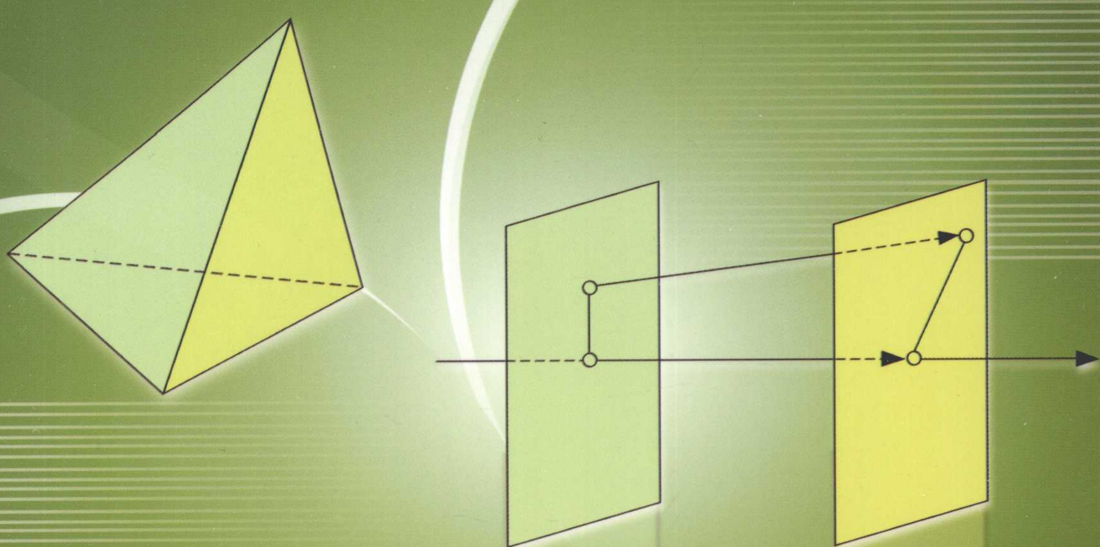
21世纪高等院校教材

# 解析几何

谢冬秀 编著



科学出版社
www.sciencep.com

21 世纪高等院校教材

# 解析几何

谢冬秀 编著

北京市教学名师建设项目资助
北京市重点建设学科项目资助

科学出版社
北 京

## 内 容 简 介

本书讲述解析几何的基本内容和基本方法，包括向量代数、空间坐标系、空间的平面和直线、常见曲面和曲线、二次曲面的一般理论. 本书注重读者的空间想象能力，论证严谨而简明，叙述深入浅出、条理清楚. 书末附有各章练习题的答案与提示.

本书可作为综合大学和高等师范院校数学及其相关专业解析几何课程的教材，也可供其他学习解析几何课程的广大读者作为教材或教学参考书.

**图书在版编目(CIP)数据**

解析几何/谢冬秀编著. —北京：科学出版社，2009
21 世纪高等院校教材
ISBN 978-7-03-024599-1

Ⅰ.解… Ⅱ.谢… Ⅲ.解析几何-高等学校-教材 Ⅳ.O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 077894 号

责任编辑：李鹏奇 滕亚帆 / 责任校对：李奕萱
责任印制：张克忠 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京智力达印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009 年 6 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2009 年 6 月第一次印刷 印张：13 1/4
印数：1—3 000 字数：260 000

**定价：23.00 元**

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新伟〉)

# 前　言

解析几何是大学数学系的主要基础课程之一，学好这门课对于学习数学分析、高等代数、微分几何和力学等课程都有很大的帮助，并且它本身对于解决一些实际问题也是很有用的. 本书是作者从 2001 年开始从事大学本科信息与计算科学专业的解析几何与高等代数课程的教学工作经验的总结. 本书主要考虑了以下几点：

1. 贯穿全书的主线是阐述解析几何的几种基本方法：坐标法、向量法、坐标变换法.

2. 本书注意培养读者对空间图形的直观想象能力，这尤其体现在第 4 章中关于旋转面、柱面和锥面方程的建立以及专门用一节介绍了画空间图形常用的三种方法，画曲面的交线和画曲面围成的区域的方法.

