国家示范性高等职业院校教材

（经济管理、计算机类）

高等数学（上）

Advanced Mathematics

主　编　李志林　　副主编　马智杰

西北工業大學出版社

国家示范性高等职业院校教材

高等数学

（经济管理、计算机类）

上册

主　编　李志林
副主编　马智杰
主　审　蒋大为
副主审　何力争

西北工业大学出版社

【内容简介】 本书是根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学和经济数学课程教学基本要求》编写的.

本书分为上、下两册.上册为一元微积分,主要内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用;下册为线性代数及概率、统计初步,主要内容包括行列式、矩阵、线性方程组、概率初步、数理统计初步.

本书既可作为高职高专经济管理、计算机类高等数学课程的通用教材,也可供经济管理人员自学和数学爱好者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:经济管理、计算机类/李志林主编.—西安:西北工业大学出版社,2009.8

ISBN 978-7-5612-2632-2

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第153661号

出版发行: 西北工业大学出版社
通信地址: 西安市友谊西路127号　　**邮编:** 710072
电　　话: (029)88493844　　88491757
网　　址: www.nwpup.com
印 刷 者: 陕西向阳印务有限公司
开　　本: 727 mm×960 mm　1/16
印　　张: 30.75
字　　数: 522千字
版　　次: 2009年8月第1版　　2009年8月第1次印刷
定　　价: 52.00元(本册:26.00元)

前　　言

高等职业教育是我国职业教育体系的重要组成部分，其教材建设是推动高等职业教育改革和发展的重要因素. 为适应高等职业教育经济管理、计算机类“高等数学”课程的教学要求和国家示范性高等职业院校教学改革的需要，我们根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学和经济数学课程教学基本要求》编写了本书.

本书针对高等职业教育培养应用型人才重在实践能力和职业技能的特点，在编写过程中，基础知识贯彻“以实用为主，以够用为度，适当超前”的原则，以掌握概念、强化应用、培养技能为教学重点. 注重以实例引入概念，并最终回到数学应用的思想，加强对学生的数学应用意识、兴趣及能力培养，重视培养学生应用数学原理和方法消化吸收经济概念、经济原理的能力. 通过加强数学思想方法的教学，将经济问题转化为数学模型的思想贯穿各章，注重与实际应用联系较多的基础知识、基本方法和基本技能的训练，但不追求过分复杂的计算和变换，以增强教学的实践性和实用性，培养学生分析问题及解决问题的能力.

本书文字叙述力求层次分明、通俗易懂、图文并茂，对一些定理、性质通过图示的方法，力求直观，使复杂问题简单化，更易于学生理解. 这种“以图释理”的编写风格，主要是为了适应高职高专经济管理、计算机类学生的学习特点，以便发挥其学习的主观能动性.

本书各章文前列有学习目标和知识要点，便于学生明确学习目标和掌握知识要点，各章文后精心设计了“本章小结”，可帮助学生更清楚地把握知识要点和主要内容. 各章、节后分别配有由简到难、层次清晰、紧扣知识点的习题及复习题，加强数学思维、数学方法的训练及对所学知识的巩固、总结和归纳. 书后附有基本初等函数的图形和性质，常用的初等数学公式，常用积分表及习题、复习题参考答案等，以方便学生在学习中查阅、参考、使用.

本书建议教学时数为 120 学时(上、下册各 60 学时)，适合于经济管理类的电子商务、市场营销、航空服务以及计算机信息管理、网络、系统维护等专业使用. 本书内容设计富有弹性，每章对主体内容之外的知识延伸内容标有 * 号，可根据专业特点、学生实际及学时灵活选用.

本书由西安航空职业技术学院基础部李金楼主任策划，由数学教研室谢歆鑫主任安排实施；由西安航空职业技术学院数学教研室李志林担任主编并负责编写了全书；由陕西航空职业技术学院数学教研室马智杰主任担任副主编；由西北工业大学应用数学系蒋大为教授担任主审；由西安航空职业技术学院数学教研室何力争担任副主审.

本书在编写过程中参考了有关专家的教材和专著，在此对他们表示衷心感谢！

由于编者水平所限，书中不足之处难免，敬请读者批评指正，以便修订时改进.

