



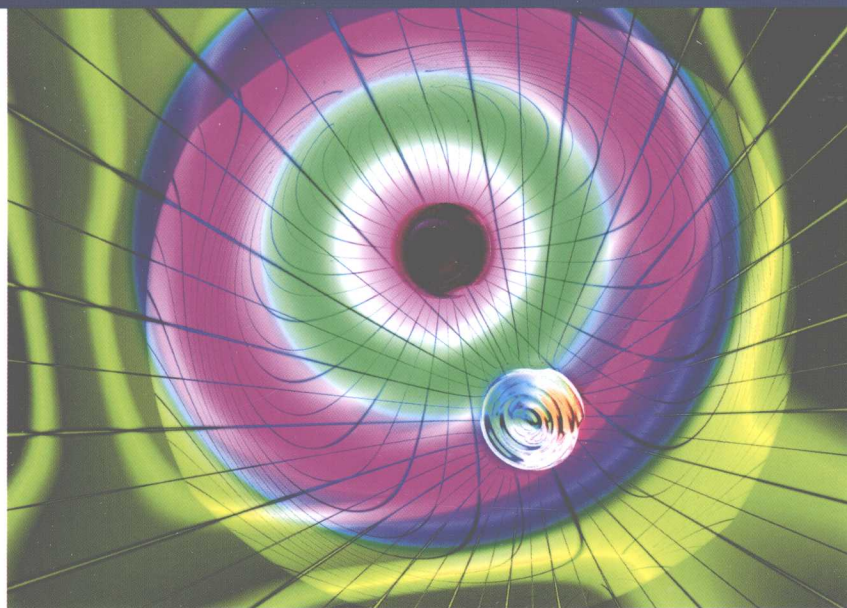
数学方法论应用传播丛书

丛书主编 徐沥泉 徐鸿超

从喜欢到入迷—— 学好数学的秘密

From Beginner to Aficionado—

A Student's Guide to Successful Mathematics Study



周家禧 张建良 周霄翔 著

大连理工大学出版社 | DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS



数学课程与教学论

张奠宙 编著 李俊 审校

从喜欢到入迷—— 学好数学的秘密

From Enjoyn to Obsessive

A Student's Guide to Successful Mathematics Study



张奠宙 编著 李俊 审校

教育部《中学数学课程标准》(2017年版)指定阅读书目

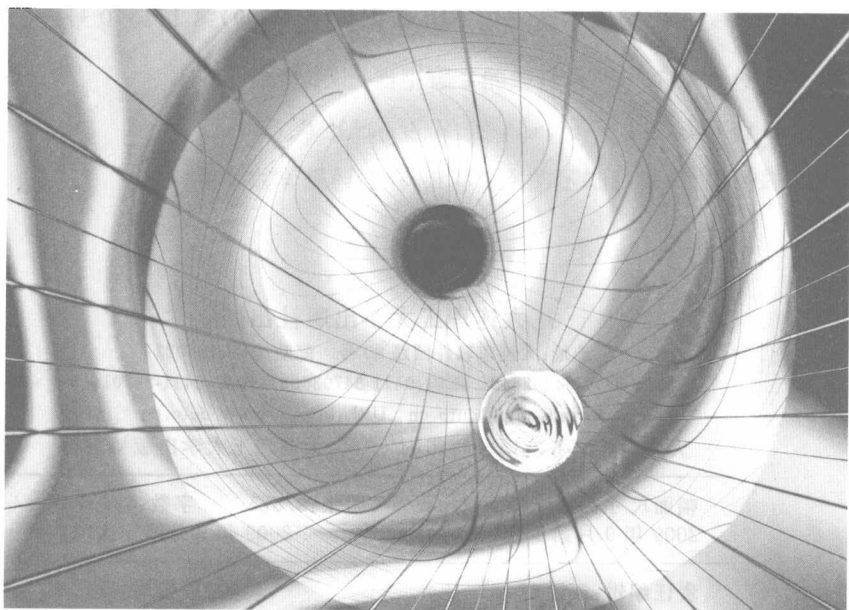


数学方法论应用传播丛书

丛书主编 徐沥泉 徐鸿超

从喜欢到入迷—— 学好数学的秘密

From Beginner to Aficionado—
A Student's Guide to Successful Mathematics Study



周家禧 张建良 周霄翔 著

大连理工大学出版社 DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

从喜欢到入迷:学好数学的秘密/周家禧,张建良,
周霄翔著. —大连:大连理工大学出版社,2009.9
(数学方法论应用传播丛书)
ISBN 978-7-5611-5110-5