3. 本书论证严谨，同时又力求简明，叙述上深入浅出，条理清楚，注意厘清所讨论问题的来龙去脉.

本书共分 5 章：第 1 章向量代数，主要介绍向量的概念和线性运算、线性关系以及向量的内积、外积和混合积运算，不涉及坐标，是为了使读者能掌握向量代数的基本内容，熟练地进行向量的各种运算，并直接利用向量工具解决一些几何问题和物理问题；第 2 章介绍空间坐标系，包括仿射坐标、直角坐标系以及向量的各种运算在仿射坐标和直角坐标系中的坐标表示，使向量法和坐标法联系起来，便于后面章节中考虑的几何问题，考虑到坐标系的完整性同时也将数学分析中广泛应用的柱面坐标和球面坐标也纳入这一章；第 3 章利用向量法和坐标法，主要讨论了空间的平面与直线的各种方程及其它们之间的几何位置关系和度量关系；第 4 章介绍几类常见曲面与曲线的方程，以及二次曲面方程所对应的图形，在这一章也介绍了空间图形的作图方法；第 5 章介绍二次曲面的一般理论，内容包括直线与二次曲面的位置关系，曲面的直径面与主方向，同时也介绍了应用坐标变换和应用不变量化简二次曲面的方程.

本书中给出了很多的评注、例子，每章后配有三类练习题，一类题是基础题，二类题是提高题，三类题是复习测验题，本教材遵循的原则是：内容便于老师授课，习题便于学生练习和复习提高. 在编写本书时，编者参考了大量的著作、资料，采用的一些习题难以一一标示，特向原作者表示衷心的感谢.

本书是北京市教学名师建设项目和北京市重点建设学科的一项具体内容. 原稿在北京信息科技大学使用多次. 鉴于水平有限，书中有些内容的处理方法不一定妥当，难免存在错误，诚恳地希望大家批评指正.

作　者

2009 年 4 月于北京

# 目　录

# 第1章　向量代数

物理问题的探索不可避免地要求我们去寻求关于曲线和曲面的更多的知识，因为物体运动的轨迹都是曲线，而物体的表面则是曲面. 解析几何研究的主要内容就是曲线和曲面的图形与它们的方程，最基本的方法是向量法和坐标法. 本章主要讨论向量法，我们知道力、速度这些量既有大小又有方向，它们可以用有向线段来表示，力(或速度)的合成可以通过有向线段来进行，这类既有大小又有方向的量称为向量. 本章主要研究向量的代数运算，利用向量的运算来研究图形性质的方法称为向量法. 它的优点在于比较直观，比综合法简便，所以向量代数成为研究几何问题，特别是空间中的几何问题的有力工具. 它不仅在诸如力学、物理学和工程技术中有广泛的应用，而且也是学习其他数学课程的基础.

## 1.1　向量的概念

在力学、物理学以及日常生活中，我们经常会遇到像温度、时间、质量、密度、功、长度、面积与体积等，这种只有大小的量称为**数量**. 还有一些量，如物体移动的位移、质点运动的速度、作用在物体上的力等，它们不但有大小，而且还有方向，这种量称为**向量**(或**矢量**). 向量用符号 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$表示.

一个向量 $\boldsymbol{a}$ 可以用一条有向线段$\overrightarrow{AB}$来表示. 用这条线段的长度$|\overrightarrow{AB}|$表示 $\boldsymbol{a}$ 的大小，用起点 $A$ 到终点 $B$ 的指向表示 $\boldsymbol{a}$ 的方向(图 1.1).

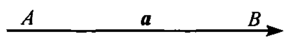



图 1.1

向量的大小叫做向量的**模**，也称为向量的**长度**，向量$\overrightarrow{AB}$与 $\boldsymbol{a}$ 的模分别记为$|\overrightarrow{AB}|$与$|\boldsymbol{a}|$. 模为零的向量称为**零向量**，记作 **0**. 零向量的方向不确定，它是起点与终点重合的向量.

模等于 1 的向量称为**单位向量**，与向量 $\boldsymbol{a}$ 具有同一方向的单位向量叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，常用 $\boldsymbol{a}^{\circ}$来表示.