编　者

2009 年 6 月

目　录

第 1 章　函数、极限与连续

学习目标：通过本章的学习，要求掌握初等函数的结构及类型，掌握函数极限的概念，熟练掌握函数极限的计算，掌握函数连续性的概念以及连续与间断的判断方法，特别要掌握极限的思想方法，为微积分的学习打下坚实的基础.

知识要点：

(1) 复合函数，初等函数；

(2) 函数极限的概念；

(3) 极限的四则运算法则，两个重要的极限；

(4) 函数连续性的概念，函数的间断点.

函数是近代数学的基本概念之一，高等数学研究的对象就是函数. 极限是贯穿高等数学始终的一个重要概念，它是这门课程的基本推理工具. 连续则是函数的一个重要性态，连续函数是高等数学研究的主要对象. 本章将在高中所学函数的基础上，介绍复合函数、初等函数，研究函数的极限及函数的连续性.

1.1　初等函数

函数刻画变量之间相互依赖、相互制约的关系. 在中学已经学习了函数及有关的概念，函数的单调性、奇偶性、周期性、有界性等几种特性. 研究了幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数的图形及性质. 本节要介绍基本初等函数、简单函数、复合函数、初等函数、分段函数以及经济分析中几种常见的函数.

1.1.1　基本初等函数

中学学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数以及常数函数统称为基本初等函数. 即，基本初等函数包括以下 6 类函数：

(1) 常数函数：$y = C$（C 为常数）；

(2) 幂函数：$y = x^a$，其中，a 是任意实数；

(3) 指数函数：$y = a^x$，其中，a 是实常数，且 $a > 0, a \neq 1$；

(4) 对数函数：$y=\log_a x$，其中，a 是实常数，且 $a>0, a\neq 1$；

(5) 三角函数(6 个)：包括正弦函数 $y=\sin x$，余弦函数 $y=\cos x$，正切函数 $y=\tan x$，余切函数 $y=\cot x$，正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=\csc x$；

(6) 反三角函数(4 个)：包括反正弦函数 $y=\arcsin x$，反余弦函数 $y=\arccos x$，反正切函数 $y=\arctan x$ 和反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$.

基本初等函数是构成初等函数的基本元素. 基本初等函数的定义、图形、性质在中学已经详细学过了，它们是进一步研究函数的基础. 因其很重要，列入附录二，以备查阅.

1.1.2 简单函数

通常把由基本初等函数经过有限次的加、减、乘、除运算得到的函数称为简单函数. 如中学学过的多项式函数 $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$(包括一次函数 $y=ax+b$、二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 等)，分式函数 $y=\dfrac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_{n-1}x+b_n}$，以及诸如 $y=x+\sin x-\ln x$，$y=x^2-3e^x\sin x$，$y=\dfrac{x}{\cos x}-e^x\ln x+\dfrac{5}{\arctan x}$，… 都是简单函数.

1.1.3 复合函数

这是进入高等数学学习接触的第一个重要概念.

定义 设 y 是 u 的函数，$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数，$u=\varphi(x)$. 如果当 x 在 $u=\varphi(x)$ 的定义域或该定义域的子集取值时，得到的 u 在 $y=f(u)$ 的定义域之中，则称由 x 到 y 的函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称复合函数. x 是自变量，u 称为中间变量.

可见，复合函数是函数的函数. 例如，正弦函数 $y=\sin u$ 与一次函数 $u=\omega x+\varphi$，可复合成正弦型函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$；指数函数 $y=e^u$ 与幂函数 $u=-\dfrac{1}{x}$，可复合成 $y=e^{-\frac{1}{x}}$ 等. 又如，由函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x-1$ 可得复合函数 $y=\sqrt{x-1}$. 其定义域并不是 $u=x-1$ 的定义域 $\mathbf{R}$，而是 $\mathbf{R}$ 的子集 $[1,+\infty)$.

一般地，复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域是内层函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域的子集.

值得注意的是，不是任意两个函数都能构成一个复合函数. 例如：$y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 就不能构成复合函数. 因为，不论 x 取何值，得到的 $u=$

$2+x^2\geqslant 2$ 都不在 $y=\arcsin u$ 的定义域$[-1,1]$之中.