I. 从… II. ①周…②张…③周… III. 数学课—学习
方法—中学 IV. G634.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 171570 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail: dulp@dulp.cn URL: <http://www.dulp.cn>

大连力佳印务有限公司印刷

大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm
2009 年 9 月第 1 版

印张:9.875 字数:197 千字
2009 年 9 月第 1 次印刷

责任编辑:于建辉

责任校对:欣 宇

封面设计:孙宝福

ISBN 978-7-5611-5110-5

定价:27.00 元



数学方法论应用传播丛书

编写委员会

丛书顾问(按姓氏笔画排序)

王梓坤 刘绍学 周春荔 林夏水

丛书主编 徐沥泉 徐鸿超

执行主编 唐志华

委员(按姓氏笔画排序)

于世章	王民珠	王光明	朱恒杰
何万生	吴勤文	杨世明	杨冠夏
陈安宁	陈远刚	周公贤	周家禧
徐献卿	袁 渊	郭 璋	顾晓华
储东花	谢 祥	裴光亚	

“数学方法论应用传播丛书”题词

推广数学方法论二十年

徐利治

2009年8月于大连

总 序

“太湖烟波碧沉沉 渤海嗒淋^①沁人心。”

由大连理工大学出版社出版的“数学方法论应用传播丛书”，与读者见面了。这是我国数学科学与数学教育文库百花园中的一簇奇葩。

先让我们扼要地回顾一下这套丛书的由来。

1987年8月，无锡市的数学老师应邀出席了由大连理工大学应用数学研究所主办的“全国数学方法论和数学史学术研讨会”。在此期间，一连六天，我国著名数学家徐利治教授作了关于“数学方法论和G·波利亚数学教育思想”的系列讲座。尔后，无锡市的老师又出席了由周春荔先生、杨世明先生在首都师范大学主持召开的“全国首届波利亚数学教育思想学术研讨会”。

返锡后，他们在时任无锡市教育局局长周稽裘先生的亲自部署和直接领导下，在无锡市原教研室主任、特级教师李永灿先生的支持与指导下，成立了无锡市MM(Mathematical Methodology)课

① “大连”原本是满语中“嗒淋”的译音，本意是“海滨”之意。

题组. 教育行政部门组织和协调市教育科学研究所、市教研室和江南大学·教育学院等各方面的研究力量,“强强联合”协作攻关,设计出“贯彻数学方法论的教育方式,全面提高学生素质”的数学教育实验(简称 MM 实验)课题. 从此,在中国无锡市正式拉开了把数学方法论和波利亚数学教育思想直接应用于数学教育教学实践的序幕.

此后,在时任江苏省教委主任袁相碗教授、副主任周稽裘先生的关心支持下,在无锡市教委主任林建坤先生的直接参与和领导下,MM 课题先后列入江苏省教育科研“八五、九五”重点项目和国家教委“八五规划”项目.

经过 5 年实验,证明 MM 教育方式不仅减轻了师生的负担,而且提高了老师的数学水平和教学水平,从而提高了教学质量. 因此,它于 1994 年通过了受江苏省教委委托,由王梓坤院士、徐利治教授组成的专家组的鉴定,并获得高度好评.

MM 实验从设计到确立为一种教育方式(MM 教育方式),并且推广到全国十几个省、市、自治区,迄今已经整整 20 年. 这其中倾注了设计者、实验者、推广者的大量心血. 当年参加实验和推广的老师已经陆续退休了,而且随着年龄的增长,他们将无法到全国各地亲自指导和推广 MM 实验. 这就提出一个问题:如何使 MM 实验继续推广下去,使 MM 教育方式世代相传,并且随着时代的发展而不断发展?

当然,作为实验,已经出版过两本教材:杨世明、周春荔、徐沥泉等著的《MM 教育方式:理论与实践》(2002 年)和徐沥泉著的《教学·研究·发现——MM 方式演绎》(2003 年). 不过,MM 实

验需要具备一定的条件,这就使得它的传播带有一定的局限性.特别是对于不具备实验条件,又希望在数学教学中贯彻 MM 教育方式的一些重要教育思想和教学方法的老师来说,则需要一部能概括 MM 实验、MM 教育方式的普及书.因此,我在 2006 年于新疆召开的数学科学方法论研究交流中心理事会上提议:撰写一部“MM 教育方式”雅俗共赏的书籍.