如果两向量的模相等且方向相同，则称这两个**向量相等**，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 例如，若向量$\overrightarrow{AB}$表示向量 $\boldsymbol{a}$，则$\overrightarrow{AB}$经过平行移动得到的有向线段$\overrightarrow{CD}$仍表示向量 $\boldsymbol{a}$(图 1.2).

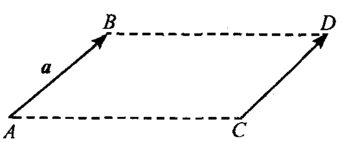



图 1.2

与向量 $\boldsymbol{a}$ 模相等并且方向相反的向量，称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$. 例如$\overrightarrow{BA}$是$\overrightarrow{AB}$的负向量，因此

$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

## 1.2　向量的线性运算

### 1.2.1　向量的加、减法

物理学中的力与位移都是向量.作用于一点的两个不共线的力的合力,可以用"平行四边形法则"求出,如图 1.3 中的两个力$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$的合力,就是以$\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$为邻边的平行四边形 $OACB$ 的对角线向量$\overrightarrow{OC}$.两个位移的合成可以用"三角形法则"求出,如图 1.4,连续两次位移$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{BC}$的效果是作了位移$\overrightarrow{AC}$(图 1.4).

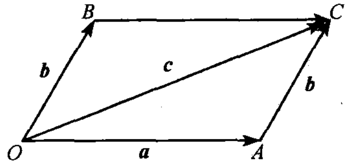


图 1.3

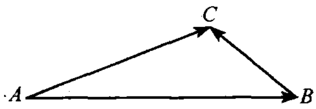


图 1.4

在自由向量的意义下,两个向量合成的平行四边形法则可归结为三角形法则,如图 1.3,只需要平移向量$\overrightarrow{OB}$到$\overrightarrow{AC}$的位置就行了.

**定义 1.2.1**　对于向量 $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,作有向线段$\overrightarrow{AB}$表示 $\boldsymbol{a}$,有向线段$\overrightarrow{BC}$表示 $\boldsymbol{b}$,把$\overrightarrow{AC}$表示的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$(图 1.5),求两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的运算叫做**向量加法**.

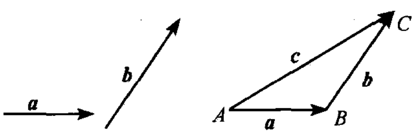


图 1.5

根据定义 1.2.1,由图 1.5 我们有

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$

这种求两个向量和的方法通常称为**三角形法则**.

**注 1**　当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行于同一条直线(此时称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **共线**,或称**平行**,记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$),且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时,则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b})$同向,且$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$(图 1.6).

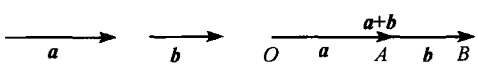


图 1.6

**注 2** 当$\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$且反向时，若$|\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{b}|$，则$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{a}$同向，并且$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$(图 1.7).

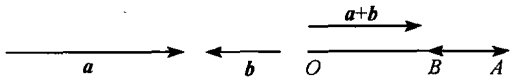



图 1.7

**注 3** 当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不平行时，$OAB$构成三角形，此时$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$(图 1.8).

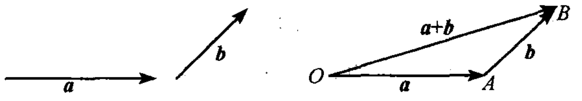



图 1.8

由向量相等的定义，当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$不平行时，我们也可以从同一起点$O$作$\overrightarrow{OA}$表示$\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}$表示$\boldsymbol{b}$，再以$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$为边作平行四边形$OACB$，则容易说明对角线$\overrightarrow{OC}$也表示向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的和$\boldsymbol{c}$(图 1.9)，这称为向量加法的**平行四边形法则**.

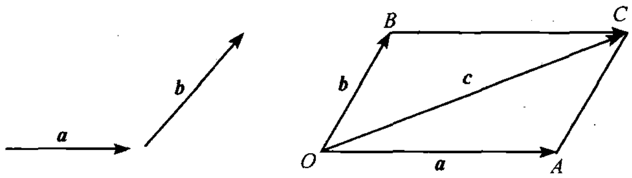



图 1.9

**注** 向量的加法与起点的位置无关.

**定理 1.2.1** 向量的加法适合下述运算规律：

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$，其中$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$是任意向量；

(2) 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，其中$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$是任意向量；

(3) 对任意向量$\boldsymbol{a}$，有$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$；

(4) 对任意向量$\boldsymbol{a}$，有$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$.