例 1 将下面的函数 y 表示成 x 的复合函数.

(1) $y=\sqrt{u},u=1-x^2$;

(2) $y=\ln u,u=1+v^2,v=\sec x$.

解 (1) $y=\sqrt{u}=\sqrt{1-x^2}$,即 $y=\sqrt{1-x^2}$;

(2) $y=\ln u=\ln(1+v^2)=\ln(1+\sec^2 x)$,即 $y=\ln(1+\sec^2 x)$.

例 2 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=\left(\arctan\dfrac{1}{x}\right)^3$; (2) $y=\ln\cos x^2$;

(3) $y=\sqrt{\log_2(3x-1)}$; (4) $y=e^{\sin^2 x}$.

解 (1) $y=\left(\arctan\dfrac{1}{x}\right)^3$ 是由 $y=u^3,u=\arctan v$ 及 $v=\dfrac{1}{x}$ 复合而成;

(2) $y=\ln\cos x^2$ 是由 $y=\ln u,u=\cos v$ 及 $v=x^2$ 复合而成;

(3) $y=\sqrt{\log_2(3x-1)}$ 是由 $y=\sqrt{u},u=\log_2 v$ 及 $v=3x-1$ 复合而成;

(4) $y=e^{\sin^2 x}$ 是由 $y=e^u,u=v^2$ 及 $v=\sin x$ 复合而成.

可见,指出函数的复合过程,就是将复合函数分解成若干个基本初等函数或简单函数.

例 3 已知 $f(x+1)=x^2-3x+2$,求 $f(x),f\left(\dfrac{1}{x}\right),f[f(x)]$.

解 令 $x+1=u$,则 $x=u-1$.

$$f(u)=f(x+1)=x^2-3x+2=$$
$$(u-1)^2-3(u-1)+2=u^2-5u+6$$

即
$$f(x)=x^2-5x+6$$
$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^2-5\left(\frac{1}{x}\right)+6=\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x}+6$$
$$f[f(x)]=[f(x)]^2-5f(x)+6=$$
$$(x^2-5x+6)^2-5(x^2-5x+6)+6=$$
$$x^4-10x^3+32x^2-35x+12$$

1.1.4 初等函数

通常把由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合步骤所构成的,并且能用一个解析式表达的函数,称为初等函数.即,初等函数包括基本初等函数、简单函数、复合函数以及由它们经过四则运算或复合运算得到的函

数.例如，$y=\ln(4+\sin x)$，$y=e^{2x}\sin(3x^2+2x+1)$，$y=\dfrac{\arcsin\sqrt{1-x}}{x+2}$，$y=e^{-x}+\dfrac{\sin x}{x}$ 等，都是初等函数.高中学过的函数，绝大多数都是初等函数.高等数学中研究的函数，大多数也是初等函数.

工程技术中经常用到的双曲函数：

双曲正弦函数

$$\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

双曲余弦函数

$$\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

双曲正切函数

$$\mathrm{th}x=\frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

也都是初等函数.

在微积分运算中，常把一个初等函数分解为若干个基本初等函数或简单函数来研究.因此，学会分析初等函数的结构是十分重要的.

初等函数虽然是常见的重要的函数，但非初等函数也经常遇到.

1.1.5 分段函数

通常把在定义域的不同范围要用不同的解析式表示的函数称为分段函数.例如：

符号函数（见图 1 - 1）

$$y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

取整函数（见图 1 - 2）

$$y=[x],\quad x\in\mathbf{R},\quad [x]\text{ 为不超过 } x \text{ 的最大整数部分}$$

函数（见图 1 - 3）

$$y=\begin{cases}-x, & x<0\\ 1, & x\geqslant 0\end{cases}$$

都为分段函数.

分段函数是一个函数，不是几个函数.因为分段函数在其定义域上不能用

一个解析式表示，所以分段函数不是初等函数，属于非初等函数.

分段函数在求值、作图以及研究其性质时，是分段进行的，呈现的图形应在一个坐标系中.