现在,我国各地 MM 实验点一线教师,以及热心于数学方法论的理论传播和应用研究的大、中、小学数学教师 and 教学研究人员集思广益,共同努力,分工协作撰写的“数学方法论应用传播丛书”,终于正式出版了.她比我原先设想的 MM 教育方式普及性书籍能更全面地传播数学科学,传播数学方法论,传播数学文化,传播数学的精髓.是一套让人走进数学,理解数学,鉴赏数学,品味数学,直到热爱数学和应用数学,宣传数学思想方法的高级科普读物.

丛书作者的知识结构、年龄结构合理,在丛书写作方面具有最佳的主体结构.作者的年龄跨度从 33 岁至 89 岁,这是少见的,也是十分可喜的.我国一批著名数学家、科学家都十分关心和支持数学方法论的研究与普及工作,关心数学科普作品的撰写与出版.王梓坤教授的《科学发现纵横谈》一书,就给我们如何撰写科普著作做出了榜样.该书对从事理科和文科工作的同志都起到了很好的教育作用.本套丛书的作者也认真学习和尝试了这种风韵.

值此 MM 课题实施 20 周年之际,王梓坤院士和刘绍学教授等又为 MM 实验纪念活动,为本套丛书的出版发来了热情洋溢的贺词与贺信.年届 90 的徐利治教授亲自撰写有关 MM 教育方式

的论文和《MM 教育方式：理论与实践》一书的序言。“天下士非一方之士，人伦师乃万世之师。”他们为本套丛书留下了珍贵的作品和墨宝，他们的思想在这套丛书中得以充分体现，以飨读者。作为一名数学哲学工作者，看到这些著名数学家和科学家为数学科普工作付出的辛劳，我感到由衷的欣慰。

丛书共有八本专著和一本编著。《源于教学·高于教学——MM 方式演绎》一书，是《教学·研究·发现——MM 方式演绎》（科学出版社，2003 年 3 月）的姊妹篇，其中收录了全国各实验点 70 余位老师的专题论文、研究报告、教学设计和教学实录。他们之中有著名学者，大学教授、副教授、讲师和初出茅庐的博士、硕士；有中、小学的特级教师、高级教师；有享受国家和地方政府特殊津贴的专家，全国模范教师、先进教师和科技拔尖人才。

《合情推理趣引》、《数学——直觉与逻辑的交响乐》、《数学和谐美》等著作，揭示和展现了数学发现和发明过程中直觉思维、形象思维和逻辑思维交融的旋律。数学和文学、数学和艺术都是相通的。

数学是研究抽象事物的，它的抽象性保证了其应用的广泛性。如何教育学生从具体事物中抽象出数学问题？《学会抽象与建模》一书的许多数学模型都是从日常生活中以及我们身边的例子提炼（抽象）出来的，有一部分是中学数学课堂教学的实例，还有一部分是由中学生从自己周围的具体事例中抽象概括出来的数学模型和他们的获奖作品，颇具特色，也有一定的应用价值。学会抽象与建模应该成为学习数学的一种技能。

数学教育是人类的一件大事。古往今来，许许多多数学家、教

育家、教师和数学教育工作者，一直在“摸着石头过河”。怎样摸得更好？怎样避免陷入泥潭？记得一位伟人说过：“人类总得不断地总结经验，有所发现，有所发明，有所创造，有所前进。”那么，《数学·教学·哲学》和《世纪婚约——哲学与数学教育联姻的实践与思考》这两部著作将给我们带来深刻的启迪与思考。它将帮助我们回答数学的本质是什么，数学教育和数学教学的本质又是什么，在数学教学中怎样提高学生的一般科学素养，增进社会文化修养，形成和发展数学品质，从而全面提高学生的素质。

一个好的数学教师，他的任务是帮助学生了解数学文化、喜爱数学文化、陶醉于数学文化，进而让学生学会用数学家的思维方式思考问题、解决问题。正如波利亚所说，让处于性格极易改变的青少年时期的学生，养成善思的好习惯，从而改变他们一生的命运。《从喜欢到入迷——学好数学的秘密》一书的作者将以自己的亲身经历说明如何用以上思想来教育学生，让学生从害怕数学、讨厌数学的困境中解脱出来，从而热爱数学，迷恋数学。从一二十分到全年级前三名，一些看来是神话般的例子，确实是现实的，关键是要真正地了解数学及其教学方法。

《数学思想赏析》一书内容丰富、内涵深刻，作者居高临下，又深入浅出，可供非数学专业的读者领略和赏析数学美，学到一定的数学常识、数学知识、典型的数学思想与方法；也可供爱好数学和数学专业的读者在茶余饭后分享与品味作者精心设计与制作的数学实例。它会引起具有较好数学基础和具备较高数学素养的读者的共鸣。

总之，本套丛书是具有数学科学方法论特色、兼具鉴赏性和教

材性的数学专题科普著作.同时,她又沟通了文理科学,内容丰富,事例翔实,起点有高有低,读者可各取所需,适合于广大数学爱好者阅读.