**证明** (1) 作$\overrightarrow{OA}$表示$\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}$表示$\boldsymbol{b}$，以$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$为边作平行四边形$OACB$(图 1.9)，则$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，并且$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，从而

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}.$$

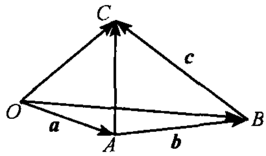



图 1.10

(2) 同理，作$\overrightarrow{OA}$表示$\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}$表示$\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}$表示$\boldsymbol{c}$(图 1.10)，则

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$
$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},$$

因此

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

(3) 作$\overrightarrow{AB}$表示$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{0}$可用$\overrightarrow{BB}$表示,于是

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}.$$

(4) 作$\overrightarrow{AB}$表示$\boldsymbol{a}$,则

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\boldsymbol{0}.$$

由于向量的加法满足交换律与结合律,所以三个向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$相加,不论它们的先后顺序与结合顺序如何,它们的和总是相同的,因此可简单地写成

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}.$$

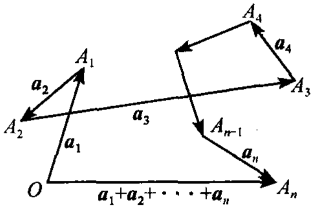



图 1.11

推广到任意有限个向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$的和,就可以记为

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

有限个向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$相加的作图法,可以由向量的三角形求和法则推广如下:自任意点$O$出发,依次引$\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}_1,\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2,\cdots,\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$,由此得一折线$OA_1A_2\cdots A_n$(图 1.11). 于是向量$\overrightarrow{OA_n}=\boldsymbol{a}$就是$n$个向量$\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$的和:

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n,$$

即

$$\overrightarrow{OA_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}. \tag{1.2.1}$$

特别地,当$A_n$与$O$重合时,它们的和为零向量$\boldsymbol{0}$.

这种求和的方法叫做**多边形法则**.

**例 1.2.1** 设$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$,证明$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

**证明** 两边加$-\boldsymbol{a}$,则

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+(-\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})+(-\boldsymbol{a}),$$

有

$$\boldsymbol{b}+[\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})]=\boldsymbol{c}+[\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})],$$

即

$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{c}+\boldsymbol{0},$$

所以

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}.$$

**例 1.2.2** 试证明三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 首尾相接构成一个三角形的充要条件是

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

**证明** 用三角形法则求 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 之和. 设 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB},\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC},\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CD}$,则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}.$$

所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 首尾相接正好构成一个三角形的充要条件是点 $D$ 与点 $A$ 重合,即

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

**向量的减法**定义如下.

**定义 1.2.2** $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 分别用同一起点的有向线段$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$来表示(图 1.12),则

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+(-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}.$$

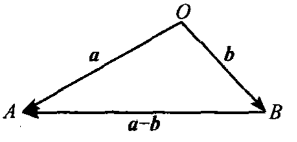



图 1.12

从向量减法的定义,可以得出向量等式的移项法则:在向量等式中,将某一向量从等号的一端移到另一端,只需改变它的符号. 例如将等式 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$ 中的 $\boldsymbol{c}$ 移到另一端,那么有 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}-\boldsymbol{c}$. 这是因为从等式 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{d}$ 两边减去 $\boldsymbol{c}$,即加上 $-\boldsymbol{c}$,而 $\boldsymbol{c}+(-\boldsymbol{c})=\boldsymbol{0}$ 的缘故.

我们还看到,对于任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,都有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,$$

这个不等式称为**三角不等式**,它是用向量的形式表示三角形的一边不大于另两边的和.

