. $y = \log_a \sin 2^{x+1}$;

2. $y = \arcsin \sqrt{\lg(x-1)}$;

3. $y = \cos(e^x - 1)^2$;

4. $y = \cos^2 \ln(x^2 - 2x + 1)$.

第二章　极限与连续

一、本章提要

（一）基本概念

函数的极限，左极限，右极限，数列的极限，无穷小量，无穷大量，等价无穷小，在一点连续，连续函数，间断点，第一类间断点（可去间断点，跳跃间断点），第二类间断点.

（二）基本公式

1. $\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{\sin\square}{\square}=1$；

2. $\lim\limits_{\square\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\square}\right)^{\square}=e$（$\square$ 代表同一变量）.

（三）基本方法

1. 利用函数的连续性求极限；
2. 利用四则运算法则求极限；
3. 利用两个重要极限求极限；
4. 利用无穷小替换定理求极限；
5. 利用分子、分母消去共同的非零公因子求$\dfrac{0}{0}$形式的极限；
6. 利用分子、分母同除以自变量的最高次幂求$\dfrac{\infty}{\infty}$形式的极限；
7. 利用连续函数的函数符号与极限符号可交换次序的特性求极限；
8. 利用“无穷小与有界函数之积仍为无穷小量”求极限.

（四）定理

左右极限与极限的关系，单调有界原理，夹逼准则，极限的唯一性，极限的保号性，极限的四则运算法则，极限与无穷小的关系，无穷小的运算性质，无穷小的替换定理，无穷小与无穷大的关系，初等函数的连续性，闭区间上连续函数的性质.

二、要点解析

问题 1　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 如果存在，那么函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是否一定有定义？

解析　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在与 $f(x)$ 在 x_0 处是否有定义无关. 例如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，而 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 处无定义；又如 $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，而 $f(x)=x^2$ 在 $x=0$ 处有定义. 所以，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，不一定有 $f(x)$ 在 x_0 点有定义.

问题 2　若 $\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)\cdot f(x)]=A$ 存在，那么 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是否一定存在？是否一定有 $\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)\cdot f(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$？

解析　$\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)\cdot f(x)]=A$ 存在，并不能保证 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 均存在. 例如 $\lim\limits_{x\to x_0}x^2\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to x_0}x=0$，而 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{x}$ 不存在. 又因为只有在 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 均存在的条件下，才有 $\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)\cdot f(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)\cdot f(x)]$ 存在，不能保证 $\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)\cdot f(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

问题 3　$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$ 是否正确，为什么？

解析　不正确. 尽管 $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=\infty$，而 $\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{-1}{|x|}}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{e^{\frac{1}{|x|}}}=0.$

这说明，$x\to 0$ 时，$e^{\frac{1}{x}}$ 不是无穷大.

习题一　极限的定义

一、选择题

1. 下列各式中，正确的是________.

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$

C. $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x=1$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$

2. 设 $f(x)=|x|$，则 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=$________.

A. -1　　B. 1　　C. 0　　D. 不存在

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________.

A. 1　　B. -1　　C. 0　　D. 不存在

4. 比较下列各函数：$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $g(x)=\begin{cases}x+1, x\neq 1,\\ -1, x=1,\end{cases}$ 在 $x\to 1$ 时的极限情况________.

A. 均不存在　　B. $f(x)$ 无极限

C. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$ 及 $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=2$　　D. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$ 且 $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=2$

二、判断题

1. 因为$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在，所以$f(x)$ 在点 x_0 点必须有定义；（ ）

2. 当 $x \to x_0$ 时，函数在 x_0 的极限值不一定是$f(x_0)$；（ ）

3. $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = \lim\limits_{x \to 3} 3^2 = 9$；（ ）

4. $\lim\limits_{x \to \infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$.（ ）

三、试作函数$f(x) = \begin{cases} x^3, x \neq 0, \\ 1, x = 0 \end{cases}$的图像，并求$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

四、从函数的定义域和函数值两个方面比较下列各函数：

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$；　$g(x) = x + 1$；　$h(x) = \begin{cases} x + 1, x \neq 1, \\ 3, x = 1. \end{cases}$

五、已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x<0, \\ 2, & x=0, \\ x^2+1, & x>0. \end{cases}$

求其在 $x=0$ 处的左右极限,并讨论其极限是否存在.

六、讨论函数 $f(x)=\begin{cases} 2x, & 0<x\leqslant 1, \\ x^2, & 1<x<2, \\ x^3, & 2\leqslant x<3 \end{cases}$

在 $x=1,\dfrac{3}{2},2$ 各点处的左右极限及其极限是否存在.

习题二　极限的运算

一、选择题

1. 若$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to0}g(x)$ 不存在，则下列命题正确的是________.

A. $\lim\limits_{x\to0}[f(x)+g(x)]$ 存在　　B. $\lim\limits_{x\to0}[f(x)+g(x)]$ 不存在

C. $\lim\limits_{x\to0}[f(x)-g(x)]$ 存在　　D. $\lim\limits_{x\to0}[f(x)\pm g(x)]$ 与具体函数有关

2. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x-3}{5x+3}=$ ____________.

A. $-\dfrac{7}{28}$　　B. $\dfrac{7}{28}$　　C. $\dfrac{3}{28}$　　D. $-\dfrac{3}{28}$

3. 极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{10+x^2}-x)=$ ____________.

A. 5　　B. -5　　C. 10　　D. -10

4. $\lim\limits_{x\to2}=\dfrac{x^2-4x+4}{x-2}=$ ____________.

A. 不存在　　B. -2　　C. 0　　D. 2

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{5+\dfrac{1}{x^2}}=$ ____________.

A. 不存在　　B. $\dfrac{1}{5}$　　C. $-\dfrac{1}{5}$　　D. 0

二、由$\lim\limits_{x\to a}x=a(a\in R)$ 及极限的法则求下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to5}6x$;　　2. $\lim\limits_{x\to2}(6x+5)$;

3. $\lim\limits_{x \to 10}(x^2 - 6x)$;

4. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{2x-1}{5x-3}$.

三、求下列极限

1. $\lim\limits_{x \to -6} \dfrac{x^2-36}{x+6}$;

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-5x+4}{x-1}$;

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$;

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$.