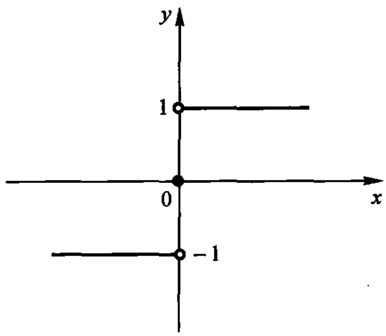

图　1-1

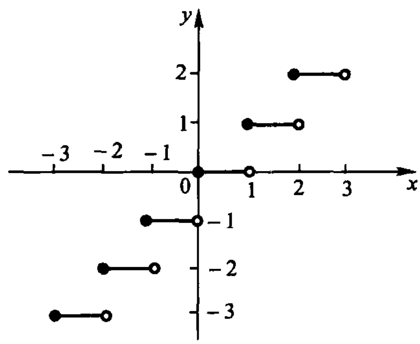

图　1-2

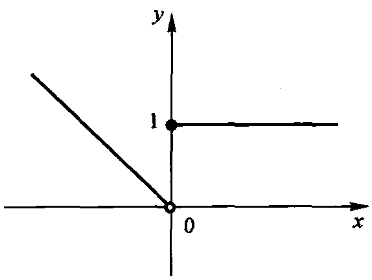

图　1-3

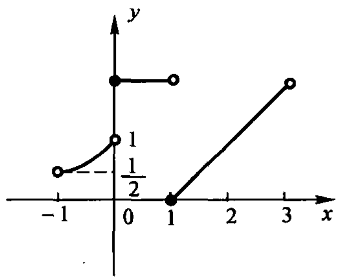

图　1-4

例 4　设 $f(x)=\begin{cases}2^x, -1<x<0\\ 2, 0\leqslant x<1\\ x-1, 1\leqslant x<3\end{cases}$，求 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$，$f(0)$，$f(0.7)$，$f(2)$，并作出其图形.

解　因为 $-\dfrac{1}{2}\in(-1,0)$，所以 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$；

因为 $0\in[0,1)$，所以 $f(0)=2$；

因为 $0.7\in[0,1)$，所以 $f(0.7)=2$；

因为 $2\in[1,3)$，所以 $f(2)=2-1=1$.

函数 $f(x)$ 的图形如图 1－4 所示.

1.1.6 经济分析中几种常见的函数

1. 需求函数

消费者对某种商品的需求量是受诸多因素影响的. 例如，该商品的市场价格、消费者的收入、消费者的偏好等，其中市场价格是影响需求量的一个十分重要的因素. 为讨论方便，忽略其他因素，假定某种商品的市场需求量只与这种商品的市场价格有关，即

$$Q_d = Q(P)$$

其中，Q_d 表示商品的需求量；P 表示商品的市场价格.

一般来说，需求量将随着价格的上涨而减少，因此，Q_d 是单调递减函数. 例如，函数

$$Q_d = aP + b$$

就是一个线性需求函数，其中 $a < 0, b > 0$，它的图形如图 1－5 所示. 常见的需求函数还有二次函数、指数函数等.

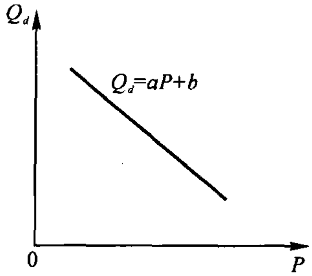

图 1－5

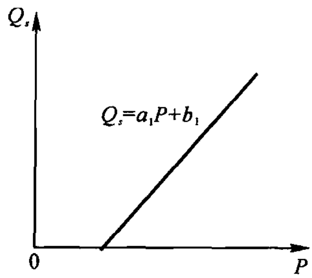

图 1－6

2. 供给函数

生产者对某种商品的供给量也是受多种因素影响的. 例如，商品的市场价格、生产成本等，在这里，也忽略其他因素，只将供给量看成商品市场价格的函数. 由于生产者向市场提供商品的目的是获取利润，所以，供给量是随着商品市场价格的上涨而增加的，即供给量是市场价格的单调递增函数. 例如，函数

$$Q_s = a_1 P + b_1$$

就是一个线性供给函数，其中，$a_1 > 0, b_1 < 0$，其图形如图 1－6 所示.