这个不等式可以推广到任意有限多个向量和的情形,即有

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\cdots+\boldsymbol{c}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+\cdots+|\boldsymbol{c}|.$$

### 1.2.2 向量的数量乘法

我们知道,位移、力、速度与加速度等都是向量,而时间、质量等都是数量,这些向量与数量间常常会发生某些结合的关系,如我们熟知的公式

$$\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a},$$

这里 $\boldsymbol{f}$ 表示力,$\boldsymbol{a}$ 表示加速度,$m$ 表示质量. 再如公式

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{v}t,$$

这里 $\boldsymbol{s}$ 表示位移,$\boldsymbol{v}$ 表示速度,$t$ 表示时间.

在向量的加法中，我们也可看到，$n$ 个向量相加仍然是向量，特别是 $n$ 个相同的非零向量 $\boldsymbol{a}$ 相加的情形，显然这时的和向量的模为 $|\boldsymbol{a}|$ 的 $n$ 倍，方向与 $\boldsymbol{a}$ 相同. $n$ 个 $\boldsymbol{a}$ 相加的和常记作 $n\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{a}n$. 一般地，我们有如下定义.

**定义 1.2.3** 实数 $\lambda$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模为

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

它的方向是当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同，当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反. 我们把这种运算叫做数量与向量的**乘法**，简称为**数乘**.

从这个定义我们立刻知道，当 $\lambda=0$ 或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|=0$，这时就没必要讨论它的方向了. 当 $\lambda=-1$ 时，$(-1)\boldsymbol{a}$ 就是 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，因此我们常把 $(-1)\boldsymbol{a}$ 简写为 $-\boldsymbol{a}$.

对于任意非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和它的单位向量 $\boldsymbol{a}^{\circ}$，显然有 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^{\circ}$.

设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{a}^{\circ}=|\boldsymbol{a}|^{-1}\boldsymbol{a}$ 是 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量，把一个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 除以它的模，便得到一个与它同方向的单位向量 $\boldsymbol{a}^{\circ}$，这称为把非零**向量 $\boldsymbol{a}$ 单位化**.

数乘满足下列运算规则：

**定理 1.2.2** 对于任意向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和任意实数 $\lambda,\mu$，有

(1) $1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$，　$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$；

(2) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(3) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；　(1.2.2)

(4) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.　(1.2.3)

**证明** (1) 可以用定义得到.

(2) 首先 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ 与 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 的模相等，都等于 $|\lambda||\mu||\boldsymbol{a}|$. 其次，如果 $\lambda,\mu$ 同号，$\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ 与 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 都与 $\boldsymbol{a}$ 同向；如果 $\lambda,\mu$ 异号，$\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ 与 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 都与 $\boldsymbol{a}$ 反向. 因此 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$ 与 $(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 的模相等而且方向一致，所以(2)成立.

(3) 如果 $\lambda,\mu,\boldsymbol{a}$ 中有一个为零，显然结论成立，因此可以假定 $\lambda,\mu,\boldsymbol{a}$ 都不为零.

**情形 1** 如果 $\lambda,\mu$ 同号，则 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\mu\boldsymbol{a}$ 同向，所以

$$|\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|+|\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|,$$

又有

$$|(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}|=|\lambda+\mu||\boldsymbol{a}|=(|\lambda|+|\mu|)|\boldsymbol{a}|,$$

所以 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 和 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 的模相等，并且 $\lambda,\mu$ 同号时，显然 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 的方向一致. 因此

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

**情形 2** 如果 $\lambda,\mu$ 异号，由于 $\lambda$ 和 $\mu$ 的地位是对称的，因此不妨设 $\lambda>0,\mu<0$，如果 $\lambda+\mu=0$，则(1.2.2)式的左边为 $0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，右边为

$$\lambda\boldsymbol{a}+(-\lambda)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+(-1)(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\boldsymbol{a}+(-\lambda\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0},$$

因此(1.2.2)式成立.

如果$\lambda+\mu\neq0$,分为$\lambda+\mu>0$和$\lambda+\mu<0$两种情形.下面只考虑前一种情形,后一种情形类似可以证明.当$\lambda>0,\mu<0,\lambda+\mu>0$时,$-\mu(\lambda+\mu)>0$,由情形1知

$$[(\lambda+\mu)+(-\mu)]\boldsymbol{a}=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(-\mu)\boldsymbol{a},$$

即得

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}+(-\mu\boldsymbol{a}),$$

从而有

$$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}.$$

(4) 若$\lambda=0$或者$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$中有一个为$\boldsymbol{0}$,则结论显然成立,下面设$\lambda\neq0,\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$.