“数学方法论应用传播丛书”的宗旨是:走进数学,理解数学,养成数学思维,欣赏数学的美;品味数学,启迪心智,增强数学修养,弘扬数学文化.我们要提倡、鼓励和采取有效机制让学习和从事文科的人们读一点自然科学的科普读物;学习和从事理科(含数学)的人们阅读和鉴赏一些文学、艺术名著.开阔思路,从事跨学科的研究工作,把各自的思维活动发挥得淋漓尽致,不断地实现科学研究中的发明和发现.

林夏水

2009年2月15日

前 言

学好数学也与学好其他科目一样,首先必须对数学有浓厚的兴趣.数学老师大概都有这样的体验:数学成绩好的学生一定对数学十分爱好,但喜欢数学的学生不一定都能把数学学好,因为他们不一定能找到学好数学的正确方法.

什么是学好数学的正确方法?传统的观念就是要把课本上的内容理解透,或者是反复看,反复理解,逐字逐句地理解.然而新课程标准解读中却指出,对教材中的内容并不要求把它复制在学生的脑海中,而是把这些内容作为学数学的起点.根据这些内容,学生对数学的理解与认识不断发展.

事实上,人们对数学的理解也处于不断发展的过程中,过去人们普遍认为数学是一种十分重要的工具.可是近年来人们越来越清楚地看到,数学不仅是一种重要的工具,更重要的是它是一种重要的文化.新课程标准中指出,应从数学的产生与发展过程中对人类思维的重大影响这方面来理解数学文化,并引用了美国数学家克莱茵对数学文化的论述.克莱茵认为,数学是以理性精神为核心的文化体系,这种文化可以使人类思维发展到最完美的地步,这样的文化可以帮助人们彻底认清世界,认清宇宙,包括彻底认清人类自身.

由此看来,新课程标准是要我们从思维的角度来掌握数学的实质,从发现发明这个新的角度来学习、理解与掌握数学.回想我们“MM”课题组自 1989 年成立以来就不断地探索研究如何从数学思维的角度改革数学课的教法,从而全面提高学生素质.

课题组研究重点是对刻板的死记硬背的数学教学方法进行改革,要从数学思维的角度运用数学家成功地发现数学的体会来教育学生,要让学生的思维方式逐步与数学家的思维方式达到一致.这样教数学不仅教会学生一些公式与概念,而且从数学的生产、发展,数学思维方式的改革与创造的角度来学习数学,这样就要教育学生对真理有执着的追求,对所研究的问题有坚定不移的信心.培养学生不怕艰苦,不怕困难,敢于斗争,敢于胜利的优良意志品质,在研究问题的过程中必须具备精益求精的工作态度,有条不紊的书写与表达,准确无误的计算与证明,一丝不苟地对待每一个细节,这一切都成了“MM”教育方式教数学的丰富内容.

徐利治教授曾高度赞扬“MM”课题组的贡献,他指出数学教育本应具有技术教育与文化教育两方面内容.长期以来被人们普遍忽视的文化教育功能在“MM”方式教学中得到应有的重视.20 年前“MM”课题组的许多看法与主张在 20 年后的新课程标准中得到肯定与弘扬.尤其是“MM”课题组提出的“既教猜想又教证明”的口号,要求在教数学时既要教会学生逻辑推理,又要教会学生合情推理,现在合情推理一节已被写入高中数学选修 2 的教材中.“MM”课题组的另一个口号“学习—研究—发现”同步的教学原则,现已写入新课程标准教材的每章节的研究性课程中.