3. 成本函数

成本就是生产者用于生产商品的费用. 成本可分为两类：第一类是厂房、

设备等固定资产的折旧等，称为固定成本，用 C_0 来表示；第二类是能源费用、原材料费用、劳动者的工资等，这类成本的特点是随商品产量的变化而变化，称为可变成本，用 C_1 来表示. 这两类成本的总和就是生产者投入的总成本，用 C 来表示，即

$$C=C_0+C_1$$

一般认为 C_0 是不变的，而 C_1 是产量 Q 的函数，所以，成本 C 也就是产量 Q 的函数，即

$$C=C_0+C_1(Q)$$

这就是成本函数. 显然，成本是随着产量的增加而增加的，因此，成本函数是单调递增函数. 常见的成本函数类型有一次函数、二次函数等.

4. 收入函数

收入是指生产者的商品售出后的所得，用 R 来表示. 某种商品的销售总收入取决于该商品的销量 Q 和价格 P，即收入等于二者的乘积

$$R=QP$$

而价格 P 又随着销量的变化而变化，即 $P=P(Q)$，因此，收入 R 也就是销量的函数

$$R=QP(Q)$$

这就是收入函数.

例 5　已知某种商品的需求函数是

$$Q=200-5P$$

试求该商品的收入函数以及销售 20 件该商品时的总收入.

解　由需求函数可得

$$5P=200-Q$$

所以
$$P=40-\frac{Q}{5}$$

因此，该商品的收入函数为

$$R=QP=Q\left(40-\frac{Q}{5}\right)=40Q-\frac{Q^2}{5}$$

当销量 $Q=20$ 件时，总收入

$$R=40\times 20-\frac{20^2}{5}=720$$

5. 利润函数

利润是生产者的收入扣除成本后的剩余部分，用 L 表示. 即

$$L=R-C$$

如果将收入R和成本C都看做产量Q的函数，那么利润L也是产量Q的函数.

习题 1.1

1. 下列函数中，哪些是基本初等函数？哪些是简单函数？哪些是复合函数？哪些是初等函数？哪些是非初等函数？

(1) $y=2x$；　　(2) $y=x^{\sqrt{2}}$；

(3) $y=x+1$；　　(4) $y=2^{\sqrt{x}}$；

(5) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$；　　(6) $y=\sqrt{-x}$；

(7) $y=e^{\frac{1}{x}}+\sin\sqrt{x}$；　　(8) $y=\operatorname{sgn} x$；

(9) $y=[x]$.

2. 下列函数是否相同：

(1) $y=x$ 与 $y=\frac{x^2}{x}$；　　(2) $y=2\ln x$ 与 $y=\ln x^2$；

(3) $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$；　　(4) $y=x$ 与 $y=|x|$.

3. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+2}$；　　(2) $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$；

(3) $y=\frac{1}{x}-\sqrt{x^2-4}$；　　(4) $y=\ln(\ln x)$.

4. 将 y 表示成 x 的函数：

(1) $y=u^2$，　$u=e^x$；　　(2) $y=\sqrt{1+u^2}$，　$u=\cos x$；

(3) $y=\sin u$，　$u=1-v^2$，　$v=\ln x$；(4) $y=\operatorname{arccot} u$，　$u=2^v$，　$v=x^2$.

5. 指出下列函数的复合过程：

(1) $y=\sqrt{\sin e^x}$；　　(2) $y=2^{\sin\frac{1}{x}}$；

(3) $y=\sqrt{\ln\sqrt{x}}$；　　(4) $y=e^{\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

6. 设 $f(x)=\frac{1}{1-x}$，求 $f[f(x)]$，$f\{f[f(x)]\}$.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1+x, & x>1\end{cases}$. 求 $f(x)$ 的定义域及 $f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f(1)$，$f(3)$，并作图.

8. 已知某厂生产某种产品的成本函数为

$$C=500+2Q$$

其中，Q 为该产品的产量. 如果该产品的销售单价定为 6 元，试求该产品的利润函数.

1.2　函数的极限

极限是函数的一种变化趋势. 函数是变量，变量的变化趋势有三种：

(1) 绝对值无限增大；

(2) 绝对值无限减小；

(3) 趋于某个确定的常数.