若$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$平行,当$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$同向时,取$\mu=\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$;当$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$反向时,取$\mu=-\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$,因此有$\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$,于是

$$\begin{aligned}\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=\lambda(1\cdot\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a})=\lambda[(1+\mu)\boldsymbol{a}]=[\lambda(1+\mu)]\boldsymbol{a}=(\lambda+\lambda\mu)\boldsymbol{a}\\&=\lambda\boldsymbol{a}+(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

若$\boldsymbol{a}$和$\boldsymbol{b}$不平行(图1.13),那么当$\lambda>0$时,作$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{AB}$分别表示$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,于是$\overrightarrow{OB}$表示$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,作$\overrightarrow{OC}$表示$\lambda\boldsymbol{a}$,延长$\overrightarrow{OB}$至$D$,使$CD/\!/AB$,因为$\triangle OAB$相似于$\triangle OCD$,于是$\overrightarrow{CD}=\lambda\boldsymbol{b},\overrightarrow{OD}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$;又$\overrightarrow{OD}=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$,所以有$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

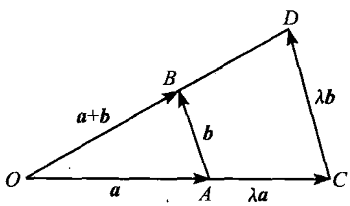


图1.13

当$\lambda<0$时,可以作类似的讨论.

**推论1.2.1** (1) 如果$\lambda\neq0$,且$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$,则$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

(2) 如果$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,且$\lambda\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{a}$,则$\lambda=\mu$.

**证明** (1) 在$\lambda\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$两边乘以$\lambda^{-1}$,并利用向量的数乘运算法则(2),即得.

(2) 由$\lambda\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{a}$,可得$\boldsymbol{0}=\lambda\boldsymbol{a}-\mu\boldsymbol{a}=(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}$,故$\lambda-\mu=0$或$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,但由假设$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,因此$\lambda-\mu=0$,即$\lambda=\mu$.

**例1.2.3** 已知$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{c}=12\boldsymbol{e}_1+6\boldsymbol{e}_2-5\boldsymbol{e}_3$,求$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$.

**解** 
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}&=\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2+2\boldsymbol{e}_3+2(2\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3)-3(12\boldsymbol{e}_1+6\boldsymbol{e}_2-5\boldsymbol{e}_3)\\&=(1+2\cdot2-3\cdot12)\boldsymbol{e}_1+[-3+2\cdot(-2)+(-3)\cdot6]\boldsymbol{e}_2\\&\quad+[2+2\cdot3+(-3)\cdot(-5)]\boldsymbol{e}_3=-31\boldsymbol{e}_1-25\boldsymbol{e}_2+23\boldsymbol{e}_3.\end{aligned}$$

**例1.2.4** 用向量法证明中位线定理:三角形两边中点的连线平行且等于第三边的一半.

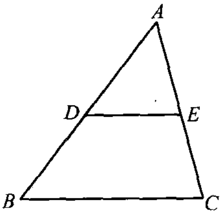


图 1.14

**证明**　如图 1.14, $D,E$ 分别是$\triangle ABC$ 的边 $AB,AC$ 的中点,则

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC},\quad \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB},$$

所以

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

按数乘向量的定义,这说明 $DE/\!/BC$,且

$$|DE|=\frac{1}{2}|BC|.$$

**例 1.2.5**　用向量法证明:四面体对边中点的连线交于一点且互相平分.

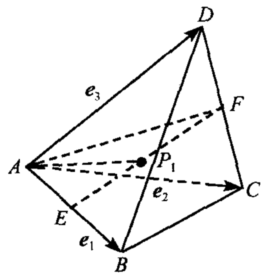


图 1.15

**证明**　设四面体 $ABCD$ 一组对边 $AB,CD$ 的中点 $E$, $F$ 的连线为 $EF$,它的中点为 $P_1$(图 1.15),其余两组对边中点连线的中点分别为 $P_2,P_3$,下面只要证明 $P_1,P_2,P_3$ 重合就可以了.令$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{e}_1$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{e}_2$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{e}_3$,连接 $AF$,则

$$\overrightarrow{AP_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}).$$

又因为 $AF$ 是$\triangle ACD$ 的中线,所以又有

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3).$$

而

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1,$$

从而得

$$\overrightarrow{AP_1}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3)\right]=\frac{1}{4}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3).$$