由美国提倡的建构方式与“MM”方式教学在本质上十分相似,都着眼于主体的内在因素.建构认识论认为不能用外部强加于主体的讲解和灌输的方式来学数学,必须通过主体主动地对数学

知识进行建构,才能使主体真正认识数学。“MM”方式主张对数学的认识必须有发现猜想的过程,要像数学家一样学会探索,学会发现,然后不断地使之完善与成熟。所以提出“学习—研究—发现”同步的原则,于是教数学不仅是教课本上那些定理、定义和一些基本概念运算法则等基本内容,更重要的是教会学生发现数学的本领。我国著名数学家华罗庚也主张,看数学书时,弄清数学问题的条件以后,不忙看推导过程与结论,应该通过自己的推导来获得结论。这与“MM”方式中的“学习—研究—发现”的学习方式及主体对客体的主动建构学数学其本质完全一致。

近年来通过个性化教学的实践更清楚地看到,若能积极主动地通过“学习—研究—发现”的方式来学数学,有的学生用不了几节课时间,成绩就能提高几十分。我有一个叫刘卓然的学生,在高二升高三凭考试成绩进入重点班的关键时刻找到了我,我通过“学习—研究—发现”的方式,充分调动他内在的积极性,让他在掌握知识的同时,掌握发现问题、解决问题的方法,仅仅用了8节课的时间,就使他由原来50~60分的成绩一跃达到108分,全班同学与老师都大吃一惊。是什么原因能使他进步这么快?答案就是当你成功地应用“MM”方式教学时,一些意想不到的教学奇迹都会发生。

还有一位叫周琪凯的学生,从小学到初中都是因为数学成绩不好而拖总分后腿,初中毕业后考上了人大附中,这是北京市排在前一二名的重点名校,家长最担心的是在这样的重点名校上课,数学成绩不好怎么办?家长反映,在来我们这儿之前曾找过不少老师对孩子进行辅导,但是最后孩子的数学成绩仍然不好,家长对孩子能学好数学已经失去了信心,万般无奈之下找到了我们。开始的时候只是抱着试试看的态度,像人大附中这样的名校,平时阶段

练习要求不会低.周琪凯同学刚入校时,平时测试只能得 25 分左右,我在教学中关键是调动他的内在积极性与潜能,让他学会正确地用数学方式进行思考.在掌握正确的思考的基础上提高计算能力、计算速度与准确性,这样他在期中考试就由 25 分进步到 83 分,期末考试居然数学成绩进入全班前 3 名.

许多教学成功的经验都证实了一个道理:基本上每个学生都有他内在的潜能与智慧.当他在某种情况下受到压抑时,比如说因某个时段上课没听懂,一些知识点没弄清楚,后续的内容就难以接受,于是就变得害怕数学,讨厌数学,数学能力就得不到发展.看起来在数学方面就显得很笨,一个很简单的问题不知道该如何思考,更不会通过数学的计算与证明找出答案.所以成功的数学教学是让学生从这样的困境中解放出来.首先是要学生学会思考,学会解题.正如美籍数学家波利亚所说:你所解决的问题并不大,但学生如果只用自己的方法独立地去解决这些问题,就会享受到“发现”的喜悦,从而养成善于思考的好习惯,这将改变学生一生的命运,使学生真正走上成才之路,成为高智商的专家学者.“MM”教育方式中还有一个口号,就是要让学生变得越来越聪明.从以上情况来看,这个口号没有一点虚假.

由于作者多年来一直从事高中数学的教学,所以只能以高中教材中一些重点、难点的章节作为素材,谈谈如何引起学生兴趣,教会学生正确的思维方式,发展学生能力的体会.

编著者

2009 年 9 月

目 录

1 把集合与函数作为高中生学好数学的基础	1
1.1 以集合为素材 教会学生抽象思维	2
1.2 函数的概念应怎样引入	10
1.3 用函数图像,把抽象陌生的函数变成学生熟悉的好友	27
1.4 用“MM”方式突破数学教学中的难点	33
2 让学生体会到数列的乐趣	66
2.1 学会猜想、联想,最能激发学生的解题兴趣	67
2.2 学会转化是解数列综合题的关键	71
2.3 总结等差数列中的方法与结论是研究数列的基础	79
2.4 总结等比数列中的方法与规律	95
3 如何帮助学生掌握圆锥曲线中的数学方法	136
3.1 用研究方式学椭圆	137
3.2 分两支探求双曲线中的奥秘	176
3.3 引导学生发现与总结抛物线中的奇妙性质	216
结束语	259
附 录	263
附录 1 我是怎样应用 MM 方式组织教学的	263
附录 2 近年来某些高考压轴题、把关题的背景透视	282