1.2.1　自变量 x 的变化趋势

自变量的变化趋势也称自变量的变化过程. 有以下几种：

(1) 自变量 x 的绝对值无限增大，记为 $x\to\infty$，如图 1－7(a) 所示，自变量 x 沿 x 轴向两边无限延伸.

如果自变量 x 取正值，其绝对值无限增大，记为 $x\to+\infty$，如图 1－7(b) 所示，自变量 x 沿 x 轴向右无限延伸.

如果自变量 x 取负值，其绝对值无限增大，记为 $x\to-\infty$，如图 1－7(c) 所示，自变量 x 沿 x 轴向左无限延伸.

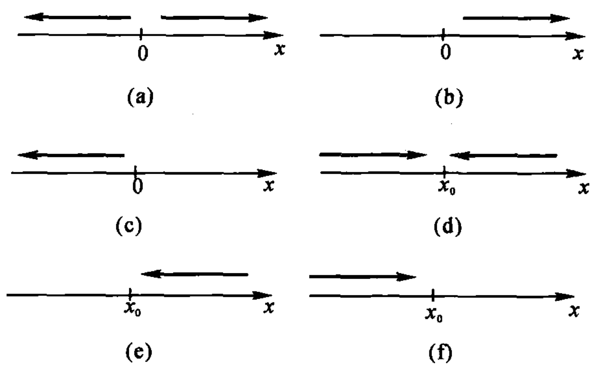

图　1－7

(2) 自变量 x 趋于某个确定的常数 x_0，记为 $x\to x_0$，如图 1－7(d) 所示，自变量 x 从 x_0 的两侧同时趋于 x_0.

如果 x 大于 x_0 而趋于 x_0，记为 $x\to x_0^+$，如图 1－7(e) 所示，即 x 从 x_0 的右侧趋于 x_0.

如果 x 小于 x_0 而趋于 x_0，记为 $x \to x_0^-$，如图 1-7(f) 所示，即 x 从 x_0 的左侧趋于 x_0.

1.2.2. 函数 $f(x)$ 的变化趋势

(1) 函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，如图 1-8(a) 所示，$f(x)$ 沿 y 轴向上、下无限延伸，记为 $f(x) \to \infty$，这时也称 $f(x)$ 为无穷大量.

(2) 函数 $f(x)$ 的绝对值无限减小，如图 1-8(b) 所示，$f(x)$ 沿 y 轴由上、下两个方向同时无限趋近于 x 轴，记为 $f(x) \to 0$，这时也称 $f(x)$ 为无穷小量.

(3) 函数 $f(x)$ 无限趋于某个确定的常数 A，如图 1-8(c) 所示，$f(x)$ 沿 y 轴由上、下两个方向同时无限趋近于直线 $f(x) = A$，记为 $f(x) \to A$.

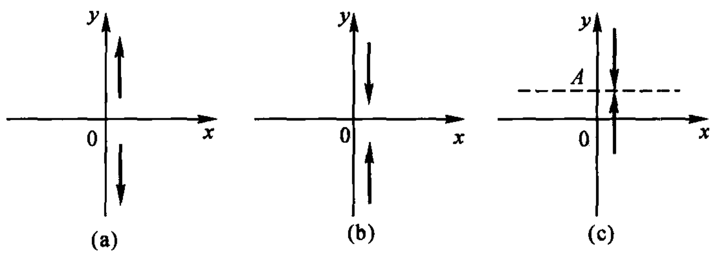

图 1-8

函数的第三种变化趋势（趋于某个确定的常数）就是函数的极限问题. 第二种变化趋势（绝对值无限减小）只是第三种变化趋势的一个特殊情形（趋于的常数为 0），因此，第二种变化趋势也可归入第三种变化趋势. 下面专门研究函数的第三种变化趋势 —— 极限.

1.2.3 函数的极限

函数的极限是函数的一种变化趋势，而函数是随自变量的变化而变化的. 因此，函数的极限是相对于自变量的变化过程而言的.

1. 当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

作函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 的图形，如图 1-9 所示，观察当 $x \to \infty$ 时，$f(x)$ 的变化趋势. 随着 $|x|$ 的增大，函数的曲线越来越趋近于 x 轴，即 $f(x)$ 无限趋近于常数 0.

(1) **定义 1** 如果当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 无限地趋近于一个确定的常数