同理可得

$$\overrightarrow{AP_2}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3),$$

$$\overrightarrow{AP_3}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3).$$

所以$\overrightarrow{AP_1}=\overrightarrow{AP_2}=\overrightarrow{AP_3}$,即 $P_1,P_2,P_3$ 重合,命题得证.

### 1.2.3　向量的线性关系与向量的分解

向量的加法和数量乘法统称为向量的**线性运算**.我们知道有限个向量通过线

性运算，它的结果仍然是一个向量.

**定义 1.2.4** 设 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 是一组向量，$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是一组实数，则向量

$$\boldsymbol{a}=k_1\boldsymbol{a}_1+k_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{a}_n$$

叫做向量组 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的一个**线性组合**，称 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 是这个组合的**系数**.

当向量 $\boldsymbol{a}$ 是 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的线性组合时，我们也说向量 $\boldsymbol{a}$ 可以用 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ **线性表示**，或者说向量 $\boldsymbol{a}$ 可以分解成向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$ 的线性组合.

**定义 1.2.5** 向量组若用同一起点的有向线段表示，它们在一条直线（一个平面）上，则称这个向量组是**共线**（**共面**）的.

共线的两向量也是平行向量. 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，仍记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.

显然 $\boldsymbol{0}$ 与任意向量共线，共线的向量组一定共面，两个向量一定共面. 若 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$（或 $\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{a}$），则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.

**定理 1.2.3** 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线的充要条件是存在唯一的实数 $\lambda$，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

**证明** 由上面的讨论知，条件的充分性是显然的. 下证必要性.

(1) 若 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则取 $\lambda=0$.

(2) 若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向，取 $\lambda=\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$；若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向，取 $\lambda=-\dfrac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$，总之 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

唯一性. 假如 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}=\mu\boldsymbol{a}$，则 $(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，因为 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，所以 $\lambda-\mu=0$，即 $\lambda=\mu$.

**定理 1.2.4** $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线的充要条件是存在不全为零的实数 $\lambda,\mu$ 使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}. \tag{1.2.4}$$

**证明** 必要性. 设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，若 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则有 $1\cdot\boldsymbol{a}+1\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不全为 $\boldsymbol{0}$，不妨设 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，则由定理 1.2.3 知，存在实数 $\lambda$ 使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，从而

$$\lambda\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$

结论成立.

充分性. 若有不全为零的实数 $\lambda,\mu$ 使得(1.2.4)式成立，不妨设 $\lambda\neq0$，则由(1.2.4)式得 $\boldsymbol{a}=-\dfrac{\mu}{\lambda}\boldsymbol{b}$，因此 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线.

从(1.2.4)式的成立可以得到下面的推论.

**推论 1.2.2** $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线的充要条件是 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 当且仅当 $\lambda=\mu=0$.

**例 1.2.6** 设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不共线，试确定 $\lambda$，使 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 共线.

**解** 由于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不共线，所以 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 都不是零向量，因此，要使 $\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 共线，则存在 $k\neq0$，使得

$$\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}=k(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),$$

即

$$(1-\lambda k)\boldsymbol{a}+(\lambda-k)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$

由于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不共线，由推论 1.2.2 知，$\lambda-k=0$ 且 $1-\lambda k=0$，解得 $\lambda=\pm1$.

**例 1.2.7** 设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，证明向量 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$ 也不共线.

**证明** 设有 $k,m$ 使 $k\boldsymbol{c}+m\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$，即

$$k(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})+m(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0},$$

整理可得

$$(k+2m)\boldsymbol{a}+(2k-3m)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，由推论 1.2.2 知

$$\begin{cases}k+2m=0,\\2k-3m=0,\end{cases}$$

解得 $k=m=0$，故 $\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$ 不共线.

**定理 1.2.5** 设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不共线，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{c}$ 可以唯一地表示成 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的线性组合，即存在唯一的实数 $\lambda,\mu$ 使得

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

**证明** 充分性. 设 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，如果 $\lambda,\mu$ 有一个是零，例如 $\lambda=0$，那么 $\boldsymbol{c}=\mu\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，因此 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面. 如果 $\lambda\mu\neq0$，则当 $\lambda>0,\mu>0$ 时，由图 1.16(a)知，$\boldsymbol{c}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}$，$\mu\boldsymbol{b}$ 共面，因此 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面. 对 $\lambda,\mu$ 的其他情形可类似讨论.

必要性. 因为 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不共线，所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面，如果 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{a}$(或 $\boldsymbol{b}$)共线，由定理 1.2.3，有实数 $\lambda$(或 $\mu$)，使得 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，其中 $\mu=0$(或 $\lambda=0$)，如果 $\boldsymbol{c}$ 和 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都不共线，从同一起点 $O$ 出发，作

$$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c},$$

过 $C$ 作平行于 $OB$ 的直线且与直线 $OA$ 交于 $D$(图 1.16(b))，因为 $\overrightarrow{OD}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 共线，所以有实数 $\lambda$ 使得 $\overrightarrow{OD}=\lambda\boldsymbol{a}$. 同理有 $\overrightarrow{DC}=\mu\boldsymbol{b}$. 因此有

$$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}.$$

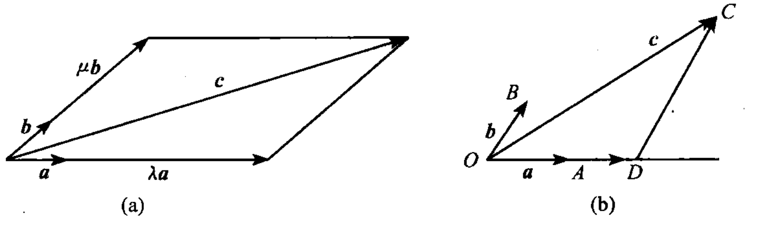



图 1.16

唯一性. 假如 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\mu_1\boldsymbol{b}$,则有

$$(\lambda-\lambda_1)\boldsymbol{a}+(\mu-\mu_1)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线,根据推论 1.2.2 即得

$$\lambda-\lambda_1=0,\quad \mu-\mu_1=0,$$

于是

$$\lambda=\lambda_1,\quad \mu=\mu_1.$$

**定理 1.2.6** $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充要条件是有不全为零的实数 $k_1,k_2,k_3$,使得

$$k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}. \tag{1.2.5}$$

**证明** 必要性. 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面,若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,则有不全为零的实数 $\lambda,\mu$ 使得 $\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,从而有

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+0\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

若 $\boldsymbol{a}\not\parallel\boldsymbol{b}$,则由定理 1.2.5 有实数 $\lambda,\mu$ 使得 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$,即

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+(-1)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

因此,不论 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是否共线,结论均成立.

充分性. 不妨设 $k_1\neq0$,则由(1.2.5)式得

$$\boldsymbol{a}=-\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{b}-\frac{k_3}{k_1}\boldsymbol{c},$$

因此 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

从(1.2.5)式成立可以推出,

**推论 1.2.3** $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面的充要条件是 $k_1\boldsymbol{a}+k_2\boldsymbol{b}+k_3\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 当且仅当 $k_1=k_2=k_3=0$.

**例 1.2.8** 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 不共面,$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_3+\boldsymbol{e}_1$,$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$,问 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是否共面,又 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 是否共面.

**解** 设

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}.$$

我们只要能推出 $\lambda=\mu=\nu=0$,那么由推论 1.2.3 得 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面. 为此,将题设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 代入上式得

$$(\mu+\nu)\boldsymbol{e}_1+(\lambda+\nu)\boldsymbol{e}_2+(\lambda+\mu)\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0}.$$

由于 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 不共面,则

$$\mu+\nu=0,\quad \lambda+\nu=0,\quad \lambda+\mu=0,$$

所以 $\lambda=\mu=\nu=0$,从而 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面. 由于